Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ В РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМАХ

М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер

(Москва)

Рассматриваются две системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f^{\pm}(x) \qquad (1^{\pm}) \tag{1}$$

описывающие движение в фазовом пространстве соответственно «над» (+) и «под» (—) заданной поверхностью [1]

$$F(x) = 0 \tag{2}$$

Здесь x обозначает n-мерный вектор с координатами $x_1, \ldots, x_n$, $f^{\pm}(x)$ — вектор-функции, а $F(x)$ — скалярная функция от x.

Предполагается, что как «верхняя» (1^+), так и «нижняя» (1^-) системы уравнений удовлетворяют обычным условиям, обеспечивающим существование и единственность решений при заданных начальных условиях, и не имеют особых точек на поверхности разрыва. Однако система в целом может иметь на поверхности разрыва положения равновесия. Действительно, системы ($1^{\pm}$) не определяют условий перехода через поверхность разрыва или движения вдоль нее, которые должны быть доопределены, При этом на поверхности разрыва могут появиться положения равновесия.

В одних случаях вопрос об устойчивости этих положений равновесия решается просто, исходя из новых уравнений, которые вводятся при доопределении задачи и обусловливают наличие равновесия. В иных случаях, значительно более сложных, хотя равновесие и обусловлено новыми уравнениями, вопрос об его устойчивости решается в основном уравнениями (1).

Исследованию устойчивости равновесий, возникающих на поверхности разрыва, и посвящена настоящая работа.

Применительно к системам второго порядка эта проблема исследовалась в [1]. При этом основной случай, интересующий нас далее, когда векторы полей $f^{\pm}$ касаются поверхности разрыва в рассматриваемой точке, в работе [1] не изучался. В случае же произвольного порядка n подобная задача ставилась и изучалась лишь у релейных систем [2,3,4,5]

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \lambda \frac{x_1}{|x_1|} \tag{3}$$

где A — постоянная квадратная матрица, а λ — постоянный вектор, т. е. для систем, отличающихся от линейных с постоянными коэффициентами наличием одной нелинейной функции релейного типа. Здесь рассматривается эта проблема для дифференциальных уравнений типа ($1^{\pm}$) с произвольными правыми частями.

§ 1. Доопределение движения изображающей точки в фазовом пространстве. Системы уравнений ($1^{\pm}$) на самой поверхности разрыва определяют два векторных поля. Рассмотрим одно из них, например «верхнее», задаваемое системой (1^+). Поверхность разрыва разбивается на области, в каждой из которых векторы «верхнего» поля направлены в определенную сторону от поверхности («к поверхности» или «от нее»).

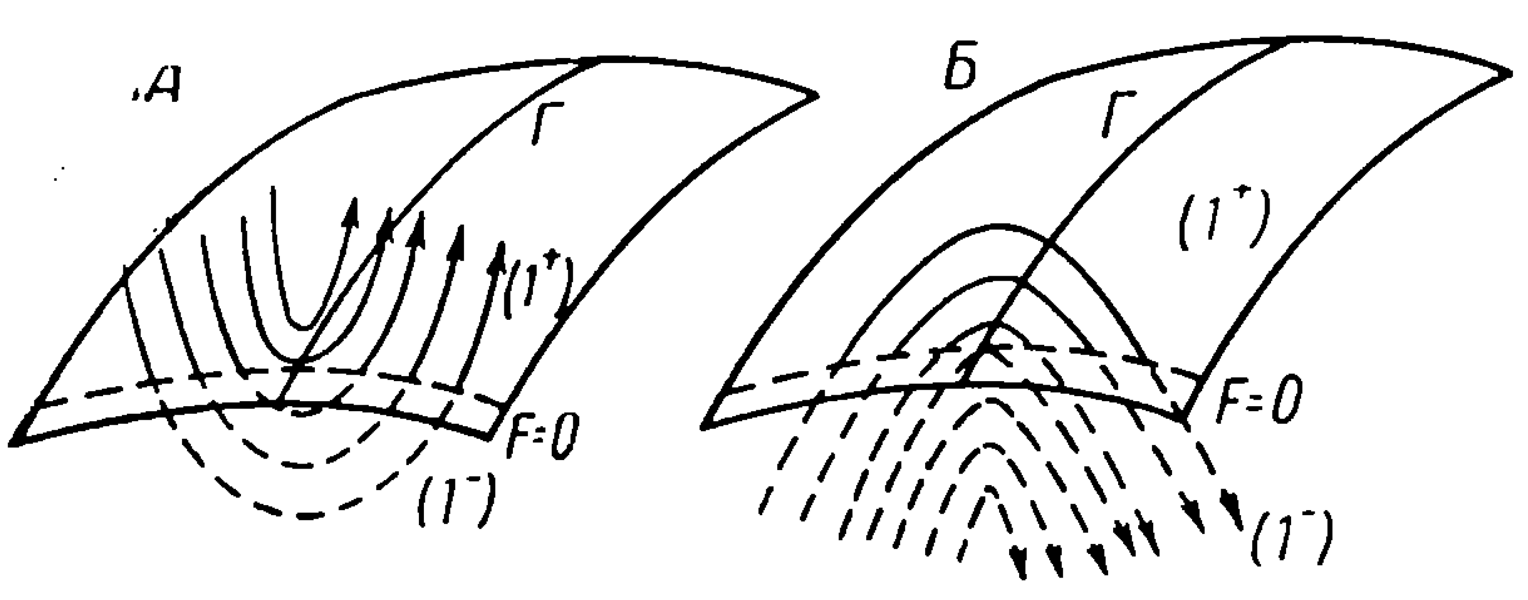
---

[1] В этой статье для сокращения употребляются термины «поверхность», «плоскость» для обозначений гиперповерхностей, гиперплоскостей в пространстве n измерений.

Области эти разделены $(n-2)$-мерными многообразиями Γ^+. В точках, принадлежащих Γ^+, вектор поля касается [1] поверхности.

Аналогично другая сторона поверхности разрыва разделяется на области многообразиями Γ^-.

Каждая точка многообразия Γ^+ (и аналогично Γ^-) может быть в основном двух типов — типа А или типа Б (фиг. 1) — в зависимости от протекания фазовых траекторий системы (1^+) (соответственно (1^-)) вблизи этой точки.



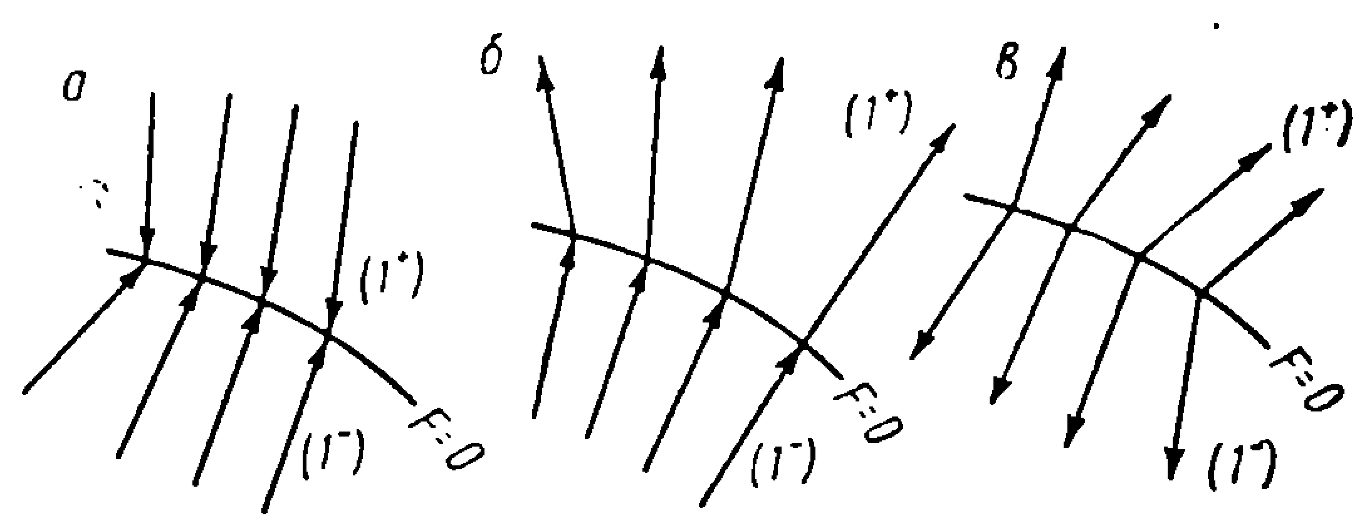
Фиг. 1

Теперь поверхность в целом многообразиями Γ^+ и Γ^- разбивается на «области скольжения» C, где векторы верхнего и нижнего полей направлены навстречу друг другу («стыкуются», фиг. 2*а*), и на регулярные области P, где нет стыкования векторов [2] (фиг. 2*б* и 2*в*).

Движение изображающей точки, попавшей на поверхность разрыва, естественно доопределить так.

1. Траектория изображающей точки всегда непрерывна.

2. Изображающая точка, попавшая в точку регулярной области P на поверхности разрыва из одного полупространства, продолжает свое движение в другом полупространстве по траектории, выходящей из этой точки [3] (фиг. 2*б*).



Фиг. 2

3. Попав в область скольжения C, изображающая точка не может продолжать движение в силу систем ($1^\pm$) и движется далее вдоль поверхности разрыва (до границ области C). Дифференциальные уравнения, описывающие это движение, должны быть заданы дополнительно. Назовем их уравнениями [4] (C).

Предполагается, что особые точки системы (C) не лежат на границе области C.

4. Пусть теперь изображающая точка попала или первоначально помещена в точку, принадлежащую какому либо одному из многообразий Γ^+ или Γ^-. Это многообразие может быть разделено на $(n-2)$-мерные области P_Γ и C_Γ. Из каждой точки P_Γ выходит хотя

[1] Предполагается, что фазовая траектория системы (1^+) или (1^-) может касаться поверхности разрыва (2), но лишь в изолированной точке, и что при этом касание является простым (а не кратным).

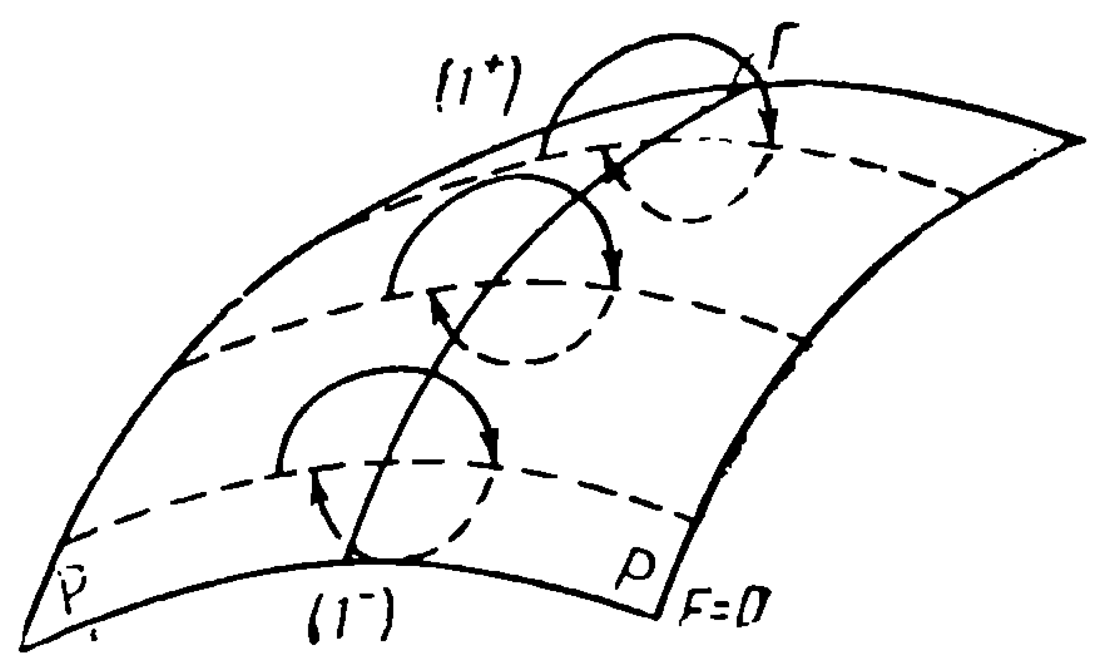
[2] Внутри областей C также могут быть точки, в которых вектор поля касается поверхности, но такие точки не существенны для нас.

[3] В случае фиг. 2*в* изображающая точка вообще не попадает на поверхность разрыва. Если она помещена туда в начальный момент, то выбор возможной траектории для начала движения доопределяется.

[4] Уравнения (C), вообще говоря, не связаны как-либо с уравнениями ($1^\pm$). Но в ряде важных частных случаев система (C) может быть естественно определена в зависимости от ($1^\pm$). Подробнее об этом см. [3, 4, 6, 7].

бы одна траектория системы (1^+), (1^-), (C), а из точек $C_г$ выходящих траекторий нет. Если изображающая точка находится в области $P_г$, то она уходит по одной из выходящих траекторий [1]. Если же изображающая точка находится в области $C_г$, то она движется далее внутри многообразия $C_г$ в силу системы уравнения ($Г$), которая должна быть задана дополнительно.

Изображающая точка может оказаться в ($n-3$)-мерном многообразии G, разделяющем области $P_г$ и $C_г$. Но это многообразие G аналогично разбивается на области [2] P_G и C_G, для C_G должны быть заданы уравнения (G) и т. д.



Фиг. 3

5. Если многообразия $Г^+$ и $Г^-$ совпадают, то движение доопределяется так же, как и в п. 4.

Случай, когда многообразия $Г^+$ и $Г^-$ пересекаются по многообразиям меньшего числа измерений, в настоящей работе не рассматриваются. Поэтому дальнейшее движение изображающей точки в этих случаях мы не доопределяем.

Положениями равновесия на поверхности разрыва могут служить лишь те точки областей C и многообразий $Г$, которые являются особыми для вводимых при доопределении задачи систем уравнений (C), ($Г$), (G) и т. д.

Выделим особый случай, играющий для дальнейшего важную роль. В этом случае (фиг. 3) многообразия $Г^+$ и $Г^-$ совпадают, рассматриваемая точка (положение равновесия) принадлежит этим совпадающим многообразиям, и оба многообразия относятся к типу Б (фиг. 1). Кроме того, на поверхности разрыва по обе стороны от совпадающего многообразия $Г$ расположены регулярные области.

Если в этом случае положение равновесия является устойчивой особой точкой системы уравнений ($Г$), то возникает вопрос об устойчивости положения равновесия по отношению к начальным отклонениям, выбираемым в произвольной n-мерной окрестности положения равновесия. Для решения этого вопроса требуется исследовать поведение в этой окрестности фазовых траекторий систем ($1^\pm$).

Во всех иных (неособых) случаях траектории систем ($1^\pm$) обеспечивают лишь уход изображающей точки из малой окрестности или движение к поверхности разрыва и вопрос об устойчивости решается элементарно, если известна устойчивость или неустойчивость особых точек систем уравнений (C), ($Г$), (G) и т. д., вводимых при доопределении задачи. Поэтому мы будем заниматься далее лишь исследованием устойчивости в особом случае.

§ 2. Формулы для точечных преобразований в особом случае. Исследуемую точку поместим в начало координат и будем считать функции $f^+(x)$, $f^-(x)$ и $F(x)$ аналитическими или во всяком случае достаточно глад-

[1] Если таких траекторий несколько, то выбор траектории доопределяется.

[2] Из каждой точки P_G имеется хотя бы одна выходная траектория одной из систем (1^+), (1^-), (C), ($Г$).

кими[1] в малой окрестности начала координат. Мы будем интересоваться поведением интегральных кривых лишь в малой окрестности начала координат и поэтому, говоря далее о пространстве, поверхности, плоскости, полуплоскости и т. д., будем иметь в виду их пересечения с малой окрестностью точки $x = 0$.

Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что поверхностью разрыва является плоскость $x_n = 0$ и что $(n-2)$-мерное многообразие Γ, состоящее из точек, в которых верхнее и нижнее векторные поля одновременно касаются поверхности разрыва, определяется уравнениями[2] $x_1 = 0$, $x_n = 0$; система (1^+) действует при $x_n > 0$, а (1^-) — при $x_n < 0$.

Интегральные траектории системы (1^+) осуществляют точечное преобразование G_1 полуплоскости $x_1 \geqslant 0$, $x_n = 0$ в полуплоскость $x_1 \leqslant 0$, $x_n = 0$, а траектории системы (1^-) определяют точечное преобразование G_2 полуплоскости $x_1 \leqslant 0$, $x_n = 0$ снова в полуплоскость $x_1 \geqslant 0$, $x_n = 0$. При этом изображающая точка, перемещаясь вдоль интегральных кривых систем (1^+) и (1^-), проходит пути s_1 и s_2 за времена τ_1 и τ_2. Величины s_1, s_2, τ_1 и τ_2 являются функциями от исходной точки x в плоскости разрыва.

Произведение $G = G_1 G_2$ этих точечных преобразований переводит полуплоскость $x_1 \geqslant 0$, $x_n = 0$ в самое себя. Все точки многообразия Γ являются неподвижными точками всех трех преобразований G_1, G_2, G. Устойчивость неподвижной точки $x = 0$ преобразования G полуплоскости $x_1 \geqslant 0$, $x_n = 0$ в себя эквивалентна устойчивости исследуемого состояния равновесия, расположенного в начале координат[3] (см. [8,9]).

Рассмотрим разложение компонент поля $f^+(x)$ в окрестности начала координат

$$f_j^+(x_1, \ldots, x_n) = c_j^+ + \sum_{k=1}^{n} c_{jk}^+ x_k + \ldots \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

В связи с тем, что во всех точках Γ-многообразия вектор поля лежит в плоскости $x_n = 0$, функция $f_n^+(x_1, \ldots, x_n)$ обращается тождественно в нуль при $x_1 = 0$, $x_n = 0$. Поэтому

$$f_n^+(x_1, \ldots, x_n) = c_{n1}^+ x_1 + c_{nn}^+ x_n + \ldots \qquad (2.1)$$

[1] Каждая из функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ задана не во всей окрестности точки $x = 0$, а только в ее части, расположенной по одну сторону от поверхности разрыва. Говоря об аналитичности или достаточной гладкости этих функций, мы имеем в виду возможность доопределения их во всей окрестности точки $x = 0$.

[2] Общий случай, когда поверхность разрыва дана уравнением $x_n = P(x_1, \ldots x_{n-1})$ а многообразие Γ — дополнительным уравнением $x_1 = Q(x_2, \ldots, x_{n-1})$, сводится к рассматриваемому случаю при помощи преобразования координат

$$x_1' = x_1 - Q(x_2, \ldots, x_{n-1}), \quad x_2' = x_2, \ldots, \quad x_{n-1}' = x_{n-1}, \quad x_n' = x_n - P(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

[3] В работе [9] это утверждение было доказано для устойчивости периодических движений. Это доказательство переносится и на случай устойчивости равновесий, если учесть, что время $\tau = \tau_1 + \tau_2$ стремится к нулю при $x \to 0$. Последнее обстоятельство вытекает из того, что за время τ_1 и τ_2 изображающая точка проходит пути s_1 и s_2, стремящиеся к нулю при $x \to 0$, а скорости прохождения этих дуг близки к длинам векторов $f^+(0)$ и $f^-(0)$, которые конечны и отличны от нуля, так как по предположению начало координат не является особой точкой для систем (1^+) и (1^-).

Тогда для интегральной кривой системы (1^+), которая касается начала координат (эта кривая «срезается» плоскостью $x_n = 0$, так как рассматривается касание типа Б), зависимость координаты x_n от времени имеет вид:

$$x_n = \frac{1}{2} \dot{f}_n^+(0)\, t^2 + \ldots \tag{2.2}$$

и, как легко видеть, $\dot{f}^+(0) = c_1^+ c_{n1}^+$ в силу (2.1). Из того, что эта интегральная кривая располагается по одну сторону от плоскости $x_n = 0$, следует, что разложение начинается с четной степени t. В дальнейшем мы рассматриваем только основной случай [1], когда это разложение начинается с члена, содержащего t^2, т. е. когда $c_1^+ \neq 0$ и $c_{n1}^+ \neq 0$.

Чтобы получить формулу для преобразования G_1, выпишем уравнения интегральной кривой системы (1^+), начинающейся в точке $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$:

$$y_j = x_j + t f_j^+(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) + \frac{1}{2} t^2 \dot{f}_j^+(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) + \ldots \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{2.3}$$

и положим в последнем из этих уравнений (при $j = n$) $y_n = x_n = 0$.

Из полученного уравнения, существенно используя условия $c_1^+ \neq 0$, $c_{n1}^+ \neq 0$, находим время $t = \tau_1$ в форме ряда относительно $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Подставляя этот ряд вместо t в остальные формулы (2.3), получаем формулу точечного преобразования G_1.

В связи с тем, что все точки многообразия $\Gamma(x_1 = 0)$ являются неподвижными точками отображения G_1, формулы, определяющие преобразование G_1, имеют вид:

$$y_1 = p_1 x_1 + x_1 \varphi_1(x), \qquad y_j = b_j x_1 + x_j + x_1 \varphi_j(x) \quad (j = 2, \ldots, n-1) \tag{2.4}$$

где $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ — функции, разложения которых в степенные ряды начинаются с линейных членов.

Описанные выше выкладки приводят к выражениям

$$b_j = -2 \frac{c_j^+}{c_1^+} \quad (j = 2, \ldots, n-1) \tag{2.5}$$

Формулы (2.4) были получены при предположении, что за время τ_1 интегральные кривые переводят точку полуплоскости $x_1 \geqslant 0$, $x_n = 0$ в точку с $x_1 \leqslant 0$, $x_n = 0$. Однако эти же формулы можно применить к точкам полуплоскости $x_1 \leqslant 0$, и тогда уже при отрицательном значении τ_1 они перейдут в исходные точки из полуплоскости $x_1 \geqslant 0$, $x_n = 0$. В этом смысле преобразование (2.4) может быть рассмотрено как преобразование всей плоскости в себя (см. § 2), осуществляемое только интегральными кривыми системы (1^+). Это преобразование инволютивно, т. е. совпадает со своим обратным. Поэтому

$$x_1 = p_1 y_1 + y_1 \varphi_1(y), \qquad x_j = b_j y_1 + y_j + y_1 \varphi_j(y) \quad (j = 2, \ldots, n-1) \tag{2.6}$$

Подставляя первое из выражений (2.4) в правую часть первого из уравнений (2.6), находим, что $p_1^2 = 1$; следовательно, $p_1 = -1$.

---

[1] См. сноску [1] на стр. 284. В силу наличия касания типа Б имеет место $c_1^+ c_{n1}^+ < 0$. Поскольку в рассматриваемом случае $c_1^+ < 0$, то $c_{n1}^+ > 0$.

(Случай $p_1 = +1$ исключается, так как G_1 переводит полуплоскость $x_1 \geqslant 0$ в полуплоскость $x_1 \leqslant 0$.)

Кроме того, с учетом равенства $p_1 = -1$ имеет место тождество $x_1\varphi_1(x) = y_1\varphi_1(y)$. Учитывая первое из уравнений (2.4) и сокращая на x_1, получим $\varphi_1(x) = [\varphi_1(x) - 1]\varphi_1(y)$. Полагая здесь $x_1 = 0$ (тогда $x = y$), находим, что

$$2\varphi_1(x) = [\varphi_1(x)]^2 \quad \text{при } x_1 = 0$$

Разложение $\varphi_1(x)$ не имеет свободного члена; поэтому $\varphi_1(0) = 0$ при $x_1 = 0$. Но тогда $\varphi_1(x) = x_1\psi(x)$ и формулы (2.4) для G_1 принимают вид:

$$y_1 = -x_1 + x_1^2\psi(x), \qquad y_j = b_j x_j + x_1\varphi_j(x) \quad (j = 2, \ldots, n-1) \tag{2.7}$$

где разложение в ряд по x функции $\psi(x)$ в отличие от функции $\varphi_j(x)$ может начинаться и со свободного члена.

Совершенно аналогично точечное преобразование G_2 определяется формулами

$$x_1^{(1)} = -y_1 + y_1^2\psi^\circ(y), \qquad x_j^{(1)} = b_j^\circ y_1 + y_j + y_1\varphi_j^\circ(y) \quad (j = 2, \ldots, n-1) \tag{2.8}$$

Из (2.7) и (2.8) получаем формулы для отображений $G = G_1G_2$:

$$x_1^{(1)} = x_1 + x_1^2 g(x), \qquad x_j^{(1)} = S_j x_1 + x_j + x_1 g_j(x) \quad (j = 2, \ldots, n-1) \tag{2.9}$$

где

$$S_j = b_j - b_j^\circ \quad (j = 2, \ldots, n-1) \tag{2.10}$$

$$g(x) = -\psi(x) + [x_1\psi(x) - 1]^2\psi(y) \tag{2.11}$$

$$g_j(x) = \varphi_j(x) + b_j^\circ x_1\psi(x) + [x_1\psi(x) - 1]\varphi_j^\circ(y) \quad (j = 2, \ldots, n-1)$$

Здесь y как функция x определяется формулами (2.7). Разложение функций $g_2(x), \ldots, g_{n-1}(x)$ начинается с линейных членов, а $g(0)$ может быть отличным от нуля. Используя формулу (2.5) и аналогичную формулу для b_j°, из (2.10) находим

$$S_j = -2\left(\frac{c_j^+}{c_1^+} - \frac{c_j^-}{c_1^-}\right) \quad (j = 2, \ldots, n-1) \tag{2.12}$$

Заметим, что полученное точечное преобразование полуплоскости $x_1 \geqslant 0$, $x_n = 0$ в себя, задаваемое формулами (2.9), относится к критическим случаям, так как здесь все корни характеристического уравнения, составленного для линейной части преобразования G, равны единице.

§ 3. Исследование устойчивости равновесия в особом случае. Покажем, что исследуемое положение равновесия $x = 0$ неустойчиво, если векторы $f^+(0)$ и $f^-(0)$ неколлинеарны (т. е. не все $S_j = 0$). Для случая же, когда эти векторы коллинеарны (все $S_j = 0$), установим условия устойчивости и условия неустойчивости.

Лемма. Если неподвижная точка $x = 0$ точечного преобразования, переводящего полупространство $x_1 \geqslant 0$ в себя, устойчива и если первая из формул, определяющих это преобразование, имеет вид:

$$x_1^{(1)} = x_1 + x_1^2 g(x) \tag{3.1}$$

то для последовательных итераций

$$x_1^{(0)} + x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \ldots = \infty \qquad (x_1^{(0)} = x_1 > 0) \tag{3.2}$$

Доказательство [1]. Выберем достаточно большое число $M > 0$ так, чтобы одновременно выполнялись неравенства

$$|g(x)| < M, \ |x^{(k)}| < \frac{1}{2M} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.3}$$

коль скоро $|x| < \Delta$, $x_1 \geqslant 0$. Тогда при этих значениях x согласно (3.1) и (3.3)

$$x_1^{(1)} > x_1 - Mx_1^2 = x_1(1 - Mx_1) > 0 \tag{3.4}$$

Рассмотрим вспомогательное преобразование скалярных величин

$$\alpha_1 = \alpha_0(1 - M\alpha_0) \tag{3.5}$$

и его последовательные итерации

$$\alpha_{m+1} = \alpha_m(1 - M\alpha_m) \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

Тогда, полагая $\alpha_0 = x_1 > 0$ и сопоставляя (3.5) с (3.4), находим, что $x_1^{(1)} > \alpha_1 > 0$ и так как

$$\frac{d}{dx_1}(x_1^2 - Mx_1) > 0 \qquad \text{при } 0 < x_1 < \frac{1}{2M}$$

то $x_1^{(2)} > x_1^{(1)} - Mx_1^{(1)^2} > \alpha_1 - M\alpha_1^2 = \alpha_2 > 0$ и вообще

$$x_1^{(m)} > \alpha_m > 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{3.7}$$

Но существует конечный предел

$$l = \lim_{m\to\infty} \alpha_m = \lim_{m\to\infty} \alpha_0 \prod_{k=0}^{m-1} (1 - M\alpha_k) = x_1 \prod_{k=0}^{\infty} (1 - M\alpha_k)$$

Из (3.6) при $m \to \infty$, получим $l = l(1 - Ml)$, т. е. $l = 0$. Как известно, из равенства нулю бесконечного произведения

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - M\alpha_k) = 0$$

следует, что $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots = \infty$. Отсюда в силу (3.7) имеем $x_1^{(0)} + x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \ldots = \infty$ и лемма доказана.

Теорема 1. Если в особом случае в положении равновесия $x = 0$ правые части систем (1^+) и (1^-), т. е. векторы $f^+(0)$ и $f^-(0)$, не коллинеарны, то положение равновесия неустойчиво.

Доказательство. В силу неколлинеарности векторов $f^+(0)$ и $f^-(0)$ в формулах (2.9) хотя бы одно из S_j не равно нулю. Пусть для конкретности $S_2 \neq 0$. Без нарушения общности можно считать, что $S_2 > 0$, поскольку случай $S_2 < 0$ переходит в случай $S_2 > 0$, если направление оси x_2 изменить на противоположное.

---

[1] При доказательстве леммы используются рассуждения, примененные Леви — Чивита [10] при исследовании двусторонней устойчивости (при $t \to \pm\infty$) неподвижной точки преобразования двумерной плоскости в себя.

Из (2.9) находим, что

$$x_2^{(1)} > x_2 + \frac{1}{2} S_2 x_1 \tag{3.8}$$

коль скоро $|x| < \Delta$ при достаточно малом $\Delta > 0$.

Допустим, что рассматриваемое положение равновесия устойчиво. Тогда устойчива неподвижная точка $x = 0$ преобразования G, отображающего $(n-1)$-мерное полупространство $x_1 \geqslant 0$, $x_n = 0$ в себя. Это значит, что при некотором $\delta = \delta(\Delta) > 0$ из $x_1 \geqslant 0$, $|x| < \delta$ следует, что все

$$|x^{(k)}| < \Delta, \qquad x_1^{(k)} \geqslant 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Тогда, итерируя неравенство (3.8), получим

$$\Delta > x_2^{(m)} > x_2 + \frac{1}{2} S_2 \sum_{k=0}^{m-1} x_1^{(k)} \qquad (m = 0, 1, \ldots)$$

Отсюда $x_1^{(0)} + x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \ldots < \infty$, что противоречит лемме. Следовательно, $x = 0$ — неустойчивая неподвижная точка. Теорема доказана.

Пусть теперь все

$$S_j = 0 \qquad (j = 2, \ldots, n-1) \tag{3.9}$$

т. е. векторы $f^+(0)$ и $f^-(0)$, коллинеарны. В этом случае формулы (2.9) можно записать в матричном виде:

$$x^{(1)} = x + x_1(Ax + z) \qquad (x_1 \geqslant 0) \tag{3.10}$$

где

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots a_{pp} \end{Vmatrix} \qquad (a_{11} = g(0)) \tag{3.11}$$

а z — сумма нелинейных членов и $p = n - 1$. Тогда имеют место следующие теоремы[1].

Теорема 2. Неподвижная точка $x = 0$ отображения (полупространства $x_1 \geqslant 0$ в себя), задаваемого формулами (3.10), и соответственно положение равновесия $x = 0$ устойчивы, когда все характеристические числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части. При этом положение равновесия $x = 0$ будет асимптотически устойчивым, если особая точка $x = 0$ системы (Г) асимптотически устойчива.

Теорема 3. Неподвижная точка $x = 0$ отображения G, задаваемого формулой (3.10), и соответственно положение равновесия $x = 0$ неустойчивы, если хотя бы одно из характеристических чисел матрицы A имеет положительную вещественную часть.

Доказательство теоремы 2. Если все $\operatorname{Re}\lambda(A) < 0$, то существует положительно-определенная квадратичная форма $V(x, x)$, для которой в

---

[1] Теорема 2 развивает положения, содержащиеся в § 3 работы Ю. И. Неймарка [8] и использовавшиеся для случая релейных систем в [5].

силу линейной системы уравнений $dx/dt = Ax$ производная $dV/dt = 2V(x, Ax)$ — отрицательно-определенная квадратичная форма. Здесь через $V(x, y)$ обозначается билинейная форма, соответствующая квадратичной форме $V(x, x)$. Тогда для любого вектора x

$$V(x, Ax) \leqslant -rV(x, x) \qquad (r > 0)$$

Пусть $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$. Тогда

$$V[x + \varepsilon(Ax + z),\ x + \varepsilon(Ax + z)] \leqslant$$
$$\leqslant V(x, x) + 2\varepsilon V(x, Ax + z) + \varepsilon\varepsilon^* V(Ax + z, Ax + z) =$$
$$= V(x, x) + 2\varepsilon\Big\{V(x, Ax) + \frac{1}{2}\varepsilon^* V(Ax, Ax) + V(x, z) + \varepsilon^* V(Ax, z) + $$
$$+ \frac{1}{2}\varepsilon^* V(z, z)\Big\} \qquad (3.12)$$

Выберем число $\varepsilon^* > 0$ столь малым, чтобы выполнялось неравенство

$$V(x, Ax) + \frac{1}{2}\varepsilon^* V(Ax, Ax) \leqslant -(r - \eta) V(x, x)$$

где $\eta > 0$ — достаточно малое число, меньшее чем $^1/_2\, r$. Кроме того, выберем $\Delta > 0$ столь малым, чтобы при $V(x, x) < \Delta$:

1) имело место неравенство $|x| < \varepsilon^*$,

2) выражение в фигурных скобках в (3.12) было меньше или равно

$$-(r - 2\eta) V(x, x)$$

3) из $x_1 \geqslant 0$ следовало $x_1^{(1)} \geqslant 0$.

Тогда, полагая $q = r - 2\eta > 0$, из (3.12) получим

$$V[x + \varepsilon(Ax + z),\ x + \varepsilon(Ax + z)] \leqslant (1 - 2q\varepsilon) V(x, x)$$
$$\text{при } V(x, x) < \Delta,\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon^* \qquad (3.13)$$

Заменяя в (3.13) ε на $x_1 > 0$ и замечая, что $x + x_1(Ax + z) = x^{(1)}$ найдем

$$V(x^{(1)}, x^{(1)}) \leqslant (1 - 2qx_1) V(x, x)$$

и вообще

$$V(x^{(m)}, x^{(m)}) \leqslant V(x, x) \prod_{k=0}^{m-1} (1 - 2qx_1^{(k)}) \qquad (3.14)$$

Отсюда следует, что $V(x^{(m)}, x^{(m)}) \leqslant V(x, x) < \Delta$ и, следовательно, все $|x^{(m)}| < \varepsilon^*$, $x_1^{(m)} \geqslant 0$ при достаточно малом $\Delta > 0$. Таким образом, доказано, что $x = 0$ — устойчивая неподвижная точка преобразования G.

Согласно доказанной выше лемме $x_1^{(0)} + x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \ldots = \infty$ при $x_1 > 0$. Но тогда

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 - 2qx_1^{(k)}) = 0$$

и, переходя к пределу при $m \to \infty$, из (3.14) найдем

$$\lim_{m\to\infty} V(x^{(m)}, x^{(m)}) = 0, \quad \text{или} \quad |x^{(m)}| \to 0 \ \text{ при } m \to \infty \text{ и } x_1 > 0$$

Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Если хотя бы одно из $\operatorname{Re}\lambda(A) > 0$, то существует принимающая в некоторых точках положительные значения квадратичная форма $V(x, x)$, для которой

$$V(x, Ax) \geqslant \mu V(x, x) + r|x|^2 \qquad (\mu > 0,\ r > 0) \tag{3.15}$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: Пусть $V(Ax+z, Ax+z) \leqslant 0$. В этом случае имеют место неравенства, получающиеся из (3.12) заменой знака $\leqslant$ на знак $\geqslant$. Рассуждая аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 2, получаем при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, $|x| < \Delta < \varepsilon^*$ (ε^* и Δ достаточно малы)

$$V[x+\varepsilon(Ax+z),\ x+\varepsilon(Ax+z)] \geqslant (1+2\mu\varepsilon)V(x, x) + \varepsilon q|x|^2 \tag{3.16}$$

где q — любое положительное число, для которого выполняется неравенство $q < 2r$.

Второй случай: Пусть $V(Ax+z, Ax+z) > 0$. Соотношение (3.16) имеет место и здесь в силу (3.15), так как в этом случае

$$V[x+\varepsilon(Ax+z),\ x+\varepsilon(Ax+z)] > V(x, x) + 2\varepsilon V(x, Ax+z)$$

Выберем теперь такое x, при котором $V(x, x) > 0$ и $x_1 > 0$. Тогда из (3.16) находим

$$V[x+\varepsilon(Ax+z),\ x+\varepsilon(Ax+z)] > V(x, x) + \varepsilon q|x|^2 \tag{3.17}$$

Заменяя в (3.17) ε на x_1, получим

$$V(x^{(1)}, x^{(1)}) > V(x, x) + qx_1|x|^2 \tag{3.18}$$

Пусть

$$M = \max_{x \neq 0} \frac{V(x, x)}{|x|^2}$$

Тогда $M > 0$ и из (3.18) следует

$$V(x^{(1)}, x^{(1)}) > (1 + hx_1)V(x, x) \qquad \left(h = \frac{q}{M} > 0\right) \tag{3.19}$$

Допустим, что неподвижная точка $x = 0$ преобразования G, отображающего полупространство $x_1 \geqslant 0$ в себя, устойчива. Тогда существует такое малое число $\delta > 0$, что при $|x| < \delta$ и $x_1 > 0$ все $|x^{(k)}| < \Delta$ и все $x_1^{(k)} > 0$. Тогда

$$V(x^{(m)}, x^{(m)}) \geqslant V(x, x) \prod_{k=0}^{m+1} (1 + hx_1^{(k)}) \tag{3.20}$$

Но согласно доказанной лемме $x_1^{(0)} + x_1^{(1)} + x_1^{(2)} + \ldots = \infty$ и поэтому

$$\prod_{k=0}^{\infty} (1 + hx_1^{(k)}) = \infty$$

Из (3.20), поскольку $V(x, x) > 0$, имеем

$$\lim V(x^{(m)}, x^{(m)}) = \infty \qquad \text{при } m \to \infty$$

что противоречит предположению об устойчивости неподвижной точки $x = 0$ отображения G. Теорема доказана.

Теоремы 2 и 3 дают достаточные условия устойчивости и неустойчивости положения равновесия $x = 0$ в случае, когда векторы $f^+(0)$ и $f^-(0)$ коллинеарны. Элементы матрицы A, фигурирующей в этих теоремах, могут быть непосредственно выражены через коэффициенты степенных разложений функций $f_j^+(x)$ и $f_j^-(x)$

$$f_j^{\pm}(x) = c_j^{\pm} + \sum_{k=1}^{n} c_{jk}^{\pm} x_k + \sum_{k,l=1}^{n} c_{jkl}^{\pm} x_k x_l + \ldots$$

$$(j = 1, \ldots, n; \; c_{jkl}^{\pm} = c_{jlk}^{\pm})$$

при помощи формул

$$a_{11} = -\left[\frac{1}{3c_1^2 c_{n1}}\left(c_1 c_{n1} c_{11} + c_1 c_{n1} c_{nn} - c_1^2 c_{n1} - 2c_1 \sum_{k=2}^{n-1} c_k c_{n1k} + 4c_{n1} \sum_{k=2}^{n-1} c_k c_{1k}\right)\right]_-^+$$

$$a_{jk} = \left[\frac{2}{c_1^2}(c_j c_{1k} - c_1 c_{jk})\right]_-^+ \qquad (j, k = 2, 3, \ldots, n-1)$$

где использовано обозначение

$$[\Phi(c)]_-^+ = \Phi(c^+) - \Phi(c^-)$$

Выражения для элементов a_{k1} $(k > 1)$ не приводятся, так как они не влияют на характеристические числа матрицы.

Приведенные формулы получаются путем вычисления членов второго порядка в правых частях формул для преобразований G_1, G_2 и G.

Поступила 3 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Солнцев Ю. И. Об устойчивости по Ляпунову положения равновесия системы двух дифференциальных уравнений в случае разрывных правых частей. МГУ, Уч. зап., Математика, 1951, т. IV, вып. 148.
2. Цыпкин Я. З. Теория релейных систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1955.
3. Болтянский В. Г., Понтрягин Л. С. Об устойчивости положения равновесия «релейной» системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Тр. 3-го Всесоюзн. математ. съезда, т. 1. Изд-во АН СССР, 1956.
4. Аносов Д. В. Об устойчивости положения равновесия релейных систем. Автоматика и телемеханика, 1959, № 2.
5. Неймарк Ю. И., Кинякин С. Д. Об устойчивости состояния равновесия релейной системы. Автоматика и телемеханика, 1959, № 9.
6. André I. und Seibert. Über Stückweise lineare Differentialgleichungen die bei Regelungsproblemen auftrenen. I und II, Archiv der Mathematik, Bd. VII, Nr. 2, 3.
7. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с кусочно-непрерывной правой частью. Усп. матем. наук, 1958, т. XIII, вып. 4 (82).
8. Неймарк Ю. И. Метод точечных преобразований в теории нелинейных колебаний. I. Изв. высших учебн. завед., Радиофизика, 1958, № 1.
9. Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р. Об устойчивости периодических движений. ПММ, 1958, т. XXII, № 6.
10. Levi-Civita T. Sopra alcuni Criterí di instabilita. Annali di Matematica, т. V, Milano, 1901.