Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ДВУХ КЛАССАХ ПЛОСКИХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ РАКЕТЫ В ПУСТОТЕ

Ю. А. Горелов

(Москва)

Рассматриваются условия, выполнение которых обеспечит экстремальное по времени и расходу массы движение ракеты по криволинейной траектории.

Ракета считается идеально управляемым телом, т. е. она может мгновенно занять нужную угловую ориентировку в пространстве, повернувшись относительно своей продольной или поперечной оси, проходящей через центр тяжести. Это предположение позволяет сформулировать задачу, опираясь лишь на силовые уравнения движения, считая уравнение моментов всегда удовлетворяющимся.

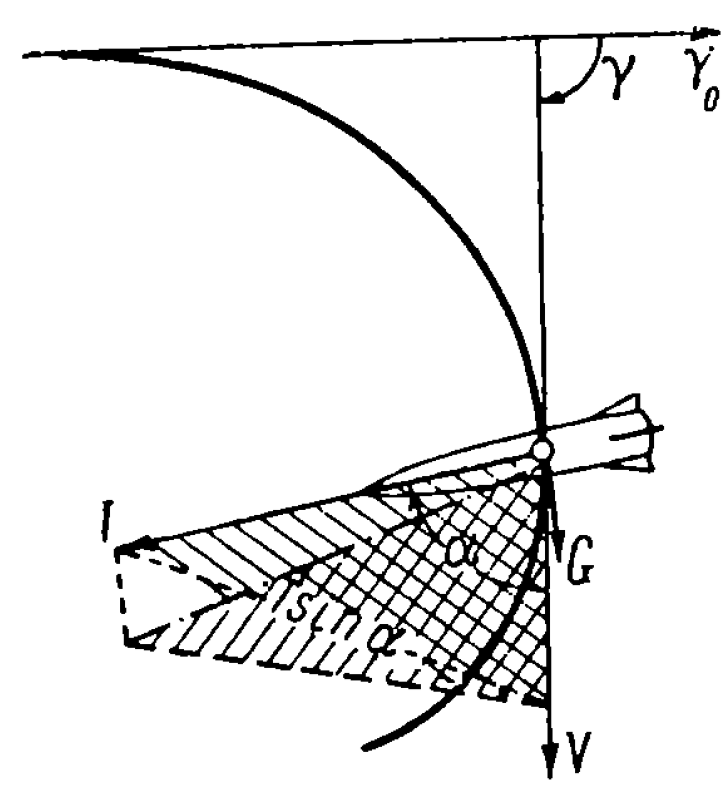
Движение рассматривается на активном участке траектории, т. е. масса ракеты считается переменной по времени.

В рамках указанных предположений ставится вариационная задача для опредеделения характеристик экстремальных по времени разворотов ракеты на заданный угол при заданных начальных и конечных скоростях движения, начальном и конечном весе ракеты. Решение задачи ищется для плоских движений отдельно в горизонтальной и вертикальной плоскостях в предположении отсутствия влияния аэродинамических сил.

§ 1. Если траектория движения ракеты, выполняющей координированный разворот, расположена строго в горизонтальной плоскости, то, проектируя силы на направления касательной и нормали (фиг. 1), имеем два основных уравнения:

$$m\frac{dV}{dt} = T\cos\alpha \qquad (1.1)$$

$$mV\frac{d\gamma}{dt} = \sqrt{T^2\sin^2\alpha - (mg)^2} \qquad (1.2)$$



Фиг. 1

Здесь T — тяга ракетного двигателя, α — угол атаки (угол между направлением продольной оси корпуса и касательной к траектории), γ — угол разворота траектории, отсчитываемый от начального положения. Считая массу ракеты m переменной величиной, запишем уравнение расхода массы в виде

$$-\frac{dm}{dt} = Tq \qquad (1.3)$$

где q — секундный расход массы на единицу тяги.

Уравнения (1.1), (1.2) и (1.3) содержат шесть переменных величин: $m, T, t, \alpha, \gamma, V$.

Из уравнений (1.1) и (1.3) имеем

$$-m\frac{dV}{dm} = \frac{\cos\alpha}{q}$$

Введем, как обычно, другую переменную $\varphi = q^{-1} \ln m$; тогда получим

$$\frac{dV}{d\varphi} + \cos\alpha = 0 \tag{1.4}$$

Заменим в уравнении (1.2) переменные T и α из (1.3) и (1.4):

$$(mV)^2 \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = \frac{1}{q^2}\left(\frac{dm}{dt}\right)^2 \left[1 - \left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2\right] - (mg)^2$$

или

$$\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 \left[\left(\frac{d\varphi}{d\gamma}\right)^2 - V^2 - \left(\frac{dV}{d\gamma}\right)^2\right] = g^2 \tag{1.5}$$

Уравнение (1.5) позволяет, приняв величину γ за основную независимую переменную, получить выражение для времени разворота:

$$\tau = \pm \frac{1}{g} \int\limits_{\gamma_0}^{\gamma_k} F(V, V', \varphi')\, d\gamma \qquad \left(F = \sqrt{\varphi'^2 - V^2 - V'^2}\,\right) \tag{1.6}$$

где штрихами обозначены полные производные искомых функций по γ; при этом знак плюс соответствует движениям, при которых происходит монотонное увеличение угла разворота со временем, а знак минус — его уменьшение. Так как изменение массы ракеты согласно уравнению расхода массы (1.3) однозначно связано с тягой, а скорость движения по траектории — с углом атаки (1.4), то одновременным определением экстремальных зависимостей скорости и массы ракеты будут найдены законы изменения тяги и угла атаки в процессе разворота. Таким образом, нахождение необходимых условий, обеспечивающих экстремальное по времени движение ракеты по криволинейным траекториям, сведено к составлению уравнений Эйлера для функции $F(V, V', \varphi')$ а задача определения самого времени разворота — к нахождению экстремума функционала (1.6) при обычных граничных условиях для функций V и φ, т. е.

$$V = V_0, \quad \varphi = \varphi_0, \quad \text{при } \gamma = \gamma_0, \qquad V = V_k, \quad \varphi = \varphi_k \quad \text{при } \gamma = \gamma_k$$

§ 2. Необходимым условием существования экстремума функционала (1.6) является выполнение уравнений Эйлера для функции F:

$$\frac{d}{d\gamma}\frac{\partial F}{\partial \varphi'} = 0, \qquad \frac{d}{d\gamma}\frac{\partial F}{\partial V'} - \frac{\partial F}{\partial V} = 0 \tag{2.1}$$

Подставляя выражения производных F в (2.1), получим два уравнения второго порядка, которые после некоторых преобразований удается привести к форме следующего вида:

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{VV' + V'V''}{V^2 + V'^2}, \qquad \frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{V'' - V}{V'} \tag{2.2}$$

Найдем решения этих уравнений.

Приравнивая правые части уравнений (2.2), получим дифференциальное уравнение

$$V''V - 2V'^2 - V^2 = 0 \tag{2.3}$$

Понижая его порядок соответствующей заменой переменных и интегрируя образующееся линейное уравнение, получим первый интеграл в виде

$$V' = \pm V \sqrt{C_1^2 V^2 - 1} \tag{2.4}$$

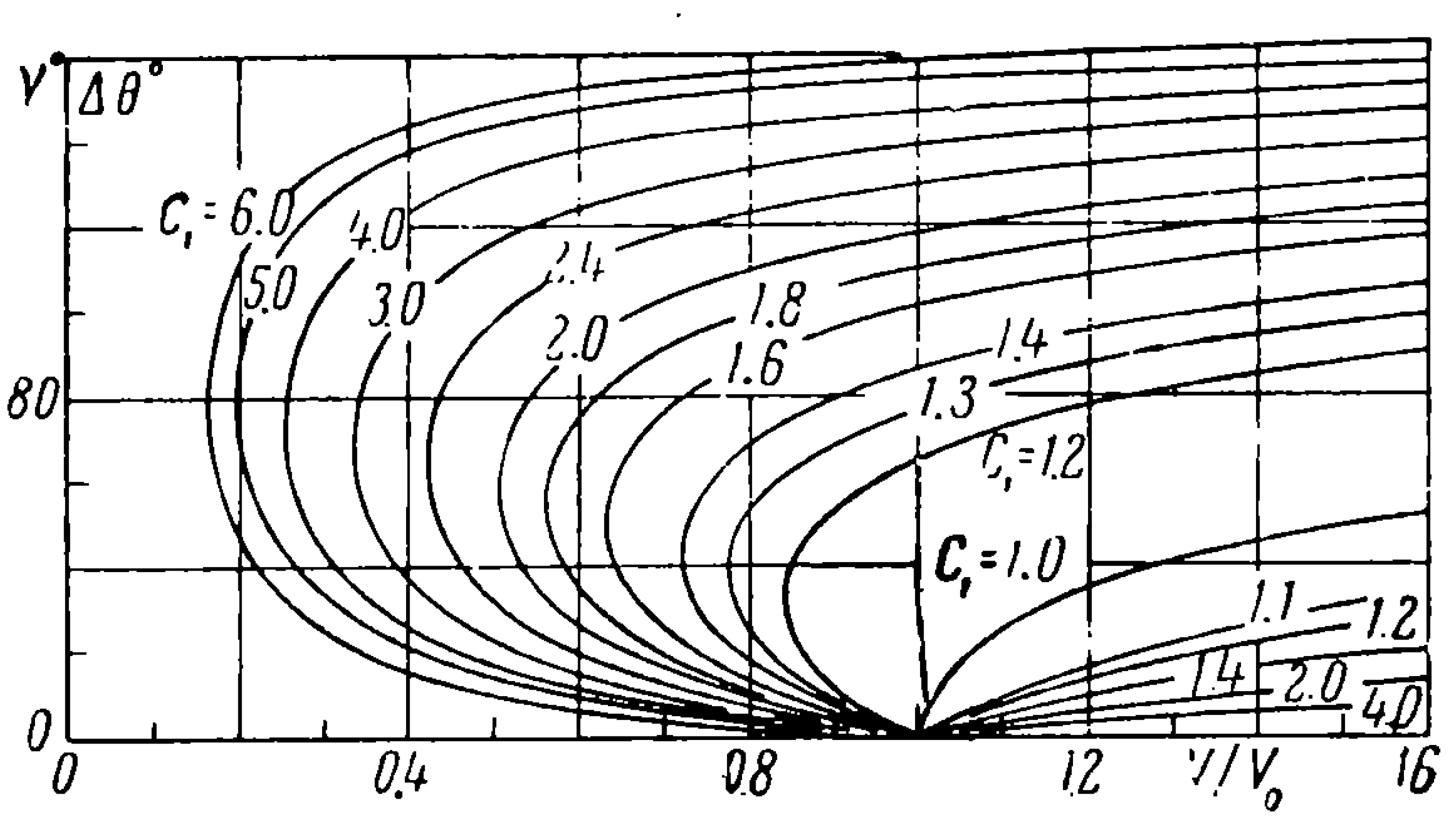
а, следовательно, и окончательную зависимость для скорости полета по углу разворота траектории

$$\Delta\gamma = \gamma_k - \gamma_0 = \pm\left[\operatorname{arc\,sec}\left(\frac{V}{V_0}C_1\right) - \operatorname{arc\,sec}C_1\right] = \pm\left[\operatorname{arc\,sec}\left(\frac{V}{V_0}C_1\right) - \gamma^*\right] \qquad (2.5)$$

Так как в горизонтальной плоскости все начальные значения γ_0 равнозначны, можно, включив γ_0 в γ^*, считать $\Delta\gamma = \gamma_k = \gamma$. Семейство экстремальных кривых $V/V_0 = f(\gamma)$ получим в виде

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{C_1\cos(\gamma - \gamma^*)} \qquad (2.6)$$

Оно зависит от двух параметров C_1 и γ^*, значения которых определяются по заданным граничным условиям V_0 и V_k. В приведенных на фиг. 2 зависимостях изменения относительных скоростей один из параметров (γ^*) уже исключен использованием условия $V/V_0 = 1$ при $\gamma = \gamma_0$. Таким образом, по заданному значению относительной конечной скорости остается определить второй параметр C_1. Величину C_1 легко определять по заданным величинам $\Delta\gamma$ и V_k/V_0 — относительному значению конечной скорости (фиг. 2).



Фиг. 2

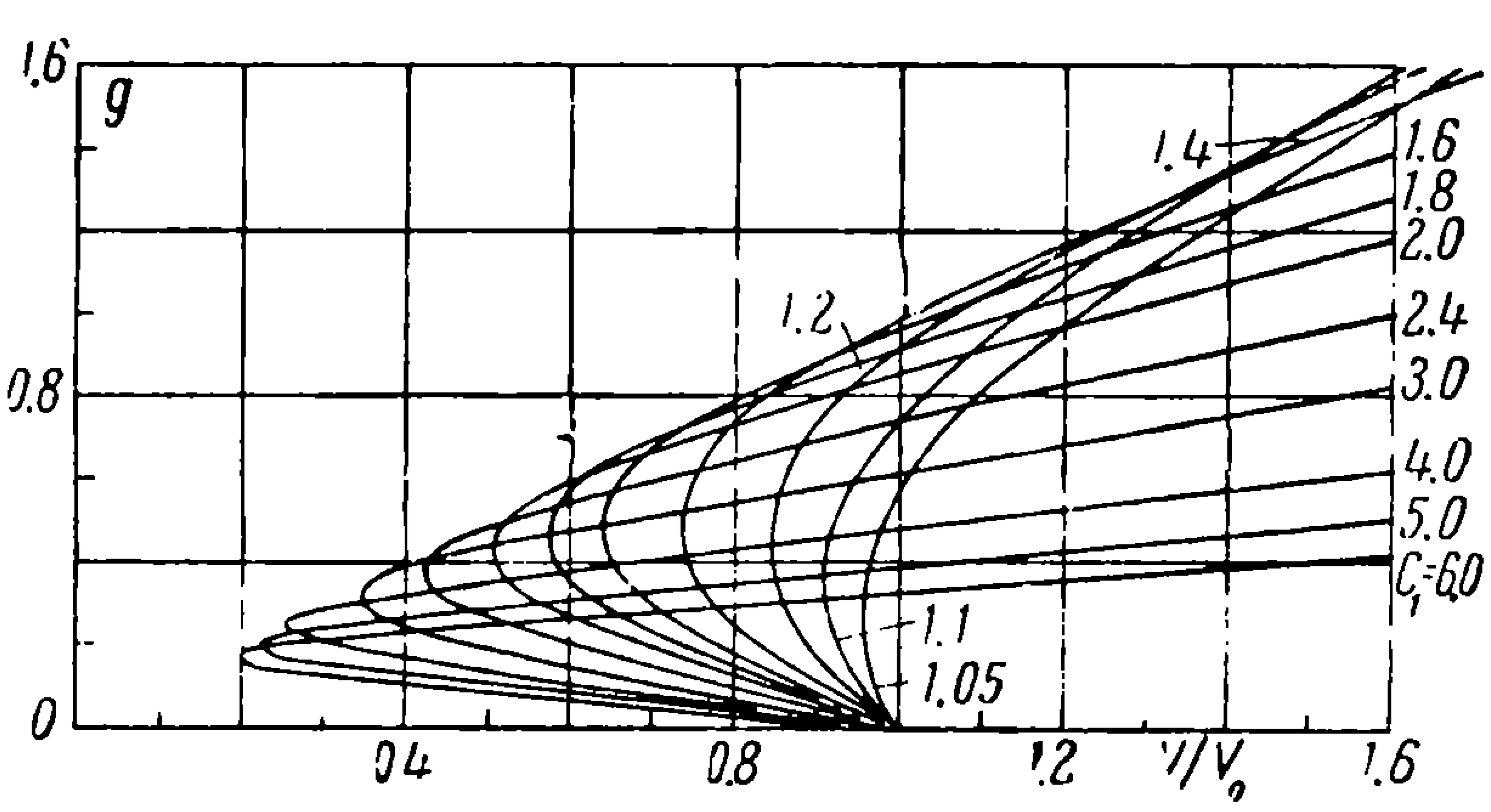
Используя найденную зависимость $V/V_0 = f(\gamma, C_1)$, интегрированием одного из уравнений (2.2) определим изменение массы или веса ракеты в процессе разворота:

$$\frac{G}{G_0} = \exp\left\{C_2 q g\left(\frac{V}{V_0}; C_1\right)\right\} \qquad (2.7)$$

где весовая функция

$$g = \frac{1}{C_1^2}\left(\sqrt{C_1^2\left(\frac{V}{V_0}\right)^2 - 1} - \sqrt{C_1^2 - 1}\right) \qquad (2.8)$$

представленная на фиг. 3, определена из условия $G/G_0 = 1$ при $\gamma = \gamma_0$. Вторая константа C_2 определяется из второго граничного условия по значению относительного веса в конце разворота.



Фиг. 3

Время выполнения экстремального разворота на заданный угол получаем подстановкой в функционал (1.6) зависимостей (2.6) и (2.7):

$$\tau = \frac{V_0}{g}\sqrt{C_2^2 - C_1^2}\, g\left(\frac{V}{V_0}, C_1\right) \qquad (2.9)$$

§ 3. Рассмотрим криволинейное движение ракеты в вертикальной плоскости. Исходные уравнения в проекциях на направления касательной и нормали к траектории полета совместно с уравнением расхода массы имеют вид:

$$m\frac{dV}{dt} = T\cos\alpha - mg\sin\theta,\quad mV\frac{d\theta}{dt} = T\sin\alpha - mg\cos\theta,\quad -\frac{dm}{dt} = Tq \tag{3.1}$$

Проведем преобразования, аналогичные выполненным в § 1. Возводя в квадрат уравнения (3.1), складывая их и группируя члены при одинаковых степенях производной $d\theta/dt$, получим квадратный трехчлен

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left\{\left(\frac{dV}{d\theta}\right)^2 - \left(\frac{d\varphi}{d\theta}\right)^2 + V^2\right\} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)2g\left\{\sin\theta\left(\frac{dV}{d\theta}\right) + \cos\theta V\right\} + g^2 = 0$$

решение которого относительно производной $d\theta/dt$ после устранения иррациональности в знаменателе позволяет записать функционал для времени разворота в следующей форме:

$$\tau = \frac{1}{g}\int\limits_{\theta_0}^{\theta_k} H(V, V', \varphi', \theta)\,d\theta \tag{3.2}$$

где

$$H = (V\cos\theta + V'\sin\theta) \pm \sqrt{(V\cos\theta + V'\sin\theta)^2 + [\varphi'^2 - V^2 - V'^2]}$$

Выражение (3.2) является, как показано в § 1, принципиальной записью той же вариационной задачи для траектории криволинейного движения, только расположенной в вертикальной плоскости. Структура функции H, по сравнению с F, усложнена наличием в ней тригонометрических функций независимого переменного. В то же время в функции H целиком присутствует трехчлен $\varphi'^2 - V^2 - V'^2$, образующий функцию F. Этим предопределяется наличие в окончательных результатах решений, имевших место при рассмотрении горизонтальных движений. Так, разделив переменные V и φ из уравнений Эйлера для функции H, получим тождество, в которое входит левая часть уравнения (2.3), определявшего экстремальный закон изменения скорости по углу разворота в горизонтальной плоскости. Следсвательно, решения этого уравнения, удовлетворяя уравнениям Эйлера, и в данном случае выделят частный класс экстремальных зависимостей $V = f(\theta)$, которые по аналогии с (2.6) запишем в виде

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{C_1\cos(\theta - \theta^*)} \tag{3.3}$$

где в значении θ^* содержится, как и в γ^*, величина начального угла разворота θ_0, что следует иметь в виду при определении параметра θ^* из условия $V/V_0 = 1$ при $\theta = \theta_0$. Кроме того, так как выражение для функции H опять в явном виде не содержит переменной φ, уравнения Эйлера будут иметь вид (2.1). Первое из них после вычисления производных от функции H позволяет получить первый интеграл:

$$\varphi' = C_3(V\sin\theta - V'\cos\theta) \tag{3.4}$$

Подставляя (3.3) в (3.4) и интегрируя по углу разворота, найдем изменение массы или веса ракеты:

$$\frac{G}{G_0} = \exp\{C_3 q V_0 g_{(\theta,\,\theta_0,\,\theta^*,\,C_1)}\} \tag{3.5}$$

где весовая функция

$$g_{(\theta,\,\theta_0,\,\theta^*,\,C_1)} = \frac{\sin\theta^*}{C_1}[\mathrm{tg}(\theta - \theta^*) - \mathrm{tg}(\theta_0 - \theta^*)] \tag{3.6}$$

Время выполнения экстремального разворота на угол $\Delta\theta = \theta_k - \theta_0$ можно определить по формуле

$$\tau = \frac{V_0}{g}\left(\cos\theta^* \pm \sin\theta^* \sqrt{C_3^2 - 1}\right) g_{(\theta,\ \theta_0,\ \theta^*,\ C_1)} \tag{3.7}$$

Таким образом, последовательным определением констант C_1 и C_2 или C_1 и C_3 по четырем граничным условиям V_0, V_k и G_0, G_k можно поставить в соответствие с любой произвольной траекторией (расположенной в одной из рассмотренных плоскостей) экстремальную траекторию с такими же граничными условиями. Выполняя расчеты, легко убедиться, что экстремальные зависимости для углов атаки и программирования тяги реализуют максимум функционалов [(1.6) и (3.2)], т. е. выделяют траектории с наибольшей продолжительностью активного полета.

§ 4. Укажем наиболее общие особенности, характеризующие данный класс экстремальных движений.

Отношение тяги к весу ракеты в процессе движения по экстремальной траектории постоянно.

Этот результат является общим для движения в горизонтальной и вертикальной плоскостях. Он может быть получен подстановкой экстремальных зависимостей (2.7) и (2.9) или (3.3) и (3.4), взятых в дифференциальной форме, в исходное уравнение расхода массы (1.3).

Для движения в горизонтальной плоскости

$$T^\circ = \frac{T}{mg} = -\frac{1}{g}\frac{d\varphi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{dt} = \frac{-C_2}{V_0\sqrt{C_2^2 - C_1^2}} = \mathrm{const} \tag{4.1}$$

Для движения в вертикальной плоскости (4.2)

$$T^\circ = \frac{-1}{g}\frac{d\varphi}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{C_3}{\dfrac{(V\cos\theta + V'\sin\theta)}{(V\sin\theta - V'\cos\theta)} \pm \sqrt{C_3^2 - 1}} = \frac{C_3}{\operatorname{ctg}\theta^* \pm \sqrt{C_3^2 - 1}} = \mathrm{const}$$

Условие $T^\circ = \mathrm{const}$ характеризует в данной задаче класс движений тела переменной массы, когда действующая реактивная сила изменяется строго пропорционально изменению массы тела. Таким образом, программирование тяги как бы связано с изменением веса ракеты. Траектория движения и все его характеристики при выполнении этого условия становятся такими же, как при движении тела постоянной массы с постоянной реактивной силой. Угловая ориентировка ракеты в пространстве при движении по экстремальной траектории не меняется:

$$\frac{d\alpha}{d\gamma} \approx \frac{d\alpha}{d\theta_1} = -1 \tag{4.3}$$

Для движений в вертикальной плоскости эта особенность точно характеризуется законом изменения углов атаки; для движений в горизонтальной плоскости знак приближенного равенства объясняется расположением углов α и γ в разных плоскостях.

Неизменность угловой ориентировки ракеты в процессе движения по экстремальным траекториям вытекает из закона изменения углов атаки по углу разворота θ или γ. Представим первые уравнения (3.1) так:

$$T^\circ\cos\alpha - \sin\theta = \frac{1}{g}V'\frac{d\theta}{dt}, \qquad T^\circ\sin\alpha - \cos\theta = \frac{1}{g}V\frac{d\theta}{dt} \tag{4.4}$$

Используя экстремальные зависимости

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-gC_1\cos^2(\theta-\theta^*)}{\{\cos\theta^* \pm \sin\theta^* \sqrt{C_3^2-1}\}}, \qquad V = \frac{1}{C_1\cos(\theta-\theta^*)}$$

получим из (5.3)

$$(T^\circ\cos\alpha - \sin\theta)^2 + (T^\circ\sin\alpha - \cos\theta)^2 = \{\cos\theta^* \pm \sin\theta^* \sqrt{C_3^2-1}\}^{-2}$$

или

$$1 + T^{\circ 2} - \{\cos\theta^* \pm \sin\theta^* \sqrt{C_3^2-1}\}^{-2} = 2T^\circ \sin(\alpha+\theta) \tag{4.5}$$

Так как при движении по экстремали $T^\circ = \mathrm{const}$, из (4.5) следует, что $(\alpha+\theta) = \mathrm{const}$ или $d\alpha/d\theta = -1$.

При рассмотрении экстремальных по времени движений в горизонтальной плоскости путем аналогичных преобразований получим следующую связь между углом атаки и углом разворота:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{T^{\circ 2}-1}}{T^\circ}\sin(\gamma-\gamma^*) \quad \text{или} \quad \frac{d\alpha}{d\gamma} = -\frac{\sqrt{T^{\circ 2}\sin^2\alpha - 1}}{T^\circ\sin\alpha} \tag{4.6}$$

Из уравнения (4.6) видно, что при больших значениях T°, практически уже при $T^\circ > 4$, величина $d\alpha/d\gamma \approx -1.0$. Так как угол атаки образуется между направлением продольной оси ракеты и направлением, касательной к траектории, то при изменении угла разворота происходит одновременное изменение угла атаки так, что увеличение угла разворота приводит к уменьшению угла атаки на ту же величину. Следовательно, выполнение условия $d\alpha/d\theta = -1$ соответствует сохранению угловой ориентировки ракеты в пространстве постоянной относительно неподвижного наблюдателя. Экстремали, найденные для времени движения, обеспечивают одновременно минимальный расход топлива.

Разрешим исходное дифференциальное уравнение (1.5) относительно производной $d\varphi/d\gamma$ и образуем новый функционал, выражающий изменение массы или веса ракеты при развороте на заданный угол $\Delta\gamma = \gamma_k - \gamma_0$. Из (1.5) следует, что

$$\varphi'^2 = \tau'^2 + V^2 + V'^2 \qquad \left(\tau' = \frac{1}{g}\frac{dt}{d\gamma}\right)$$

так как $\varphi = \dfrac{1}{q}\ln m$, $\varphi_k - \varphi_0 = \dfrac{1}{q}\ln\dfrac{G_k}{G_0}$, то

$$\frac{G_k}{G_0} = \exp\left\{-q\int_{\gamma_0}^{\gamma_k}\sqrt{\tau'^2 + V^2 + V'^2}\,d\gamma\right\} \tag{4.7}$$

Таким образом, задача об отыскании условий, обеспечивающих наименьшие расходы топлива при криволинейном развороте ракеты на заданный угол, сводится к определению экстремалей функционала (4.7). Нетрудно проверить, что экстремальные закономерности изменения скорости и массы по углу разворота, а следовательно, углов атаки и тяги получатся при этом такими же, как и найденные в задаче об экстремальном времени движения.

Поступила 6 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Охоцимский Д. Е. К теории движения ракет. ПММ, 1946, т. X, вып. 2.