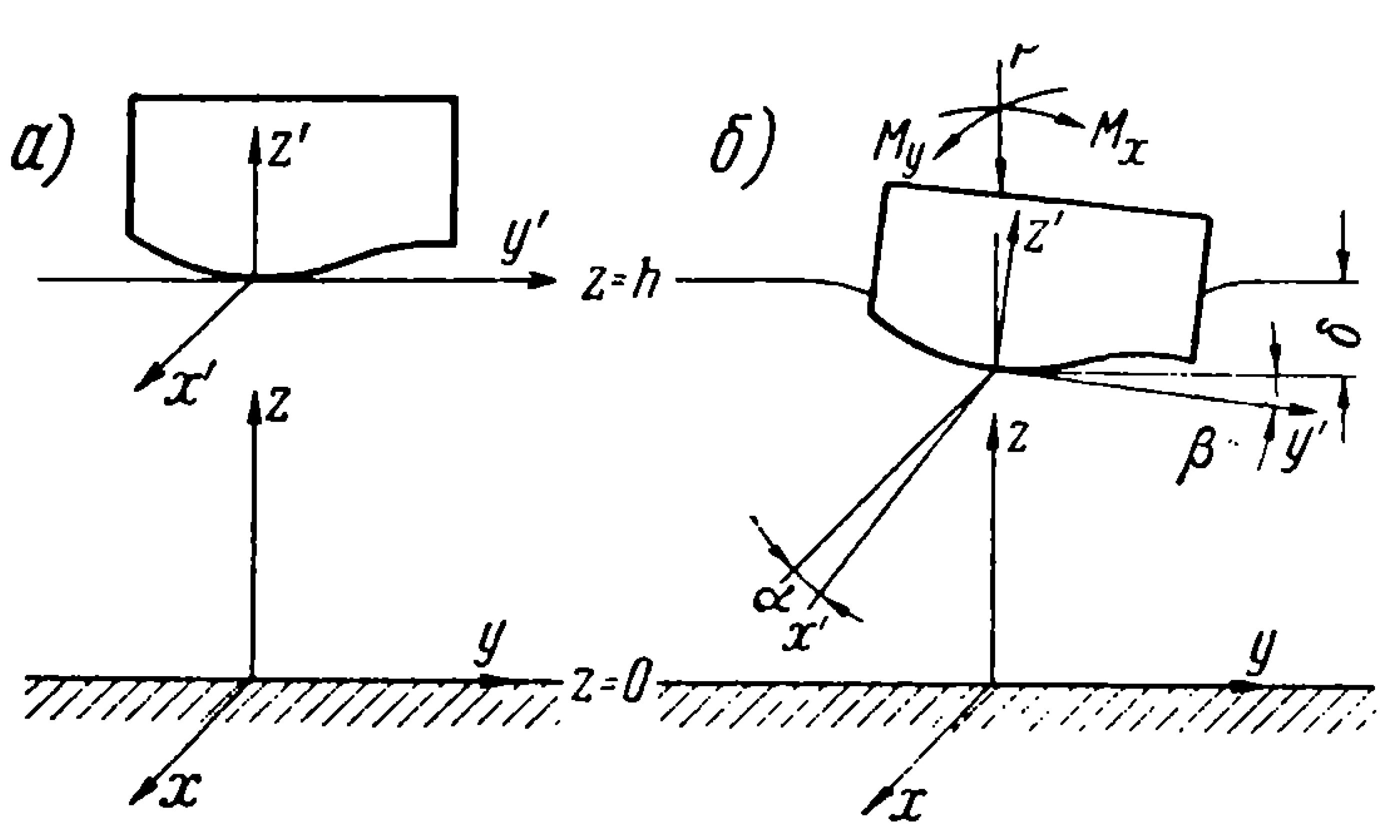
Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ДЕЙСТВИИ ШТАМПА НА УПРУГИЙ СЛОЙ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

В. М. Александров, И. И. Ворович
(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача о действии жесткого штампа на упругий слой толщины h, лежащий на жестком основании. Изложен метод, позволяющий по известному решению задачи о действии штампа на упругое полупространство строить приближенное решение задачи о действии того же штампа на упругий слой. Полученное решение справедливо при достаточно больших h и дается в виде ряда по степеням $1/h$. Конкретные расчетные формулы получены для плоского эллиптического в плане штампа.

§ 1. Постановка задачи. Пусть в упругий слой, лежащий на жестком основании (фиг. 1), внедряется жесткий штамп в виде цилиндрического тела с поперечным сечением Ω и поверхностью основания $z' = f(x', y')$. Штамп нагружен силой P, действующей по оси z, и моментами M_x и M_y относительно осей координат x и y.



Будем предполагать, что величины силы и моментов таковы, что область контакта штампа со слоем совпадает с Ω. Кроме того, предполагаем, что силы трения между слоем и штампом, а также между слоем и основанием отсутствуют и вне штампа слой не нагружен. При таких допущениях задача приводится к решению основных уравнений теории упругости при следующих краевых условиях:

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0, \quad \sigma_z = 0 \qquad \text{вне области } \Omega \text{ при } z = h \tag{1.1}$$

$$w = -\delta(x, y) = -[\delta + \alpha x + \beta y - f(x, y)] \qquad \text{в области } \Omega \tag{1.2}$$

$$\tau_{zx} = 0, \quad \tau_{zy} = 0, \quad w = 0 \qquad \text{при } z = 0 \tag{1.3}$$

Перемещения и напряжения исчезают при $(x, y) \to \infty$. Здесь δ — перемещение штампа под действием силы P, через α и β обозначены углы поворота штампа соответственно вокруг осей y и x под действием моментов M_y и M_x. Обозначим давление между слоем и штампом через

$$q(x, y) = -\sigma_z \qquad \text{в области } \Omega \text{ при } z = h \tag{1.4}$$

Отметим, что по физическому смыслу задачи $q(x, y) > 0$ и $\delta(x, y) > 0$ в Ω, кроме того, давление $q(x, y)$ связано известными соотношениями статики с силой и моментами, действующими на штамп:

$$P = \iint\limits_{\Omega} q(x, y)\,dxdy, \quad M_x = \iint\limits_{\Omega} yq(x, y)\,dxdy, \quad M_y = \iint\limits_{\Omega} xq(x, y)\,dx\,dy \tag{1.5}$$

Предположим вначале, что давление $q(x, y)$ между штампом и слоем известно. Тогда из книги [1], гл. 3, § 5, где рассмотрена задача о сжатии упругого слоя, покоящегося на гладком жестком основании, распределенной нормальной нагрузкой $p(x, y)$ по верхней плоскости, имеем следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
w &= \frac{h}{2\pi G}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\gamma\Delta(\gamma h)}\, x_2(\gamma z)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha d\beta \qquad (\gamma = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}) \\
\tau_{zx} &= -\frac{hi}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)\alpha}{\gamma\Delta(\gamma h)}\, x_3(\gamma z)\, e^{i(\alpha x+\beta y)}\, d\alpha d\beta \\
\tau_{zy} &= -\frac{hi}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)\beta}{\gamma\Delta(\gamma h)}\, x_3(\gamma z)\, e^{i(\alpha x+\beta y)} d\alpha d\beta \qquad \Delta(\gamma h) = 2\gamma h + \operatorname{sh} 2\gamma h \\
\sigma_z &= -\frac{h}{\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)\gamma}{\Delta(\gamma h)}\, x_4(\gamma z)\, e^{i(\alpha x+\beta y)} d\alpha d\beta
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Здесь $Q(\alpha, \beta)$ — трансформанта Фурье функции $p(x, y) = -[\sigma_z]_{z=h}$, т. е.

$$
Q(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} [\sigma_z]_{z=h} e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, dx dy \tag{1.7}
$$

$$
\begin{aligned}
x_2(\gamma z) &= \frac{1}{h}\left[\gamma h \operatorname{ch}\gamma h \operatorname{sh}\gamma z - \gamma z \operatorname{ch}\gamma z \operatorname{sh}\gamma h + \frac{2(m-2)}{m}\operatorname{sh}\gamma z \operatorname{sh}\gamma h\right] \\
x_3(\gamma z) &= \frac{1}{h}(\gamma h \operatorname{ch}\gamma h \operatorname{sh}\gamma z - \gamma z \operatorname{ch}\gamma z \operatorname{sh}\gamma h) \\
x_4(\gamma z) &= \operatorname{ch}\gamma h \operatorname{ch}\gamma z - \frac{z}{h}\operatorname{sh}\gamma h \operatorname{sh}\gamma z + \frac{\operatorname{ch}\gamma z \operatorname{sh}\gamma h}{\gamma h}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

Формулы (1.6) составлены так, что при любой функции $Q(\alpha, \beta)$ выполнены первые два краевых условия (1.1) и краевые условия (1.3), в чем легко убедиться. Используя условие третье (1.1) и равенство (1.4), представим (1.7) в виде

$$
Q(\alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\Omega} q(x, y)\, e^{-i(\alpha x+\beta y)}\, dx dy \tag{1.9}
$$

Наконец, условие (1.2) будет удовлетворено, если функцию $Q(\alpha, \beta)$ определить из уравнения

$$
-\frac{h}{2\pi G}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(\alpha, \beta)}{\gamma\Delta(\gamma h)}\, x_2(\gamma h) e^{i(\alpha x+\beta y)} d\alpha d\beta = -\delta(x, y) \text{ в области } \Omega \left(\Delta = \frac{mG}{m-1}\right)
$$

или

$$
\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}^2\gamma h}{\gamma(2\gamma h + \operatorname{sh} 2\gamma h)}\, Q(\alpha, \beta)\, e^{i(\alpha x+\beta y)} d\alpha d\beta = \pi\Delta\delta(x, y) \text{ в области } \Omega \tag{1.10}
$$

Подставляя выражение $Q(\alpha, \beta)$ из (1.9) в (1.10), сводим задачу к определению функции $q(x, y)$ из интегрального уравнения первого рода

$$
\iint\limits_{\Omega} q(\xi, \eta)\, K(x-\xi, y-\eta, h)\, d\xi d\eta = 2\pi^2\Delta\delta(x, y) \tag{1.11}
$$

где

$$K(x-\xi,\ y-\eta,\ h)=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}^2\gamma h}{\gamma(2\gamma h+\operatorname{sh}2\gamma h)}e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]}d\alpha d\beta \tag{1.12}$$

Замечая, что

$$K_\infty=\lim_{h\to\infty}K=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]}\frac{d\alpha d\beta}{2\gamma}=\frac{\pi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \tag{1.13}$$

представим (1.11) в виде

$$\iint\limits_{\Omega}\frac{q(\xi,\ \eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}=2\pi\Delta\delta(x,\ y)-\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}q(\xi,\ \eta)(K-K_\infty)\,d\xi d\eta \tag{1.14}$$

где

$$K-K_\infty=\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-4\gamma h}-2\gamma he^{-2\gamma h}-e^{-2\gamma h}}{\gamma(4\gamma he^{-2\gamma h}+1-e^{-4\gamma h})}e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]}d\alpha d\beta \tag{1.15}$$

Определив функцию $q(x,\ y)$ из уравнения (1.14), найдем зависимости между величинами P и δ, M_y и α, M_x и β из соотношений (1.5) и выражение для функции $Q(\alpha,\ \beta)$ по формуле (1.9); затем по (1.6) и аналогичным формулам для u, v, σ_x, σ_y и τ_{xy}, содержащимся в работе [1], найдем перемещения и напряжения в слое.

§ 2. Преобразование ядра $K-K_\infty$. Разлагая дробь под знаком двойного интеграла в (1.15) в ряд по степеням $e^{-2\gamma h}=t$, получим

$$\frac{t^2-2\gamma ht-t}{\gamma(4\gamma ht+1-t^2)}=\frac{1}{\gamma}(A_0-A_1t+A_2t^2-A_3t^3+\ldots)$$

$$t^2-2\gamma ht-t=(4\gamma ht+1-t^2)(A_0-A_1t+A_2t^2-A_3t^3+\ldots)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, имеем

$$A_0=0,\qquad A_1=1+2\gamma h,\qquad A_2=1+4\gamma h+8\gamma^2h^2 \tag{2.1}$$

$$A_n=A_{n-2}+4\gamma hA_{n-1},\qquad n=3,\ 4,\ldots \tag{2.2}$$

Обозначим коэффициенты в A_k при $(\gamma h)^i$ через A_{ki}, тогда

$$\frac{e^{-4\gamma h}-2\gamma he^{-2\gamma h}-e^{-2\gamma h}}{4\gamma he^{-2\gamma h}+1-e^{-4\gamma h}}=\frac{1}{\gamma}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^ke^{-2\gamma hk}\sum_{i=0}^{k}A_{ki}(\gamma h)^i \tag{2.3}$$

Коэффициенты A_{ki} определяются соотношениями

$$A_{00}=0,\qquad A_{2r+2,\,0}=1$$

$$A_{2r+1,\,2s}=\frac{(r+s)!}{(2s)!\,(r-s)!}2^{4s}$$

$$A_{2r+1,\,2s+1}=\frac{(2r+1)(r+s)!}{(2s+1)!\,(r-s)!}2^{4s+1}\qquad\begin{pmatrix}s=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ r\\ r=0,\ 1,\ 2,\ldots\end{pmatrix} \tag{2.4}$$

$$A_{2r+2,\,2s+1}=\frac{(r+s+1)!}{(2s+1)!\,(r-s)!}2^{4s+2}$$

$$A_{2r+2,\,2s+2}=\frac{(2r+2)(r+s+1)!}{(2s+2)!\,(r-s)!}2^{4s+3}$$

Используя разложение

$$e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^{m+n}\alpha^m\beta^n(x-\xi)^m(y-\eta)^n}{m!\,n!}$$

и формулу (2.3), будем иметь

$$K-K_\infty=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}C_{mn}(x-\xi)^m(y-\eta)^n \tag{2.5}$$

где

$$C_{mn}=\frac{i^{m+n}}{m!\,n!}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\sum_{i=0}^{k}A_{ki}\,h^i\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\sin^n\varphi d\varphi\int_0^{\infty}\gamma^{m+n+i}e^{-2k\gamma h}d\gamma \tag{2.6}$$

Вычисляя интегралы в (2.6), найдем

$$C_{2m+1,\,2n}=C_{2m,\,2n+1}=C_{2m+1,\,2n+1}=0,\qquad C_{2m,\,2n}=\frac{2\pi}{h^{2m+2n+1}}\Gamma_{mn} \tag{2.7}$$

Здесь (2.8)

$$\Gamma_{mn}=\frac{(-1)^{m+n+1}(2m+2n)!}{(m+n)!\,m!\,n!\,2^{4m+4n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^{2m+2n+1}}\sum_{i=0}^{k}A_{ki}\frac{(2m+2n+1)\ldots(2m+2n+i)}{(2k)^i}$$

Подставляя выражения A_{ki} из формул (2.4) и обозначая $m+n=p$, приведем $\Gamma_{mn}\,m!n!=\Gamma_p$ к виду

$$\Gamma_p=\frac{(-1)^p}{p!\,2^{6p+2}}\sum_{r=0}^{\infty}\left\{\sum_{s=0}^{r}\left[-\left(2+\frac{p}{s+1/2}\right)\frac{(r+s)!\,(2p+2s)!}{(2s)!\,(r-s)!\,(r+1/2)^{2p+2s+1}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\left(2+\frac{p}{s+1}\right)\frac{(r+s+1)!\,(2p+2s+1)!}{(2s+1)!\,(r-s)!\,(r+1)^{2p+2s+2}}\right]+\frac{(2p)!}{(r+1)^{2p+1}}\right\} \tag{2.9}$$

Вычисления дают

$$\Gamma_{00}=-0.5838\pm0.0001,\qquad \Gamma_{10}=\Gamma_{01}=0.1977\pm0.0001 \tag{2.10}$$

Подставляя C_{mn} из формул (2.7) в (2.5), имеем

$$K-K_\infty=2\pi\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-\xi)^{2m}(y-\eta)^{2n}}{h^{2m+2n+1}}\Gamma_{mn} \tag{2.11}$$

§ 3. Решение уравнения (1.14). Подставляя выражение (2.11) в (1.14), получим

$$\int_\Omega\frac{q(\xi,\,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}=$$
$$=2\pi\Delta\delta(x,\;y)-2\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma_{mn}}{h^{2m+2n+1}}\int_\Omega q(\xi,\;\eta)(x-\xi)^{2m}(y-\eta)^{2n}\,d\xi d\eta \tag{3.1}$$

Легко показать, что ряд (2.11) сходится к $K-K_\infty$ при любых $x-\xi$, $y-\eta$ и при $h\geqslant d/\sqrt{2}$.

От почленного интегрирования сходимость ряда не ухудшится, поэтому уравнение (3.1) справедливо, по крайней мере, для

$$h \geqslant \frac{d}{\sqrt{2}} \qquad (d = \max \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad (x, y) \in \Omega \text{ и } (\xi, \eta) \in \Omega)$$

Будем искать $q(\xi,\eta)$ в виде

$$q(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i(\xi, \eta) \frac{1}{h^i} \tag{3.2}$$

Подставляя $q(\xi, \eta)$ из (3.2) в (3.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях $1/h$, придем к интегральным уравнениям:

$$\int_\Omega \frac{q_0(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = 2\pi\Delta\delta(x, y) \tag{3.3}$$

$$\int_\Omega \frac{q_1(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = -2\Gamma_{00}\int_\Omega q_0(\xi, \eta)\, d\xi,\ d\eta \tag{3.4}$$

$$\int_\Omega \frac{q_2(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = -2\Gamma_{00}\int_\Omega q_1(\xi, \eta)\, d\xi d\eta \tag{3.5}$$

$$\int_\Omega \frac{q_3(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = -2\int_\Omega [(x-\xi)^2\Gamma_{10}q_0 + \Gamma_{00}q_2 + (y-\eta)^2\Gamma_{01}q_0]\, d\xi d\eta \tag{3.6}$$

$$\int_\Omega \frac{q_4(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = -2\int_\Omega [(x-\xi)^2\Gamma_{10}q_1 + \Gamma_{00}q_3 + (y-\eta)^2\Gamma_{01}q_1]\, d\xi d\eta \tag{3.7}$$

Предположим теперь, что мы умеем решать задачу о действии данного штампа на упругое полупространство. Это значит, что из уравнения (3.3) можно определить $q_0(\xi, \eta)$. Подставляя $q_0(\xi, \eta)$ в правую часть уравнения (3.4), получим интегральное уравнение, по типу совадающее с (3.3), и следовательно, допускающее определение из него $q_1(\xi, \eta)$ и т. д.

Заметим, что ядро $K(x-\xi,\ y-\eta,\ h)$ в уравнении (1.11) симметрично относительно переменных x, y и ξ, η. Тогда можно обобщить формулы (2), данные в работе [3].

А именно, если известно решение задачи о действии плоского штампа с областью контакта Ω на упругий слой конечной глубины, т. е. известно решение

$$q_{пл}(x, y) = \delta q_\delta(x, y) + \alpha q_\alpha(x, y) + \beta q_\beta(x, y) \tag{3.8}$$

уравнения

$$\int_\Omega q_{пл}(\xi, \eta) K(x-\xi, y-\eta, h)\, d\xi d\eta = 2\pi^2\Delta(\delta + \alpha x + \beta y) \tag{3.9}$$

то сила и моменты, действующие на штамп с произвольным основанием с той же областью контакта Ω, выражаются формулами

$$P = \int_\Omega q_\delta(x, y)\, \delta(x, y)\, dxdy, \qquad M_y = \int_\Omega q_\alpha(x, y)\, \delta(x, y)\, dxdy$$

$$M_x = \int_\Omega q_\beta(x, y)\, \delta(x, y)\, dxdy \tag{3.10}$$

§ 4. Решение задачи для плоского эллиптического штампа. Решим изложенным выше методом задачу о действии плоского, эллиптического в плане штампа на слой конечной глубины[1].

Предварительно приведем решение задачи о действии эллиптического штампа на упругое полупространство, полученное Л. А. Галиным (см. [2], гл. 2, § 8), попутно исправляя неточность, вкравшуюся в эту работу.

Следуя Л. А. Галину, запишем выражение для потенциала простого слоя $W(x, y, z)$, распределенного по поверхности эллипсоида $\rho = \varkappa$:

$$W = \begin{cases} W_1(x, y, z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{m=1}^{2k+1} A_{km} E_k{}^m(\rho) E_k{}^m(\mu) E_k{}^m(\nu) & \left(\begin{matrix}\text{гармоническая функция внутри эллип-}\\ \text{соида } \rho=\varkappa\end{matrix}\right) \\ W_2(x, y, z) = \sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{m=1}^{2k+1} A_{km} \dfrac{E_k^m(\varkappa)}{F_k^m(\varkappa)} F_k{}^m(\rho) E_k{}^m(\mu) E_k{}^m(\nu) & \left(\begin{matrix}\text{гармоническая функция вне эллипсо-}\\ \text{ида } \rho=\varkappa, \text{ исчеза-}\\ \text{ющая на } \infty\end{matrix}\right) \end{cases}$$

На поверхности эллипсоида (4.1)

$$W(x, y, z)|_{\rho=\varkappa} = W_1|_{\rho=\varkappa} = W_2|_{\rho=\varkappa} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{2k+1} A_{km} E_k{}^m(\varkappa) E_k{}^m(\mu) E_k{}^m(\nu) = 2\pi\Delta Q_n(x, y, z) \tag{4.2}$$

где $Q_n(x, y, z)$ — полином степени n, четный по z; ρ, μ, ν — эллипсоидальные координаты, связанные с прямоугольными соотношениями

$$\begin{gathered} l^2x^2 = a^2\rho^2\mu^2\nu^2 \\ (1-l^2)\, l^2y^2 = a^2(\rho^2 - l^2)(\mu^2 - l^2)(l^2 - \nu^2) \\ (1-l^2)\, z^2 = a^2(\rho^2-1)(1-\mu^2)(1-\nu^2) \\ (0 \leqslant \nu^2 \leqslant l^2,\ l^2 \leqslant \mu \leqslant 1,\ 1 \leqslant \rho^2 \leqslant \infty) \end{gathered} \tag{4.3}$$

Здесь $E_k{}^m(\rho)$ и $F_k{}^{(m)}(\rho)$ — функции Ламе первого и второго рода[2], причем (4.4)

$$F_k{}^m(\rho) = E_k{}^m(\rho)\psi_k{}^m(\rho), \qquad \psi_k{}^m(\rho) = \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{[E_k^m(\rho)]^2 \sqrt{(\rho^2-l^2)(\rho^2-1)}} \to 0 \text{ при } \rho \to \infty$$

Теперь запишем выражение для плотности потенциала простого слоя, распределенного по поверхности эллипсоида $\rho = \varkappa$:

$$q(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\left[\left(\frac{\partial W_2}{\partial \rho} - \frac{\partial W_1}{\partial \rho}\right)\frac{\partial \rho}{\partial n}\right]_{\rho=\varkappa} \tag{4.5}$$

Подставляя выражения W_1 и W_2 из (4.1) в (4.5) и преобразуя, получим (4.6)

$$q(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_{\rho=\varkappa} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{2k+1} A_{km}\left[\frac{d}{d\rho}\left(\frac{\psi_k^m(\rho)}{\psi_k^m(\varkappa)} E_k{}^m(\rho) - E_k{}^m(\rho)\right)\right]_{\rho=\varkappa} \times$$

$$\times E_k{}^m(\mu) E_k{}^m(\nu) = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \rho}{\partial n}\right)_{\rho=\varkappa} \sum_{k=0}^{n} \sum_{m=1}^{2k+1} A_{km} E_k{}^m(\varkappa) E_k{}^m(\mu) E_k{}^m(\nu) \frac{[\psi_k^m(\varkappa)]'}{\psi_k^m(\varkappa)}$$

---

[1] Решение может быть получено излагаемым ниже способом и для неплоского эллиптического в плане штампа.

[2] Теорию функций Ламе см. [4], гл. 23; [2], гл. 2, § 2, 8, 9; [1], гл. 5, § 8; [5], гл. 6, § 184—186.

Подставляя

$$[\psi_k^m(\varkappa)]' = -\frac{1}{[E_k^m(\varkappa)]^2\sqrt{(\varkappa^2-l^2)(\varkappa^2-1)}}, \qquad \frac{\partial n}{\partial \rho} = H_\rho = a\sqrt{\frac{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)}{(\rho^2-l^2)(\rho^2-1)}} \tag{4.7}$$

приведем (4.6) к виду

$$q(x, y, z) = \frac{1}{4\pi a\sqrt{(\varkappa^2-\mu^2)(\varkappa^2-\nu^2)}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{2k+1} A_{kl}\frac{E_k^m(\mu)E_k^m(\nu)}{E_k^m(\varkappa)\psi_k^m(\varkappa)} \tag{4.8}$$

Устремим $\varkappa$ к 1, тогда $z \to 0$ и эллипсоид $\rho = \varkappa$ вырождается в эллиптический диск на плоскости $z = 0$, полуоси которого равны a и $b = a\sqrt{1-l^2}$. При этом на поверхности эллиптического диска потенциал W принимает значение, равное

$$W(x, y, 0) = \sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{2k+1} A_{km}E_k^m(1)E_k^m(\mu)E_k^m(\nu) = 2\pi\Delta Q_n(x, y, 0) = 2\pi\Delta P_n(x, y) \tag{4.9}$$

Заметим, что

$$\sqrt{(1-\mu^2)(1-\nu^2)} = \sqrt{1-l^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \tag{4.10}$$

Устремляя теперь $\varkappa$ к 1 в выражении (4.8) и умножая получающийся результат на два, мы найдем плотность потенциала простого слоя, распределенного на эллиптическом диске:

$$q(x, y) = \frac{1}{2\pi b}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=1}^{2k+1} A_{km}\frac{E_k^m(1)E_k^m(\mu)E_k^m(\nu)}{[E_k^m(1)]^2\psi_k^m(1)} \tag{4.11}$$

Для частного случая

$$P_2(x, y) = \delta + \alpha x + \beta y - Ax^2 - By^2$$

из (4.11) и (4.9), используя теорию функций Ламе, можно получить

$$q(x, y) = \frac{\Delta}{b}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{K(l)}\left[\delta-\frac{1}{3}(Aa^2+Bb^2)\right]+\right. \tag{4.12}$$

$$+\frac{\alpha x l^2}{K(l)-E(l)}+\frac{\beta y l^2}{E(l)-(1-l^2)K(l)}-$$

$$\left.-\frac{a^2}{l^2\tau}\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^i[A\sigma_{3-i}-B(\sigma_{3-i}-l^2)]\,\sigma_i^2(\sigma_i-l^2)^2}{(\sigma_i-1)[E(l)-(1-\sigma_i)K(l)]}\left(\frac{x^2}{a^2\sigma_i}+\frac{y^2}{a^2(\sigma_i-l^2)}-1\right)\right\}$$

$$\left(\sigma_{1,2} = \frac{1+l^2}{3}\pm\tau;\ \tau = \frac{1}{3}\sqrt{1-l^2+l^4}\right)$$

Итак, формула (4.12) дает решение уравнения

$$\int_\Omega \frac{q(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} = 2\pi\Delta\delta(x, y)$$

к которому сводится задача о действии штампа на упругое полупространство, для случая, когда $\delta(x, y) = P_2(x, y)$ и Ω есть эллипс с полуосями a и b.

Переходим к решению задачи о действии плоского эллиптического штампа на упругий слой конечной толщины h. Для плоского штампа

$f(x, y) = 0$ и $\delta(x, y) = \delta + \alpha x + \beta y$. Поэтому, полагая $A = B = 0$ в формуле (4.12), получим решение уравнения (3.3):

$$q_0(x, y) = \frac{\Delta}{b}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{\delta}{K(l)} + \frac{\alpha x l^2}{K(l) - E(l)} + \frac{\beta y l^2}{E(l) - (1 - l^2) K(l)}\right] \quad (4.13)$$

Подставляя найденное выражение для q_0 в правую часть уравнения (3.4), приведем его к виду

$$\int\limits_{\Omega} \frac{q_1(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 2\pi\Delta\left(-\frac{2\Gamma_{00} a\delta}{K(l)}\right)$$

отсюда, используя (4.12) и полагая $A = B = \alpha = \beta = 0$, найдем

$$q_1(x, y) = -\frac{2\Gamma_{00}\, a\delta\Delta}{b\,[K(l)]^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.14)$$

Аналогично из уравнения (3.5) определим

$$q_2(x, y) = \frac{4\Gamma_{00}^2 a^2 \delta\Delta}{b\,[K(l)]^3}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.15)$$

Подставляя теперь выражения для q_0, q_1, q_2 в уравнение (3.6) и преобразуя, получим

$$\int\limits_{\Omega} \frac{q_3(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = 2\pi\Delta\,[\delta_3 + \alpha_3 x + \beta_3 y - A_3(x^2 + y^2)]$$

Здесь

$$\delta_3 = -\frac{2^3\Gamma_{00}^3 a^3 \delta}{[K(l)]^3} - \frac{2\Gamma_{10}\delta a}{3K(l)}(a^2 + b^2), \qquad \alpha_3 = \frac{4\Gamma_{10}\alpha l^2 a^3}{3[K(l) - E(l)]}$$

$$\beta_3 = \frac{4\Gamma_{10}\beta l^2 a b^2}{3\,[E(l) - (1 - l^2) K(l)]}, \qquad A_3 = \frac{2\Gamma_{10}\delta a}{K(l)}$$

Используя формулу (4.12), положив в ней $A = B$, найдем

$$q_3(x, y) = -\frac{2a^3\Delta}{b}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{2^2\Gamma_{00}^3\delta}{[K(l)]^4} + \frac{2\Gamma_{10}\delta(2 - l^2)}{3\,[K(l)]^2} - \frac{2\Gamma_{10}\alpha l^4}{3[K(l) - E(l)]^2}x - \right.$$
$$-\frac{2\Gamma_{10}\beta l^4(1 - l^2)}{3\,[E(l) - (1 - l^2)K(l)]^2}y + \frac{\Gamma_{10}\delta}{\tau K(l)}\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^i \sigma_i^2(\sigma_i - l^2)^2}{(\sigma_i - 1)[E(l) - (1 - \sigma_i) K(l)]} \times$$
$$\left.\times\left(\frac{x^2}{a^2\sigma_i} + \frac{y^2}{a^2(\sigma_i - l^2)} - 1\right)\right] \quad (4.16)$$

Аналогично из уравнения (3.7) определим

$$q_4(x, y) = \frac{4\Delta\delta\Gamma_{00} a^4}{b\,[K(l)]^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{4\Gamma_{00}^3}{[K(l)]^3} + \frac{4\Gamma_{10}(2 - l^2)}{3K(l)} + \right.$$
$$\left.+\frac{\Gamma_{10}}{\tau}\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^i\sigma_i^2(\sigma_i - l^2)^2}{(\sigma_i - 1)[E(l) - (1 - \sigma_i)K(l)]}\left(\frac{x^2}{a^2\sigma_i} + \frac{y^2}{a^2(\sigma_i - l^2)} - 1\right)\right] \text{ (и т. д.)} \quad (4.17)$$

Итак, найдены первые четыре члена ряда (3.2).

Полученное приближенное выражение для $q(x, y)$ будет иметь вид:

$$q(x, y) = \delta q_\delta(x, y) + \alpha q_\alpha(x, y) + \beta q_\beta(x, y)$$

где

$$q_\delta(x, y) = \frac{\Delta}{bK(l)}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} [R(h) + S(h, x^2, y^2)] \tag{4.18}$$

$$q_\alpha(x, y) = \frac{\Delta l^2 x}{b[K(l) - E(l)]}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} T_\alpha(h) \tag{4.19}$$

$$q_\beta(x, y) = \frac{\Delta l^2 y}{b[E(l) - (1 - l^2)K(l)]}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} T_\beta(h) \tag{4.20}$$

$$R(h) = 1 - \frac{2\Gamma_{00}a}{hK(l)} + \left(\frac{2\Gamma_{00}a}{hK(l)}\right)^2 - \left(\frac{2\Gamma_{00}a}{hK(l)}\right)^3 + \left(\frac{2\Gamma_{00}a}{hK(l)}\right)^4 - \\ - \frac{2^2 a^3 \Gamma_{10}(2 - l^2)}{3h^3 K(l)}\left[1 - \frac{2^2\Gamma_{00}a}{hK(l)}\right] + O\left(\frac{1}{h^4}\right) \tag{4.21}$$

$$S(h, x^2, y^2) = -\frac{2a^3\Gamma_{10}}{h^3\tau}\sum_{i=1}^{2}\frac{(-1)^i\sigma_i^2(\sigma_i - l^2)^2}{(\sigma_i - 1)[E(l) - (1 - \sigma_i)K(l)]}\left(\frac{x^2}{a^2\sigma_i} + \right. \\ \left. + \frac{y^2}{a^2(\sigma_i - l^2)} - 1\right)\left[1 - \frac{2a\Gamma_{00}}{hK(l)}\right] + O\left(\frac{1}{h^4}\right)$$

$$\begin{aligned} T_\alpha(h) &= 1 + \frac{4a^3\Gamma_{10}l^2}{3h^3[K(l) - E(l)]} + O\left(\frac{1}{h^4}\right) \\ T_\beta(h) &= 1 + \frac{4a^3\Gamma_{10}l^2(1 - l^2)}{3h^3[E(l) - (1 - l^2)K(l)]} + O\left(\frac{1}{h^4}\right) \end{aligned} \tag{4.22}$$

Определим зависимости между P и δ, M_y и α, M_x и β по формулам (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{P}{\delta} &= \int_\Omega q_\delta(x, y)\,dxdy = \frac{2\pi a\Delta}{K(l)} R(h) \\ \frac{M_y}{\alpha} &= \int_\Omega x q_\alpha(x, y)\,dxdy = \frac{2\pi a^3 l^2 \Delta}{3[K(l) - E(l)]} T_\alpha(h) \\ \frac{M_x}{\beta} &= \int_\Omega y q_\beta(x, y)\,dxdy = \frac{2\pi a^3 l^2(1 - l^2)\Delta}{3[E(l) - (1 - l^2)K(l)]} T_\beta(h) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Перепишем теперь формулы (3.10), подставляя в них q_δ, q_α и q_β из (4.18)—(4.19):

$$\begin{aligned} P &= \frac{\Delta}{bK(l)}\int_\Omega [R(h) + S(h, x^2, y^2)]\,\delta(x, y)\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dxdy \\ M_y &= \frac{\Delta l^2}{b[K(l) - E(l)]} T_\alpha(h)\int_\Omega x\delta(x, y)\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dxdy \\ M_x &= \frac{\Delta l^2}{b[E(l) - (1 - l^2)K(l)]} T_\beta(h)\int_\Omega y\delta(x, y)\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^{-\frac{1}{2}} dxdy \end{aligned} \tag{4.24}$$

Формулы (4.24) позволяют определить величину силы и моментов действующих на любой неплоский, эллиптический в плане штамп. При $h = \infty$ имеем $R = T_\alpha = T_\beta = 1$, $S = 0$ и формулы (4.24) переходят в известные формулы, полученные Л. А. Галиным (см. [2], гл. 2, § 9).

§ 5. Получение расчетных формул. Представим $q(x, y)$ в виде

$$q(x, y) = \Delta\left(a^2 - x^2 - \frac{1}{1-l^2}y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left\{\delta\left(A + B\frac{a}{h} + C\frac{a^2}{h^2} + D\frac{a^3}{h^3} + E\frac{ax^2}{h^3} + F\frac{ay^2}{h^3} + G\frac{a^4}{h^4} + H\frac{a^2x^2}{h^4} + I\frac{a^2y^2}{h^4}\right) + \alpha x\left(K + L\frac{a^3}{h^3}\right) + \beta y\left(M + N\frac{a^3}{h^3}\right) + O\left(\frac{1}{h^4}\right)\right\} \tag{5.1}$$

при этом

$$\frac{R(h) + S(h, x^2, y^2)}{\sqrt{1-l^2}\,K(l)} = A + B\frac{a}{h} + C\frac{a^2}{h^2} + D\frac{a^3}{h^3} + E\frac{ax^2}{h^3} + F\frac{ay^2}{h^3} + G\frac{a^4}{h^4} + H\frac{a^2x^2}{h^4} + I\frac{a^2y^2}{h^4} \tag{5.2}$$

$$\frac{R(h)}{\sqrt{1-l^2}\,K(l)} = A + B\frac{a}{h} + C\frac{a^2}{h^2} + D\frac{a^3}{h^3} + G\frac{a^4}{h^4} + E\frac{a^3}{3h^2} + F\frac{a^3(1-l^2)}{3h^3} + H\frac{a^4}{3h^4} + I\frac{a^4(1-l^2)}{3h^4} \tag{5.3}$$

$$\frac{l^2T_\alpha(h)}{\sqrt{1-l^2}\,[K(l) - E(l)]} = K + L\frac{a^3}{h^3}, \quad \frac{l^2T_\beta(h)}{\sqrt{1-l^2}\,[E(l) - (1-l^2)K(l)]} = M + N\frac{a^3}{h^3} \tag{5.4}$$

Здесь коэффициенты $A, B, \ldots, N$ зависят только от эксцентриситета l эллиптической области контакта.

В таблице даны числовые значения этих коэффициентов для различных эксцентриситетов l в пределах $0 \leqslant l^2 \leqslant 0.99$. Для промежуточных значений эксцентриситетов l значения коэффициентов могут быть получены интерполяцией. После того как определены коэффициенты для заданного значения l, вычисление напряжений $q(x, y)$ по формуле (5.1) для различных значений x и y в пределах $-a \leqslant x \leqslant a$, $-b \leqslant y \leqslant b$ не представляет труда.

В последнем столбце таблицы даны наименьшие значения отношения h/a, для которых еще имеет смысл формула (5.1). Эти наименьшие значения определяются для случая $\alpha = \beta = 0$ следующим образом. Введем обозначение

$$q^n(x, y) = q_0(x, y) + \frac{q_1(x, y)}{h} + \ldots + \frac{q_n(x, y)}{h^n} \tag{5.5}$$

и определим величины

$$\lambda_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{|q^4(0, 0) - q^3(0, 0)|}{q^3(0, 0)}100\% = \frac{G\left|\frac{a^4}{h^4}\right|100\%}{A + B\frac{a}{h} + C\frac{a^2}{h^2} + D\frac{a^3}{h^3}} \tag{5.6}$$

$$\lambda_{\substack{x=0\\y=b}} = \lim_{y\to b}\frac{|q^4(0, y) - q^3(0, y)|}{q^3(0, y)}100\% = \frac{\frac{a^4}{h^4}\,|G + (1-l^2)I|\,100\%}{A + B\frac{a}{h} + C\frac{a^2}{h^2} + D\frac{a^3}{h^3} + F\frac{a^3(1-l^2)}{h^3}} \tag{5.7}$$

$$\lambda_{\substack{x=a\\y=0}} = \lim_{x\to a}\frac{|q^4(x, 0) - q^3(x, 0)|}{q^3(x, 0)}100\% = \frac{\frac{a^4}{h^4}\,|G + H|\,100\%}{A + B\frac{a}{h} + C\frac{a^2}{h^2} + D\frac{a^3}{h^3} + E\frac{a^3}{h^3}} \tag{5.8}$$

Легко видеть из таблицы, что

$$\lambda_{\substack{x=a\\y=0}} \geqslant \lambda_{\substack{x=0\\y=b}}, \qquad \lambda_{\substack{x=a\\y=0}} > \lambda_{\substack{x=0\\y=0}} \tag{5.9}$$

Таблица

l^2	$\frac{1}{1-l^2}$	$\sqrt{1-l^2}$	A	B	C	D	E	F
0	1.0	1.0	0.6366	0.4732	0.3517	0.4751	—0.6410	—0.6410
0.1	1.1111	0.9487	0.6537	0.4734	0.3428	0.4508	—0.6246	—0.6583
0.2	1.25	0.8944	0.6737	0.4739	0.3334	0.4254	—0.6072	—0.6788
0.3	1.4286	0.8367	0.6974	0.4751	0.3237	0.3985	—0.5888	—0.7034
0.4	1.6667	0.7746	0.7263	0.4771	0.3134	0.3700	—0.5691	—0.7339
0.5	2.0	0.7071	0.7628	0.4803	0.3025	0.3393	—0.5479	—0.7728
0.6	2.5	0.6325	0.8110	0.4857	0.2909	0.3057	—0.5249	—0.8250
0.7	3.3333	0.5477	0.8797	0.4949	0.2784	0.2680	—0.4997	—0.9004
0.8	5.0	0.4472	0.9906	0.5124	0.2651	0.2239	—0.4720	—1.0236
0.85	6.6667	0.3873	1.0808	0.5282	0.2582	0.1978	—0.4576	—1.1248
0.9	10.0	0.3162	1.2266	0.5555	0.2516	0.1669	—0.4438	—1.2895
0.95	20.0	0.2236	1.5377	0.6173	0.2478	0.1261	—0.4367	—1.6429
0.99	100.0	0.1	2.7059	0.8549	0.2701	0.06478	—0.4934	—2.9772

l^2	G	H	I	K	L	M	N	$\frac{h}{a}$
0	0.1943	—0.4765	—0.4765	1.2732	0.4273	1.2732	0.4273	1.52
0.1	0.1794	—0.4523	—0.4767	1.2905	0.4164	1.3249	0.3951	1.50
0.2	0.1638	—0.4272	—0.4776	1.3108	0.4051	1.3860	0.3623	1.48
0.3	0.1473	—0.4011	—0.4792	1.3353	0.3932	1.4597	0.3290	1.46
0.4	0.1298	—0.3738	—0.4821	1.3657	0.3808	1.5513	0.2948	1.44
0.5	0.1112	—0.3450	—0.4867	1.4046	0.3677	1.6693	0.2597	1.41
0.6	0.09112	—0.3143	—0.4941	1.4570	0.3539	1.8293	0.2232	1.38
0.7	0.06905	—0.2811	—0.5065	1.5330	0.3393	2.0644	0.1846	1.34
0.8	0.04400	—0.2442	—0.5295	1.6583	0.3242	2.4604	0.1427	1.29
0.85	0.02965	—0.2236	—0.5497	1.7619	0.3169	2.7956	0.1197	1.26
0.9	0.01311	—0.2010	—0.5840	1.9317	0.3111	3.3603	0.09412	1.22
0.95	—0.008116	—0.1753	—0.6596	2.2992	0.3116	4.6429	0.06353	1.16
0.99	—0.04112	—0.1559	—0.9406	3.6945	0.3598	10.1120	0.02695	1.04

Теперь наименьшее допустимое значение отношения h/a определим из условия

$$\lambda_{\substack{x=a\\y=0}} \leqslant 5\% \tag{5.10}$$

т. е. таким образом, чтобы переход от $q^3(x, y)$ к $q^4(x, y)$ изменял величину $q^3(x, y)$ не более чем на 5% при всех $(x, y) \in \Omega$.

Поступила 10 XII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, 1955.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. ГИТТЛ, 1953.
3. Моссаковский В. И. К вопросу об оценке перемещений в пространственных контактных задачах. ПММ, 1951, т. XV, вып. 5.
4. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. II. ГТТИ, 1934.
5. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. III, ч. 2. ГИТТЛ, 1957.