Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ДАВЛЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА НА УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В. С. Губенко, В. И. Моссаковский

(Днепропетровск)

Рассматривается задача о давлении жесткого штампа, имеющего в плане форму кругового концентрического кольца, на упругое полупространство.

Эта задача привлекает внимание исследователей. В качестве подтверждения можно указать на недавно появившиеся работы К. Е. Егорова [1], А. Я. Александрова [2]. Трудности, известные в такого рода задачах, вызывают получение эффективного решения. В одной из ранних работ Н. Н. Лебедева [3] для этой цели вводятся специальные функции, при помощи которых возможно решение некоторых краевых задач для кольцевой области.

Используемые в данной работе интегральные преобразования, при помощи которых В. И. Моссаковский [4] приводит осесимметричную задачу к задаче линейного сопряжения в плоскости комплексного переменного, применяются для вывода интегрального уравнения типа Фредгольма относительно граничного значения (в области контакта) одной из неизвестных функций, зная которую, нетрудно найти давление посредством квадратуры. Для уравнения Фредгольма строится приближенное решение посредством известных в этом случае приемов аппроксимации.

При этом поверхность штампа после вдавливания считается осесимметричной (уравнение этой поверхности задано); трение в области контакта не учитывается, давление вне штампа отсутствует. Находится закон распределения давлений под штампом[1].

§ 1. Решение задачи, как известно [7, 8], сводится к отысканию нормальной производной $F_z'(\rho, 0)$ в области контакта от некоторой гармонической в упругом полупространстве функции $F(\rho, z)$, исчезающей на бесконечности и удовлетворяющей следующим условиям на границе упругого полупространства:

$$F_z'(\rho, 0) = 0, \quad 0 < \rho < b, \quad a < \rho < \infty$$
$$F(\rho, 0) = f(\rho), \quad b < \rho < a \tag{1.1}$$

где a и b — соответственно внешний и внутренний радиусы кольца, ρ — полярный радиус, $f = f(\rho)$ — уравнение поверхности штампа.

---

[1] В статье [5] Н. А. Ростовцев указал В. С. Губенко на ошибку, которая была допущена в его работе [6]. Формула для давления под подошвой кольцевого штампа с плоским основанием, полученная путем формального применения дробного дифференцирования, является ошибочной.

За это указание автор весьма признателен Н. А. Ростовцеву.

Здесь начало координат принято в центре кольца, ось z направлена внутрь упругого полупространства.

Давление $p(\rho)$ под штампом определяется по формуле

$$p(\rho) = \frac{E}{2(1-\nu^2)} F_z'(\rho, 0) \qquad (b < \rho < a) \tag{1.2}$$

где E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона.

§ 2. Воспользуемся следующими формулами [3]:

$$\begin{aligned} u_{ix}'(x, z) &= 4\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{Fi(\rho, z)}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\rho d\rho \qquad (i = 1,\ 2) \\ u_{zi}'(x, z) &= 4\frac{\partial}{\partial x}\int_x^\infty \frac{Fi(\rho, z)}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\rho d\rho \end{aligned} \tag{2.1}$$

и обратными им

$$\begin{aligned} Fi(\rho, z) &= \frac{1}{2\pi\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\int_0^\rho \frac{u_i(x, z)}{\sqrt{\rho^2-x^2}} x dx \\ F_{iz}'(\rho, z) &= -\frac{1}{2\pi\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\int_\rho^\infty \frac{u_{ix}'(x, z)}{\sqrt{x^2-\rho^2}} x dx \end{aligned} \tag{2.2}$$

где $u_i(x, z)$ — антисимметричные относительно x гармонические на плоскости (x, z) функции; $Fi(\rho, z)$ — симметричные относительно ρ гармонические в полупространстве функции.

§ 3. В общем случае следует предположить, что функция $f(\rho)$ может быть представлена в виде

$$f(\rho) = \ldots + a_2\rho^2 + a_1\rho + a_0 + \frac{a_{-1}}{\rho} + \frac{a_{-2}}{\rho^2} + \frac{a_{-3}}{\rho^3} + \ldots$$

Положим

$$f_1(\rho) = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + \ldots, \qquad f_2(\rho) = \frac{a_{-1}}{\rho} + \frac{a_{-2}}{\rho^2} + \frac{a_{-3}}{\rho^3} + \ldots$$

Тогда

$$f(\rho) = f_1(\rho) + f_2(\rho)$$

Такое представление функции $f(\rho)$, очевидно, единственное, при этом $f_1(\rho)$ может быть продолжена до нуля, а $f_2(\rho)$ — до бесконечности.

Введем теперь две гармонические в упругом полупространстве функции $F_1(\rho, z)$ и $F_2(\rho, z)$ такие, чтобы

$$F_1(\rho, z) + F_2(\rho, z) = F(\rho, z)$$

$$F_1(\rho, 0) = f_1(\rho) \quad (0 < \rho < a), \qquad F_2(\rho, 0) = f_2(\rho) \quad (b < \rho < \infty)$$

Тогда граничные условия (1.1) примут вид:

$$F_{1z}'(\rho, 0) + F_{2z}'(\rho, 0) = 0 \qquad (0 < \rho < b,\ a < \rho < \infty) \tag{3.1}$$

$$F_1(\rho, 0) = f_1(\rho) \quad (0 < \rho < a), \qquad F_2(\rho, 0) = f_2(\rho) \quad (b < \rho < \infty)$$

По формулам (2.1) последние условия преобразуются для функций $u_i(x, z)$ к следующим: (3.2)

$$u_{1x}'(x, 0) + u_{2x}'(x, 0) = 0, \quad a < |x|; \qquad u_{1x}'(x, 0) = g_1(x), \quad |x| < a$$
$$u_{1z}'(x, 0) + u_{2z}'(x, 0) = 0, \quad |x| < b; \qquad u_{2z}'(x, 0) = g_2(x), \quad |b| < |x|$$

где

$$g_1(x) = 4\frac{\partial}{\partial x}\int_0^x \frac{f_1(\rho)}{\sqrt{x^2-\rho^2}}\rho d\rho, \qquad g_2(x) = 4\frac{\partial}{\partial x}\int_x^\infty \frac{f_2(\rho)}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\rho d\rho \tag{3.3}$$

§ 4. При отыскании $u_i(x, y)$ $(y = z)$ из граничных условий можно поступить по-разному. Используем следующее. Предположим, что найдены две гармонические в полуплоскости xy функции $Q_1(x, y, t)$ и $Q_2(x, y, t)$, антисимметричные относительно x, исчезающие на бесконечности и удовлетворяющие на прямой $y = 0$ следующим условиям:

$$Q_{1x}'(x, 0, t) = 1, \quad |x| < t, \qquad Q_{1x}'(x, 0, t) = 0, \quad |x| > t$$
$$Q_{2y}'(x, 0, t) = 1, \quad |x| < t; \qquad Q_{2y}'(x, 0, t) = 0, \quad |x| > t$$

где t — параметр.

Тогда производные $u_{1x}'(x, y)$ и $u_{2y}'(x, y)$ могут быть представлены в виде

$$u_{1x}'(x, y) = -\int_0^a g_1'(t)\, Q_{1x}'(x, y, t)\, dt + \int_a^\infty u_{2xt}''(t, 0)\, Q_{1x}'(x, y, t)\, dt +$$
$$+ [g_1(a) + u_{2x}'(a, 0)]\, Q_{1x}'(x, y, a) \tag{4.1}$$
$$u_{2y}'(x, y) = \int_0^b u_{1yt}''(t, 0)\, Q_{2y}'(x, y, t)\, dt - \int_a^\infty g_2'(t)\, Q_{2y}'(x, y, t)\, dt -$$
$$- [g_2(b) + u_{1y}'(b, 0)]\, Q_{2y}'(x, y, b)$$

Функции $Q_1(x, y, t)$ и $Q_2(x, y, t)$ легко определяются. Они имеют следующий вид:

$$Q_{1x}'(x, y, t) + iQ_{1y}'(x, y, t) = -\frac{i}{\pi}\ln\frac{z-t}{z+t}$$
$$Q_{2x}'(x, y, t) + iQ_{2y}'(x, y, t) = \frac{2}{\pi}\ln\frac{\sqrt{z^2-t^2}}{z} \qquad (z = x + iy) \tag{4.2}$$

Равенства (4.1) можно представить в виде

$$u_{1y}'(x, y) = -\int_0^a g_1'(t)\, Q_{1y}'(x, y, t)\, dt + \int_a^\infty u_{2xt}''(t, 0)\, Q_{1y}'(x, y, t)\, dt +$$
$$+ [g_1(a) + u_{2x}'(a, 0)]\, Q_{1y}'(x, y, a) \tag{4.3}$$
$$u_{2x}'(x, y) = \int_0^b u_{1yt}''(t, 0)\, Q_{2x}'(x, y, t)\, dt + \int_b^\infty g_2'(t)\, Q_{2x}'(x, y, t)\, dt -$$
$$- [g_2(b) + u_{1y}'(b, 0)]\, Q_{2x}'(x, y, b)$$

Интегрируя (4.3) по частям и учитывая (4.2), получим

$$
\begin{aligned}
u'_{1y}(x, y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^a g_1(t)\,\mathrm{Im}\left\{\frac{iz}{z^2-t^2}\right\}dt - \frac{2}{\pi}\int_a^\infty u'_{2x}(t, 0)\,\mathrm{Im}\left\{\frac{iz}{z^2-t^2}\right\}dt \\
u'_{2x}(x, y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^b u'_{1y}(t, 0)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{t}{z^2-t^2}\right\}dt - \frac{2}{\pi}\int_b^\infty g_2(t)\,\mathrm{Re}\left\{\frac{t}{z^2-t^2}\right\}dt
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

При $y=0$ последние равенства принимают следующий вид:

$$
\begin{aligned}
u'_{1y}(x, 0) &= \frac{2x}{\pi}\int_0^a \frac{g_1(t)}{x^2-t^2}dt - \frac{2x}{\pi}\int_a^\infty \frac{u'_{2x}(t, 0)}{x^2-t^2}dt \\
u'_{2x}(x, 0) &= \frac{2}{\pi}\int_0^b \frac{u'_{1y}(t, 0)}{x^2-t^2}tdt - \frac{2}{\pi}\int_b^\infty \frac{g_2(t)}{x^2-t^2}tdt
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

справедливые при любых x.

§ 5. Производную $F_z'(\rho, 0)$ можно определить, например, из первой формулы (2.2). Учитывая (3.2), получим

$$
F_z'(\rho, 0) = \frac{1}{2\pi\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_b^\rho \frac{g_2(x)+u'_{1z}(x, 0)}{\sqrt{\rho^2-x^2}}xdx \tag{5.1}
$$

Подставим в (5.1) значение $u'_{1y}(x, 0)$ из (4.5). В полученных двойных интегралах изменим порядок интегрирования, считая $b<\rho<a$. Учитывая затем (1.2), найдем

$$
\begin{aligned}
p(\rho) = \frac{E}{2(1-\nu^2)\pi^2}\Bigg\{&\frac{bA}{\rho^2\sqrt{\rho^2-b^2}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\Bigg[\frac{\pi}{2}\int_b^\rho \frac{g_2(x)}{\sqrt{\rho^2-x^2}}xdx - \\
&-\int_\rho^a \frac{t}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,\mathrm{arc\,ctg}\,\frac{b}{t}\frac{\sqrt{t^2-\rho^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}}g_1(t)\,dt + \\
&+\frac{1}{2}\int_0^\rho \frac{t}{\sqrt{\rho^2-t^2}}\ln\left|\frac{t\sqrt{\rho^2-b^2}+b\sqrt{\rho^2-t^2}}{t\sqrt{\rho^2-b^2}-b\sqrt{\rho^2-t^2}}\right| g_1(t)\,dt + \\
&+\int_a^\infty \frac{t}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\,\mathrm{arc\,ctg}\,\frac{b}{t}\frac{\sqrt{t^2-\rho^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}}u'_{2x}(t, 0)\,dt\Bigg\}
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

где

$$
A = \int_0^a g_1(t)\,dt - \int_a^\infty u'_{2x}(t, 0)\,dt
$$

Заметим, что при $b=0$ формула (5.2) принимает простой вид:

$$
p(\rho) = -\frac{E}{2(1-\nu^2)}\frac{1}{2\pi\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_\rho^a \frac{g_1(t)}{\sqrt{t^2-\rho^2}}tdt
$$

что совпадает с решением задачи о круглом штампе, если учесть (3.3).

§ 6. Перейдем к отысканию производной $u'_{2x}(x, 0)$ на участке (a, ∞). Исключим в (4.5) производную $u'_{1y}(x, 0)$, тогда получим следующее интегральное уравнение для $u'_{2x}(x, 0)$:

$$u'_{2x}(x, 0) = \frac{2}{\pi^2}\int_a^\infty \frac{1}{x^2 - s^2}\left(s \ln\frac{s+b}{s-b} - x\ln\frac{x+b}{x-b}\right)u'_{2x}(s, 0)\,ds + \Phi(x) \quad (6.1)$$

где

$$\Phi(x) = -\frac{2}{\pi^2}\int_0^a \frac{1}{x^2 - s^2}\left(s\ln\frac{s+b}{s-b} - x\ln\frac{x+b}{x-b}\right)g_1(s)\,ds - \frac{2}{\pi}\int_b^\infty \frac{g_2(t)}{x^2 - t^2}dt \quad (6.2)$$

При решении уравнения (6.1) воспользуемся приближением

$$\ln\frac{a+b}{a-b} \approx 2\left(\frac{b}{a} + \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3} + \ldots + \frac{1}{2N+1}\frac{b^{2N+1}}{a^{2N+1}}\right) \quad (b < a) \quad (6.3)$$

Количество N выбирается так, чтобы обеспечивалось некоторое заданное приближение. Тогда с неменьшим приближением, так как $x \leqslant a$, $s \leqslant a$

$$\begin{aligned} \ln\frac{s+b}{s-b} &\approx 2\left(\frac{b}{s} + \frac{1}{3}\frac{b^3}{s^3} + \ldots + \frac{1}{2N+1}\frac{b^{2N+1}}{s^{2N+1}}\right) \\ \ln\frac{x+b}{x-b} &\approx 2\left(\frac{b}{x} + \frac{1}{3}\frac{b^3}{x^3} + \ldots + \frac{1}{2N+1}\frac{b^{2N+1}}{s^{2N+1}}\right) \end{aligned} \quad (6.4)$$

Учитывая (6.4), ядро интегрального уравнения (6.1) можно представить в виде

$$\frac{1}{x^2 - s^2}\left(s\ln\frac{s+b}{s-b} - x\ln\frac{x+b}{x-b}\right) \approx \frac{C_2(s)}{x^2} + \frac{C_4(s)}{x^4} + \ldots + \frac{C_{2N}(s)}{x^{2N}} \quad (6.5)$$

где

$$C_{2k}(s) = 2b^{2k-1}\left(\frac{1}{2k+1}\frac{b^2}{s^2} + \frac{1}{2k+3}\frac{b^4}{s^4} + \ldots + \frac{1}{2N+1}\frac{b^{2(N-k+1)}}{s^{2(N-k+1)}}\right) (k=1, \ldots, N) \quad (6.6)$$

Подставляя (6.5) в (6.1), получим следующее представление:

$$u'_{2x}(x, 0) \approx \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{z_2}{x^2} + \frac{z_4}{x^4} + \ldots + \frac{z_{2N}}{x^{2N}}\right] + \Phi(x) \quad (6.7)$$

где

$$z_{2k} = \int_a^\infty C_{2k}(s)\,u'_{2x}(s, 0)\,ds \qquad (k = 1, \ldots, N) \quad (6.8)$$

Подставим (6.7) в (6.8). Тогда для z_{2k} получим систему уравнений

$$\begin{aligned} z_2 &= A_{22}z_2 + A_{42}z_4 + \ldots + A_{2n2}z_{2n} + \ldots + A_{2N2}z_{2N} + B_2 \\ z_4 &= A_{24}z_2 + A_{44}z_4 + \ldots + A_{2n4}z_{2n} + \ldots + A_{2N4}z_{2N} + B_4 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{2k} &= A_{22k}z_2 + A_{42k}z_4 + \ldots + A_{2n2k}z_{2n} + \ldots + A_{2N2k}z_{2N} + B_{2k} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{2N} &= A_{22N}z_2 + A_{42N}z_4 + \ldots + A_{2n2N}z_{2n} + \ldots + A_{2N2N}z_{2N} + B_{2N} \end{aligned} \quad (6.9)$$

где

$$A_{2n\,2k} = \frac{2}{\pi^2}\int_a^\infty \frac{C_{2k}(s)}{s^{2n}}ds, \qquad B_{2k} = \int_a^\infty C_{2k}(s)\,\Phi(s)\,ds \quad (6.10)$$

§ 7. Рассмотрим пример. Пусть $f(\rho) = h = \text{const}$ (штамп с плоским основанием), а

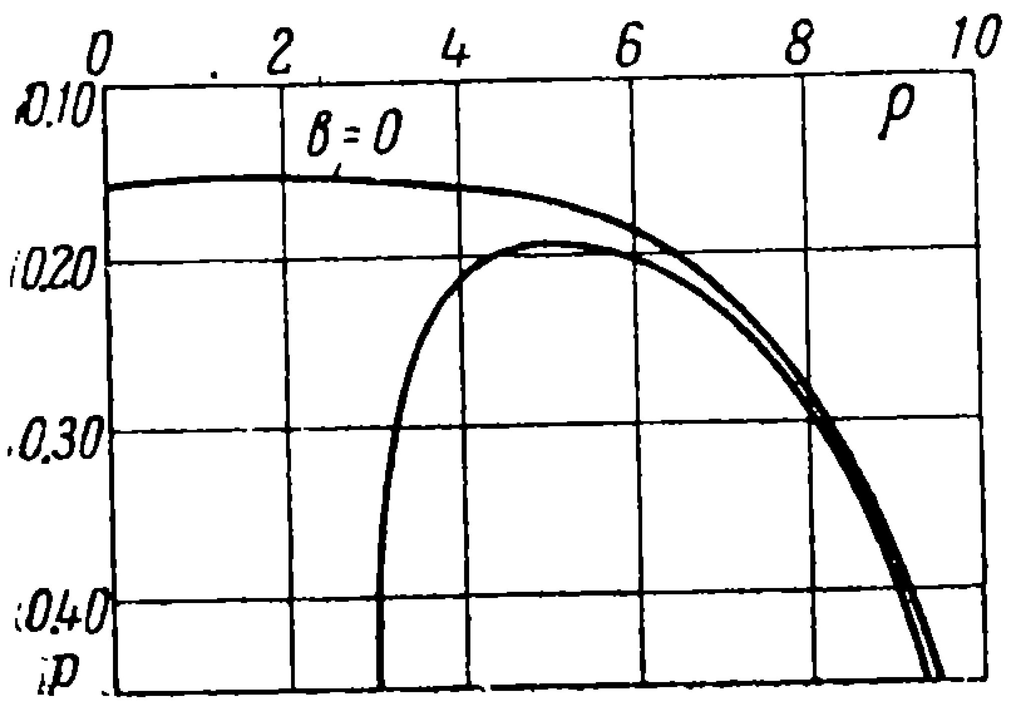
$$\frac{b}{a} \leqslant \frac{e-1}{e+1} = 0.462 \qquad (e=2.7128\ldots) \tag{7.1}$$

В этом случае следует принять $f_1(\rho) = h$, $f_2(\rho) = 0$. Из (3.3) находим $g_1(x) = 4h$, $g_2(x) = 0$. По (6.3) и (7.1) получим

$$\ln\frac{a+b}{a-b} \approx 2\left(\frac{b}{a} + \frac{1}{3}\frac{b^3}{a^3}\right), \quad \text{или} \quad N = 1 \tag{7.2}$$

Ошибка при этом не превышает 1%. Система (6.9) принимает вид:

$$z_2 = A_{22} z_2 + B_2, \quad \text{или} \quad z_2 = \frac{B_2}{1 - A_{22}} \tag{7.3}$$



По формуле (6.6) и (6.10) определяем

$$C_2(s) = \frac{2}{3}\frac{b^3}{s^2}, \quad A_{22} = \frac{2}{\pi^2}\int_a^\infty \frac{C_2(s)}{s^2}\,ds = \frac{4}{9\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^3 \tag{7.4}$$

Из (6.2) определяем

$$\Phi(s) = \frac{8h}{\pi^2}\int_0^b \ln\frac{a+t}{a-t}\,\frac{tdt}{s^2-t^2} \tag{7.5}$$

Из (6.11) находим с учетом (7.4), (7.5) и (7.2)

$$B_2 = \int_a^\infty C_2(s)\,\Phi(s)\,ds = \frac{32h}{27\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^4\left(1 + \frac{1}{5}\frac{b^2}{a^2}\right)b^2 \tag{7.6}$$

На основании (7.3), (7.4) и (7.6) определяем

$$z_2 = \frac{32h}{27\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^4 \frac{1 + \frac{1}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^3}{1 - \frac{4}{9\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^3}\,b^2 \tag{7.7}$$

Из (6.7), (7.5) и (7.7) получим

$$u'_{2x}(x, 0) = \frac{64h}{27\pi^4}\left(\frac{b}{a}\right)^4 \frac{1 - \frac{1}{5}\left(\frac{b}{a}\right)^2}{1 - \frac{4}{9\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^3}\left(\frac{b}{x}\right)^2 + \frac{8h}{\pi^2}\int_0^b \ln\frac{a+t}{a-t}\,\frac{tdt}{x-t^2}$$

или, учитывая (7.2), найдем

$$u'_{2x}(x, 0) = c\left(\frac{b}{x}\right)^2, \qquad c = \frac{16h}{3\pi^2}\frac{b}{a}\,\frac{1 + \frac{4}{45\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^5}{1 - \frac{4}{9\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^3} \tag{7.8}$$

В выражении для c третий сомножитель мал по сравнению с единицей; поэтому

$$u'_{2x}(x, 0) \approx \frac{16h}{3\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{b}{x}\right)^2 \tag{7.9}$$

Формула (5.2) при $g_1(x) = 4h$ и $g_2(x) = 0$ принимает вид:

$$p(\rho) = \frac{E}{2(1-\nu^2)\pi^2}\left[\frac{4h}{\sqrt{a^2-\rho^2}}\operatorname{arcctg}\frac{b}{a}\frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}} - \frac{B(\rho)}{\sqrt{\rho^2-b^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\int_a^\infty \frac{t}{\sqrt{t^2-\rho^2}}\operatorname{arcctg}\frac{b}{t}\frac{\sqrt{t^2-\rho^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}}\,u'_{2x}(t, 0)\,dt\right] \tag{7.10}$$

где

$$B = 2h \ln \frac{a-b}{a+b} + \frac{b}{\rho^2} \int_a^\infty u'_{2x}(t, 0)\, dt \tag{7.11}$$

Подставим (7.11) и (7.9) в (7.10). Интеграл, входящий в (7.10), проинтегрируем после этого сначала по частям, а затем учтем разложение (7.2). Тогда получим

$$p(\rho) = \frac{4hE}{2(1-\nu^2)\pi^2}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \operatorname{arc\,ctg} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}} - \frac{B_1(\rho)}{\sqrt{\rho^2-b^2}} - \frac{4b^3}{3\pi^2 a\rho} \frac{dJ}{d\rho}\right] \tag{7.12}$$

где

$$B_1(\rho) = -\frac{1}{2} \ln \frac{a+b}{a-b} + \frac{4}{3\pi^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 \tag{7.13}$$

$$J = \frac{1}{\rho} \operatorname{arc\,ctg} \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\rho} \operatorname{arc\,ctg} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}} - \tag{7.14}$$

$$-\frac{b\sqrt{\rho^2-b^2}}{a^3\rho^4}\left[\left(a^2\rho^2 + \frac{2}{3} b^2 a^2 + \frac{1}{9} b^2 \rho^2\right)\left(\rho - \sqrt{a^2-\rho^2}\right) - \frac{2}{9} b^2 \rho^2 \sqrt{a^2-\rho^2}\right]$$

В частности, при $b = 0$ формула (7.12) принимает простой вид:

$$p(\rho) = \frac{Eh}{\pi(1-\nu^2)} \frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}}$$

Заметим в заключение, что если штамп настолько широк, что возможно приближение

$$\ln \frac{a+b}{a-b} \approx 2\frac{b}{a}$$

то, как легко убедиться, производная $u'_{2x}(x, 0) = 0$. Тогда формула (7.12) принимает вид:

$$p(\rho) = \frac{4hE}{2(1-\nu^2)\pi^2}\left[\frac{1}{\sqrt{a^2-\rho^2}} \operatorname{arc\,ctg} \frac{b}{a} \frac{\sqrt{a^2-\rho^2}}{\sqrt{\rho^2-b^2}} + \frac{b}{a\sqrt{\rho^2-b^2}}\right]$$

Эпюра распределения давлений под кольцевым штампом для $b/a = 0.3$ $(a = 10)$, построенная по формуле (7.12) с точностью до множителя $2hE/(1-\nu^2)\pi^2$, изображена на фигуре.

Поступила 23 III 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Егоров К. Е. Механика грунтов. Сб. тр. Акад. стр-ва и архитектуры и НИИ оснований и подземных сооружений, № 34, 1958.
2. Александров А. Я. Тр. Новосиб. ин-та инженеров ж.-д. транспорта, вып. XI, 1955.
3. Лебедев Н. Н. Techn. Phys. USSR, 4, 3, 1937.
4. Моссаковский В. И. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 1954, т. XVIII, вып. 2.
5. Ростовцев Н. А. Замечания к работе В. С. Губенко «Некоторые контактные задачи теории упругости и дробное дифференцирование». ПММ, 1957; т. XXI, вып. 2, ПММ, 1959 т. XXII, вып. 4.
6. Губенко В. С. Некоторые контакты задачи теории упругости и дробное дифференцирование. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.
7. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости, Гостехиздат, М., 1955.
8. Моссаковский В. И. и Губенко В. С. О давлении кольцевого штампа на упругое полупространство. Научные записки ДГУ, т. 45, 1956.