Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

Ю. А. Архангельский

(Москва)

1. Как известно, уравнения движения тяжелого твердого тела, закрепленного в одной точке, с произвольным эллипсоидом инерции, построенным для неподвижной точки, и с центром тяжести, лежащим в главной плоскости инерции xy, имеют вид:

$$A\frac{dp}{dt}+(C-B)qr=Mgy_0\gamma'', \qquad \frac{d\gamma}{dt}=r\gamma'-q\gamma''$$
$$B\frac{dq}{dt}+(A-C)pr=-Mgx_0\gamma'', \qquad \frac{d\gamma'}{dt}=p\gamma''-r\gamma \tag{1.1}$$
$$C\frac{dr}{dt}+(B-A)pq=Mg(x_0\gamma'-y_0\gamma). \qquad \frac{d\gamma''}{dt}=q\gamma-p\gamma'$$

Чтобы во все время движения выполнялись условия

$$p=q=\gamma''=0 \tag{1.2}$$

т. е. чтобы твердое тело двигалось как физический маятник, величины r, γ, γ', как это следует из системы (1.1), должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{dr}{dt}=\frac{Mg}{C}(x_0\gamma'-y_0\gamma), \qquad \frac{d\gamma}{dt}=r\gamma', \qquad \frac{d\gamma'}{dt}=-r\gamma \tag{1.3}$$

Подстановки $r=\dot\varphi$, $\gamma=\sin\varphi$, $\gamma'=\cos\varphi$ приводят уравнения (1.3) к одному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}-R^2\cos(\varphi+\varphi_0)=0 \qquad \left(R^2=\frac{Mg}{C}\sqrt{x_0^2+y_0^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi_0=\frac{y_0}{x_0}\right) \tag{1.4}$$

Решение этого уравнения можно выразить через эллиптические функции Якоби [1] периода $\omega=4K/R$, при этом для r, γ, γ' получаются следующие выражения:

$$r_1=2Rk\operatorname{cn}(Rt) \qquad (k=\sin{}^1/_2\,\psi_0) \tag{1.5}$$
$$\gamma_1=\cos\varphi_0+2k\sin\varphi_0\operatorname{sn}(Rt)\operatorname{dn}(Rt)-2k^2\cos\varphi_0\operatorname{sn}^2(Rt)$$
$$\gamma_1'=\sin\varphi_0-2k\cos\varphi_0\operatorname{sn}(Rt)\operatorname{dn}(Rt)-2k^2\sin\varphi_0\operatorname{sn}^2(Rt)$$

Здесь k — модуль соответствующего эллиптического интеграла, ψ_0 — максимальный угол отклонения центра тяжести твердого тела от положения устойчивого равновесия, а величина K, входящая в выражение периода этих функций, является полным эллиптическим интегралом первого рода, соответствующим данному k.

Рассмотрим устойчивость в первом приближении движения, определяемого соотношениями (1.2) и (1.5), при условии, что параметр k принимает достаточно малые значения, причем исследуем сначала случай, когда $x_0 \leqslant y_0$.

2. Обозначая вариации переменных для возмущенного движения через ξ, η, ζ, u, v, w, получим, что

$$p = \xi, \qquad q = \eta, \qquad r = r_1 + u, \qquad \gamma = \gamma_1 + v, \qquad \gamma' = \gamma_1' + w, \qquad \gamma'' = \zeta \tag{2.1}$$

и уравнения в вариациях Пуанкаре запишутся так:

$$\frac{d\xi}{dt} = a_0 r_1 \eta + y_0'\zeta, \qquad \frac{d\eta}{dt} = -b_0 r_1 \xi - x_0'\zeta, \qquad \frac{d\zeta}{dt} = \gamma_1 \eta - \gamma_1'\xi \tag{2.2}$$

$$\frac{du}{dt} = x_0'' w - y_0'' v, \qquad \frac{dv}{dt} = r_1 w + \gamma_1' u, \qquad \frac{dw}{dt} = -r_1 v - \gamma_1 u \tag{2.3}$$

где

$$\frac{B-C}{A} = a_0, \qquad \frac{A-C}{B} = b_0$$
$$\frac{Mgx_0}{B} = x_0', \qquad \frac{Mgy_0}{A} = y_0', \qquad \frac{Mgx_0}{C} = x_0'', \qquad \frac{Mgy_0}{C} = y_0'' \tag{2.4}$$

Таким образом, система шестого порядка уравнений возмущенного движения в первом приближении разбивается на две независимые линейные системы третьего порядка с периодическими коэффициентами, причем произведение корней характеристического уравнения каждой независимой системы равно единице.

Воспользовавшись тремя первыми интегралами системы (1.1)

$$\gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \qquad Ap\gamma + Bq\gamma' + Cr\gamma'' = C_1 \tag{2.5}$$
$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Mg(x_0\gamma + y_0\gamma') = C_2$$

и формулами (2.1), получим следующие первые интегралы систем (2.2) и (2.3):

$$\gamma_1 v + \gamma_1' w = 0 \tag{2.6}$$

$$A\xi\gamma_1 + B\eta\gamma_1' + C\zeta r_1 = H \tag{2.7}$$

$$r_1 u - x_0'' v - y_0'' w = G \tag{2.8}$$

где H и G — произвольные постоянные, причем система (2.2) имеет один первый интеграл (2.7), а система (2.3) — два первых интеграла (2.6) и (2.8).

Рассмотрим систему (2.3). Ввиду того, что исходная система (1.1) автономная, на основании известной теоремы Пуанкаре система (2.3), кроме двух первых интегралов, имеет также периодическое решение

$$u_1 = \dot r_1, \qquad v_1 = \dot\gamma_1, \qquad w_1 = \dot\gamma_1' \tag{2.9}$$

Покажем, что другое решение u_2, v_2, w_2 системы (2.3) не будет периодическим. Действительно, приводя при помощи интеграла (2.6) систему (2.3) к одному уравнению второго порядка, например относительно u, найдем по формуле Лиувилля частное решение

$$u_2 = \dot r_1 \int L(t)\,dt \qquad \left(L(t) = \frac{1 - 2k^2 \operatorname{sn}^2(Rt)}{4k^2 R^4 \operatorname{sn}^2(Rt)\operatorname{dn}^2(Rt)}\right) \tag{2.10}$$

Функция $L(t)$ — периодическая с периодом $\omega_1 = {}^1/_2\omega$ — имеет разрывы в точках t, кратных периоду ω_1; однако функция u_2 будет непрерывной функцией на любом конечном интервале времени, и, так как среднее значение функции $L(t)$ отлично от нуля, функция u_2 неограниченно возрастает вместе с временем. Ввиду того, что то же самое можно сказать о величинах v_2 и w_2, из предыдущего следует, что трехкратному единичному корню рассматриваемого характеристического уравнения соответствует не более двух групп решений.

Таким образом, здесь не выполняются условия устойчивости тривиальных решений системы (2.3) по переменным u, v, w и, если на начальные возмущения не налагать никаких ограничений, движение твердого тела, определяемое (1.2) и (1.5), будет неустойчиво в первом приближении.

Подчиним в общем решении системы (2.3)

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2, \qquad v = C_1 v_1 + C_2 v_2, \qquad w = C_1 w_1 + C_2 w_2$$

(третья произвольная, постоянная в силу существования интеграла (2.6), тождественно равна нулю) начальные возмущения условию $C_2 = 0$.

Тогда, принимая за начальный момент времени $t = 0$, получим из формул (2.9) и (2.10) условие для начальных возмущений в виде $u(0) = 0$.

Отметим, что это условие можно получить из интеграла (2.8), полагая постоянную $G = 0$.

Таким образом, из сказанного следует, что характеристическое уравнение системы (2.3) имеет трехкратный единичный корень и если начальные возмущения подчиняются условию $u(0) = 0$, решение системы (2.3) будет периодическим:

$$u = C_1 \dot{r}_1, \qquad v = C_1 \dot{\gamma}_1, \qquad w = C_1 \dot{\gamma}_1' \tag{2.11}$$

(здесь C_1 — произвольная постоянная) и условия устойчивости для этой системы будут выполнены.

3. Рассмотрим теперь систему (2.2). При помощи первого интеграла (2.7) приведем эту систему к двум уравнениям первого порядка:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = f_{11}\xi + f_{12}\zeta + F_1 H, \qquad \frac{d\zeta}{d\tau} = f_{21}\xi + f_{22}\zeta + F_2 H \tag{3.1}$$

Здесь

$$f_{11} = -l(1-b)\frac{\gamma_1 r_1}{\gamma_1'}, \qquad f_{12} = -l\left[a(1-b)\frac{r_1^2}{\gamma_1'} - y_0'\right]$$

$$f_{21} = -\frac{l}{a}\left[b\frac{1}{\gamma_1'} + (a-b)\gamma_1'\right], \qquad f_{22} = -lb\frac{r_1\gamma_1}{\gamma_1'}$$

$$F_1 = \frac{la(1-b)}{C}\frac{r_1}{\gamma_1'}, \qquad F_2 = \frac{l}{C}b\frac{\gamma_1}{\gamma_1'} \tag{3.2}$$

$$l = \frac{\omega}{\pi}, \qquad t = l\tau, \qquad a = \frac{C}{A}, \qquad b = \frac{C}{B}$$

Уравнения (3.1) сведем к одному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + F(\tau)\sigma = N(\tau)H \tag{3.3}$$

Здесь

$$\xi = \sqrt{f_{12}\gamma_1'\sigma} \tag{3.4}$$

$$F(\tau) = P - \frac{1}{4}Q^2 - \frac{1}{2}\frac{dQ}{d\tau}, \qquad N(\tau) = \sqrt{\frac{f_{12}}{\gamma_1'}}\left(\frac{d}{d\tau}\frac{F_1}{f_{12}} - f_{22}\frac{F_1}{f_{12}} + F_2\right)$$

$$Q = -\left(\frac{1}{f_{12}}\frac{df_{12}}{d\tau} + f_{11} + f_{22}\right), \qquad P = -\left(f_{12}\frac{d}{d\tau}\frac{f_{11}}{f_{12}} + f_{21}f_{12} - f_{11}f_{22}\right)$$

Коэффициент и свободный член уравнения (3.3) являются непрерывными периодическими функциями времени периода π, разлагающимися в ряды Фурье, и аналитическими функциями параметра k при достаточно малых его значениях.

Найдем разложение коэффициента $F(\tau)$ по степеням параметра k, ограничиваясь членами ряда до порядка k^3 включительно.

Вводя обозначения

$$\nu = \frac{Mg}{C}, \qquad \mu = 1 + s^2, \qquad s = \frac{x_0}{y_0}, \qquad \lambda^2 = 4\frac{b(\mu - 1) + a}{\mu} \tag{3.5}$$

получим

$$l = \frac{2}{\nu\sqrt[4]{x_0^2 + y_0^2}}\left(1 + \frac{k^2}{4}\right)$$

$$f_{11} = -4(1 - b)[ke_0 + k^2e_1 + k^3e_2], \qquad f_{12} = \frac{2\nu a y_0}{\sqrt[4]{x_0^2 + y_0^2}}[1 + k^2e_3 + k^3e_4]$$

$$f_{21} = -\frac{2\sqrt[4]{x_0^2 + y_0^2}}{\nu a y_0}\left[\frac{\lambda^2}{4} + ke_5 + k^2e_6 + k^3e_7\right], \qquad f_{22} = -4b[ke_0 + k^2e_1 + k^3e_2]$$

откуда коэффициент уравнения (3.3) будет иметь вид:

$$F(\tau;\ \lambda^2;\ k) = \lambda^2 + k\varkappa_1(\tau;\ \lambda^2;\ k) + k^2\varkappa_2(\tau;\ \lambda^2;\ k) + k^3\varkappa_3(\tau;\ \lambda^2;\ k) + \ldots$$

Здесь

$$\varkappa_1 = 2(3 - 2b)\frac{de_0}{d\tau} + 4e_5$$

$$\varkappa_2 = 2(3 - 2b)\frac{de_1}{d\tau} + 4e_6 + \lambda^2e_3 + 4e_0^2[4b(1 - b) - 1] - \frac{1}{2}\frac{d^2e_3}{d\tau^2}$$

$$\varkappa_3 = 2(3 - 2b)\frac{de_2}{d\tau} + 4e_7 + \lambda^2e_4 + 8e_1e_0[4b(1 - b) - 1] - \\ - \frac{1}{2}\frac{d^2e_4}{d\tau^2} - 2(1 - 2b)e_0\frac{de_3}{d\tau} + 4e_3e_5$$

$$e_0 = s\operatorname{cn}(lR\tau), \qquad e_1 = 2\mu\operatorname{sn}(lR\tau)\operatorname{cn}(lR\tau), \qquad e_2 = s\operatorname{cn}(lR\tau)\left[\frac{1}{4} + 4\mu\operatorname{sn}^2(lR\tau)\right]$$

$$e_3 = \frac{1}{4} - 4(1 - b)\mu\operatorname{cn}^2(lR\tau), \qquad e_4 = -8(1 - b)s\mu\operatorname{sn}(lR\tau)\operatorname{cn}^2(lR\tau)$$

$$e_5 = 2s\operatorname{sn}(lR\tau)\left(2b - \frac{1}{4}\lambda^2\right), \qquad e_6 = \frac{1}{16}\lambda^2 + 2\operatorname{sn}^2(lR\tau)\left(2b\mu - \frac{1}{4}\lambda^2\right)$$

$$e_7 = s\operatorname{sn}(lR\tau)\left[\frac{1}{8}(8b - \lambda^2) + 8b\mu\operatorname{sn}^2(lR\tau) - \operatorname{sn}(lR\tau)\left(2b - \frac{1}{4}\lambda^2\right)\right]$$

В этих формулах величина a заменена соответствующим ей выражением из формулы (3.5).

Все $\varkappa_i(\tau;\ \lambda^2;\ k)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ являются полиномами относительно параметров b, s, λ^2, причем по отношению к параметрам k и λ^2 коэффициент $F(\tau;\ \lambda^2;\ k)$ можно представить в виде

$$F(\tau;\ \lambda^2;\ k) = \lambda^2 [1 + kf_1(\tau;\ k)] + kf_2(\tau;\ k) \qquad (3.6)$$

где функции f_1 и f_2 уже не зависят от λ^2.

Воспользовавшись формулами разложения тэта-функций в ряды Фурье [1], получим соотношения

$$\operatorname{sn}(lR\tau) = \sin 2\tau - \tfrac{1}{16} k^2 (\sin 2\tau - \sin 6\tau)$$

$$\operatorname{cn}(lR\tau) = \cos 2\tau - \tfrac{1}{16} k^2 (3\cos 2\tau - \cos 6\tau)$$

при помощи которых можно написать

$$\begin{gathered} \varkappa_{01} = \rho_1(\lambda^2) \sin 2\tau, \qquad \varkappa_{02} = \rho_2(\lambda^2) + \rho_3(\lambda^2)\cos 4\tau \\ \varkappa_{03} = \rho_4(\lambda^2) + \rho_5(\lambda^2)\sin 2\tau + \rho_6(\lambda^2)\sin 4\tau + \rho_7(\lambda^2)\sin 6\tau \end{gathered} \qquad (3.7)$$

Здесь

$$\rho_1(\lambda^2) = -2s(\lambda^2 - 12b + 6)$$

$$\rho_2(\lambda^2) = -\left\{\lambda^2\left[\tfrac{1}{2} + 2\mu(1-b)\right] - 8\mu b - 8b(1-b)\mu + 2\mu - 2 + 8b(1-b)\right\}$$

$$\begin{aligned} \rho_3(\lambda^2) = -\Big\{\lambda^2[2(1-b)\mu - 1] - 8\mu(1-b) - \\ - 8b\mu(1-b) + 2\mu - 2 + 8b(1-b)\Big\} \end{aligned} \qquad (3.8)$$

$$\rho_4(\lambda^2) = s\left[\tfrac{1}{2}\lambda^2 - 4b\right]$$

$$\rho_5(\lambda^2) = s\left\{2\mu[\lambda^2(1-b) + 22b - 14] - \left[\tfrac{23}{8}\lambda^2 - \tfrac{47}{2}b + \tfrac{3}{4}\right]\right\}$$

Коэффициент $F(\tau;\ \lambda^2;\ k)$ окончательно будет иметь вид:

$$F(\tau;\ \lambda^2;\ k) = \lambda^2 + k\varkappa_{01}(\tau;\ \lambda^2) + k^2\varkappa_{02}(\tau;\ \lambda^2) + k^3\varkappa_{03}(\tau;\ \lambda^2) + \ldots \qquad (3.9)$$

где $\varkappa_{01}, \varkappa_{02}, \varkappa_{03}, \ldots$ не зависят от параметра k. Рассмотрим однородно уравнение, соответствующее уравнению (3.3):

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau^2} + F(\tau;\ \lambda^2;\ k)\sigma = 0 \qquad (3.10)$$

которое определяет устойчивость тривиального решения неоднородного уравнения.

Относительно этого уравнения известно [2], что в окрестности каждого целого числа существуют два значения λ^*, являющиеся аналитическими относительно $k^\chi \left(\chi = \tfrac{1}{2}\text{ или } 1\right)$, для которых соответствующие решения уравнения (3.10) будут периодическими с периодом π или 2π.

Так как в этом случае коэффициент $F(\tau;\ \lambda^2;\ k)$ будет аналитической функцией k^χ, то для начальных значений, являющихся также аналитическими функциями k^χ, рассматриваемые периодические решения

$$\sigma^* = \sigma_0^*(\tau) + k^\chi \sigma_1^*(\tau) + \ldots$$

будут аналитическими функциями k^χ.

Ввиду того, что $\sigma_0^*(\tau)$ не может быть константой, что следует из уравнения для определения σ_0^*

$$\frac{d^2\sigma_0^*}{d\tau^2} + n^2\sigma_0^* = 0$$

где n — целое число, отличное от нуля, все λ^* являются вещественными и аналитическими функциями величины $k(\chi=1)$.

Действительно, пользуясь приемом, который указан в книге И. Г. Малкина [2], на основании формулы (3.6) получим, что λ^* удовлетворяет соотношению

$$\lambda^{*2}=\int_0^{\beta\pi}\left[\frac{d\bar\sigma^*}{d\tau}\frac{d\sigma^*}{d\tau}-kf_2(\tau;\,k)\,\bar\sigma^*\,\sigma^*\right]d\tau\left[\int_0^{\beta\pi}[1+kf_1(\tau;\,k)]\,\bar\sigma^*\,\sigma^*\,d\tau\right]^{-1}\quad(\beta=1,2)$$

($\bar\sigma^*$ — периодическое решение, сопряженное с решением σ^*), правая часть которого при достаточно малом k всегда положительна, откуда полностью и следует высказанное утверждение.

Покажем теперь, что когда между моментами инерции существуют соотношения

$$A\geqslant C,\qquad B\geqslant C \tag{3.11}$$

для уравнения (3.10) имеются области неустойчивости, не вырождающиеся в точку при k, отличном от нуля.

Для определения границ этих областей неустойчивости будем пользоваться известным методом [2], который на основании сказанного выше может быть полностью применен к нашему случаю.

Так как соотношения (3.11) эквивалентны соотношениям $a\leqslant 1$ и $b\leqslant 1$, то из формулы (3.5) следует, что $\lambda\leqslant 2$ и существуют только две области неустойчивости, соответствующие $n=1$ и $n=2$.

Для нахождения первой области неустойчивости в уравнении (3.10) полагаем

$$\lambda^2=1+\alpha_1 k+\alpha_2 k^2+\alpha_3 k^3+\ldots$$

и попытаемся удовлетворить ему рядом вида

$$\sigma=A_0\cos\tau+B_0\sin\tau+k\sigma_1+k^2\sigma_2+k^3\sigma_3+\ldots$$

с периодическими коэффициентами, где A_0 и B_0 — произвольные постоянные. Тогда для определения σ_1 получаем уравнение

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\tau^2}+\sigma_1=-\left[\alpha_1A_0+\tfrac{1}{2}\rho_1(1)\,B_0\right]\cos\tau-\left[\alpha_1B_0+\tfrac{1}{2}\rho_1(1)\,A_0\right]\sin\tau+\ldots \tag{3.12}$$

из которого следует, что необходимое условие периодичности будет иметь вид:

$$\alpha_1^{(1,2)}=\pm\tfrac{1}{2}\rho_1(1)$$

Если $\rho_1(1)\neq 0$, то существуют два различных решения для α_1, корые и дают начало рядам, определяющим границы области неустойчивости

$$1-\tfrac{1}{2}|\rho_1(1)|k+\ldots\leqslant\lambda^2\leqslant 1+\tfrac{1}{2}|\rho_1(1)|k+\ldots \tag{3.13}$$

Так как $\rho_1(1)=24s(b-{}^7/_{12})$, то для определения границ области неустойчивости, когда $b={}^7/_{12}$ (случай $s=0$ будет рассмотрен особо), необходимо рассмотреть следующее приближение. В этом случае общее решение уравнения (3.12) будет

$$\sigma_1=A_1\cos\tau+B_1\sin\tau$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные, а σ_2 определится из уравнения

$$\frac{d^2\sigma_2}{d\tau^2} + \sigma_2 = -A_0[\alpha_2 + \rho_2(1)]\cos\tau - B_0[\alpha_2 + \rho_2(1)]\sin\tau + \ldots \quad (3.14)$$

Необходимое условие периодичности второго приближения примет вид $[\alpha_2 + \rho_2(1)]^2 = 0$ и общее решение уравнения (3.14) будет

$$\sigma_2 = A_2\cos\tau + B_2\sin\tau + \sigma_2^*$$

где A_2 и B_2 — произвольные постоянные и σ_2^* — частное решение этого уравнения. Из уравнения третьего приближения

$$\frac{d^2\sigma_3}{d\tau^2} + \sigma_3 = -\left\{A_0[\alpha_3 + \rho_4(1)] + \frac{1}{2}\left[\rho_5(1) - \rho_2(1)\frac{\partial\rho_1}{\partial(\lambda^2)}\right]B_0\right\}\cos\tau -$$
$$-\left\{B_0[\alpha_3 + \rho_4(1)] + \frac{1}{2}\left[\rho_5(1) - \rho_2(1)\frac{\partial\rho_1}{\partial(\lambda^2)}\right]A_0\right\}\sin\tau + \ldots$$

следует, что необходимое условие периодичности σ_3 дает

$$\alpha_3^{(1,2)} = \left\{-\rho_4(1) \pm \frac{1}{2}\left[\rho_5(1) - \rho_2(1)\frac{\partial\rho_1}{\partial(\lambda^2)}\right]\right\}_{b={}^7/_{12}}$$

Так как величина

$$\left[\rho_5(1) - \rho_2(1)\frac{\partial\rho_1}{\partial(\lambda^2)}\right]_{b={}^7/_{12}} = s\left(\mu\frac{2680}{72} + \frac{1948}{72}\right)$$

не обращается в нуль ($\mu > 1$), всегда существуют два различных решения для α_3 $[\alpha_3^{(1)} < \alpha_3^{(2)}]$ и искомая область неустойчивости определяется следующими неравенствами:

$$1 - \rho_2(1)k^2 + \alpha_3^{(1)}k^3 + \ldots \leqslant \lambda^2 \leqslant 1 - \rho_2(1)k^2 + \alpha_3^{(2)}k^3 + \ldots \quad (3.15)$$

Для определения области неустойчивости, расположенной вблизи $\lambda = 2$, в уравнении (3.10) полагаем $\lambda^2 = 4 + \alpha_1 k + \alpha_2 k^2 + \ldots$ и постараемся удовлетворить ему формальным рядом

$$\sigma = A_0\cos 2\tau + B_0\sin 2\tau + k\sigma_1 + k^2\sigma_2 + \ldots$$

с периодическими (периода π) коэффициентами (A_0 и B_0 — произвольные постоянные). Тогда из уравнения для первого приближения

$$\frac{d^2\sigma_1}{d\tau^2} + 4\sigma_1 = -A_0\alpha_1\cos 2\tau - B_0\alpha_1\sin 2\tau - \frac{\rho_1(4)}{2}(A_0\sin 4\tau + B_0 - B_0\cos 4\tau)$$

следует, что условие периодичности σ_1 дает $\alpha_1^2 = 0$ и общее решение этого уравнения будет

$$\sigma_1 = A_1\cos 2\tau + B_1\sin 2\tau + \frac{1}{24}\rho_1(4)(A_0\sin 4\tau - B_0\cos 4\tau - 3B_0)$$

где A_1 и B_1 — произвольные постоянные. Для следующего приближения

$$\frac{d^2\sigma_2}{d\tau^2} + 4\sigma_2 = -A_0\left[\alpha_2 + \rho_2(4) + \frac{1}{48}\rho_1^2(4) + \frac{1}{2}\rho_3(4)\right]\cos 2\tau -$$
$$-B_0\left[\alpha_2 + \rho_2(4) - \frac{5}{48}\rho_1^2(4) - \frac{1}{2}\rho_3(4)\right]\sin 2\tau + \ldots$$

необходимое условие периодичности имеет вид

$$\left\{\alpha_2 + \rho_2(4) + \frac{1}{48}\rho_1^2(4) + \frac{1}{2}\rho_3(4)\right\} \times \quad (3.16)$$
$$\times \left\{\alpha_2 + \rho_2(4) + {}_{48}\,\rho_1^2(4) + \frac{1}{2}\rho_3(4) - \left[\rho_3(4) + \frac{1}{8}\rho_1^2(4)\right]\right\} = 0$$

Так как

$$8\rho_3(4)+\rho_1^2(4)=32\,[4s^2(4b^2-7b+3)+1]$$

при принятом условии $s\leqslant 1$ не обращается в нуль, то из уравнения (3.16) определяются два различных значения для $\alpha_2\,[\alpha_2^{(1)}<\alpha_2^{(2)}]$ и искомая область неустойчивости задается следующими неравенствами:

$$4+\alpha_2^{(1)}k^2+\ldots\leqslant\lambda^2\leqslant 4+\alpha_2^{(2)}k^2+\ldots \tag{3.17}$$

Границы области неустойчивости в случае $s=0$ $(n=1)$ можно найти, используя неравенство (3.17). Действительно, так как в этом случае из формулы (1.4) следует, что $\varphi_0={}^1/_2\,\pi$, коэффициент $F(\tau;\,\lambda^2;\,k)$ в уравнении будет непрерывной периодической функцией периода ${}^1/_2\,\pi$ и аналитической функцией параметра k^2 при достаточно малых его значениях. Поэтому, заменяя в уравнении (3.10) независимую переменную $\tau={}^1/_2\,\tau_1$, приведем снова период функции $F(\tau;\,\lambda^2;\,k)$ к величине π и будем иметь

$$\frac{d^2\sigma}{d\tau_1^2}+\frac{1}{4}F(\tau_1;\lambda^2;\,k^2)\,\sigma=0 \tag{3.18}$$

Так как ${}^1/_4\,\lambda^2$ будет целым числом только в случае $n=2$, то, заменяя в формуле (3.16) $\rho_i(4)$ на ${}^1/_4\,\rho_i(4)$, получим два различных значения α_1

$$\alpha_1^{(1)}=2-4b,\qquad \alpha_2^{(2)}=3-4b$$

и область неустойчивости определится при помощи неравенств

$$1+(2-4b)k^2+\ldots\leqslant\frac{1}{4}\lambda^2\leqslant 1+(3-4b)k^2+\ldots \tag{3.19}$$

Так как коэффициент преобразования (3.4) является периодической непрерывной функцией, отличной от нуля на всем периоде, можно утверждать, что характеристическое уравнение системы (2.2) имеет один единичный корень и, если λ находится вне найденных областей неустойчивости, два комплексно сопряженных корня с модулями, равными единице; если λ находится внутри областей неустойчивости, один корень численно больше, другой численно меньше единицы. Если λ находится на границе области неустойчивости, характеристическое уравнение системы (2.2) имеет трехкратный единичный корень.

В первом случае решения уравнений (2.2) будут устойчивые, во втором неустойчивые. Устойчивость решения в третьем случае нас не интересовала.

При $x_0>y_0$ можно воспользоваться всеми полученными формулами, произведя в них замену:

$$x_0\leftrightarrow y_0,\qquad A\leftrightarrow B,\qquad t\leftrightarrow -t,\qquad \xi\leftrightarrow\eta,\qquad v\leftrightarrow w \tag{3.20}$$

Отметим, что этим же способом можно провести анализ и для любых моментов инерции A, B, C, т. е. для любых $n=3,\,4,\,5,\ldots$

4. Таким образом, если параметры A, B, C, x_0, y_0, ψ_0, характеризующие распределение масс в твердом теле, а также невозмущенное движение, удовлетворяют при выполнении условий (3.11) какому-либо из соотношений (3.13), (3.15), (3.17), (3.19) со знаком неравенства, харак-

теристическое уравнение для систем (2.2) и (2.3) будет иметь один корень численно больше, другой численно меньше единицы и остальные четыре корня, равные единице. Если указанные параметры удовлетворяют какому-либо из соотношений (3.13), (3.15), (3.17), (3.19) со знаком равенства, характеристическое уравнение будет иметь шесть единичных корней; если параметры $A, B, C, x_0, y_0, \psi_0$ не удовлетворяют никакому из указанных выше соотношений, корнями характеристического уравнения будут два комплексно сопряженных корня с модулями, равными единице, и четыре единичных корня.

Если не налагать на начальные возмущения никаких ограничений, то в первом приближении неустойчивость будет иметь место по переменным r, γ, γ' и в случае, когда параметры $A, B, C, x_0, y_0, \psi_0$, кроме условия малости параметра ψ_0 и условия (3.11), удовлетворяют какому-либо из соотношений (3.13), (3.15), (3.17), (3.19) со знаком неравенства,— по переменным p, q, γ''. В этом случае согласно известным результатам А. М. Ляпунова [3], невозмущенное движение также будет неустойчиво. Однако, налагая на начальные возмущения некоторые ограничения, будем иметь условную устойчивость по всем переменным $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ в первом приближении и условную устойчивость невозмущенного движения [3].

В случае, когда параметры $A, B, C, x_0, y_0, \psi_0$ не удовлетворяют никакому из указанных соотношений, в первом приближении при ограничении $u(0) = 0$ условная устойчивость будет иметь место по всем переменным $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$.

В случае, когда параметры $A, B, C, x_0, y_0, \psi_0$ удовлетворяют какому-либо из указанных соотношений со знаком равенства, условная устойчивость по всем переменным $p, q, r, \gamma, \gamma', \gamma''$ в первом приближении будет иметь место при наложении некоторых дополнительных ограничений, кроме ограничения $u(0) = 0$, на начальные условия в зависимости от числа групп решений, соответствующих трехкратному корню характеристического уравнения системы (2.2), равному единице

Устойчивость невозмущенного движения в двух последних случаях, являющихся критическими, требует дополнительного рассмотрения.

Проведенное исследование позволяет судить об устойчивости определяемого формулами (1.2), (1.5) движения твердого тела при достаточно малых значениях параметра k.

Считаю своим долгом поблагодарить Л. Н. Сретенского за советы, которыми я пользовался при написании этой работы.

Поступила 21 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. ОНТИ, 1936.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Гостехиздат, 1952.
3. Ляпунов А. М. Собр. соч., т. II. Изд-во АН СССР, 1956.