Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПЕРЕХОДЕ В РЕШЕНИИ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Ф. М. Кириллова

(Свердловск)

Рассматривается оптимальная задача [1-6] для линейных систем дифференциальных уравнений, когда ограничены интегралы от p-степени $(p > 1)$ модуля управляющей функции.

§ 1. Пусть система регулирования описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t)u(t) \tag{1.1}$$

где $x = \{x_1(t), \ldots, x_n(t)\}$ — изображающий вектор в фазовом пространстве, элементы $a_{ik}(t)$ $(i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, n)$ матрицы $A(t)$, а также компоненты $b_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ вектора $b(t)$ непрерывны по времени t.

Будем предполагать, что на управляющую функцию $u(t)$ наложено ограничение

$$\int_{t_0}^{t} |u(\tau)|^p d\tau \leqslant 1 \qquad (p > 1) \tag{1.2}$$

Оптимальная задача [1-6] заключается в следующем: среди управляющих функций, удовлетворяющих условию (1.2), найти такую $u(\tau, p)$, чтобы движущаяся по траектории уравнения (1.1) точка достигла из начального положения $x(t_0) = x_0$ начала координат за кратчайшее время $T(p)$.

Это время $T(p)$ называется оптимальным временем переходного процесса, а соответствующее управление $u(\tau, p)$ — оптимальной управляющей функцией.

Условие (1.2) при $p = 2$ соответствует ограничению средней мощности управляющих воздействий $u(\tau)$. Изучение данной задачи при ограничении (1.2) для произвольного $p > 1$ представляет интерес для предельного перехода к задаче с ограничениями

$$|u(\tau)| \leqslant 1 \qquad (t_0 \leqslant \tau \leqslant t) \tag{1.3}$$

Ниже в § 2 доказывается, что оптимальное управление $u(\tau, p)$ для случая ограничений (1.2), являющееся функцией непрерывной, сходится по мере при $p \to \infty$ к оптимальному управлению $u(\tau)$ такой же задачи при условии (1.3); показано также, что функция $T(p)$ при $p \to \infty$ имеет своим пределом время оптимального процесса при ограничении условием (1.3).

Это положение обосновывает возможность приближенного решения оптимальной задачи при условии (1.3) путем сведения ее к такой же задаче при ограничениях (1.2), которую, как известно, можно решить обычными приемами вариационного исчисления.

Рассмотрим пространство $L_q(t_0, t)$ функций $\varphi(\tau)$, суммируемых с q-степенью:

$$\int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)|^q d\tau < +\infty \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$$

Символом $\Lambda(t, q; \varphi)$ обозначим норму функции $\varphi(\tau)$, определив ее следующим образом:

$$\Lambda(t, q; \varphi) = \left(\int_{t_0}^{t} |\varphi(\tau)|^q d\tau\right)^{\frac{1}{q}}$$

Как показано в работе [7], общий вид линейных функционалов f, определенных над пространством $L_q(t_0, t)$, будет таким:

$$f(\varphi) = \int_{t_0}^{t} \varphi(\tau)\eta(\tau)\,d\tau$$

При этом функция $\eta(\tau)$ удовлетворяет неравенству

$$\Lambda(t, p, \eta) < +\infty$$

а норма $\Lambda(t, p, f)$ функционала f определяется из равенства

$$\Lambda(t, p, f) = \Lambda(t, p, \eta)$$

Решение уравнения (1.1) имеет вид [8]:

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} F(t)F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

где $F(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (1.1) при $B(t) \equiv 0$, поэтому, если точка $x(t)$ в момент времени t попадает в начало координат, для отыскания управления $u(\tau)$ имеем уравнение

$$-x_0 = \int_{t_0}^{t} F^{-1}(\tau)b(\tau)u(\tau)\,d\tau \tag{1.4}$$

Иными словами, оптимальная задача сведена к задаче, рассмотренной в работе [9]: среди линейных функционалов f, определенных над пространством $L_q(t_0, t)$, нужно найти такой, который бы удовлетворял условию (1.2) и являлся решением уравнения (1.4).

На уравнение (1.1) наложим следующее условие (A): пусть функция $\gamma(\tau)$, определяемая соотношением

$$\gamma(\tau) = (lF^{-1}(\tau)b(\tau)) \tag{1.5}$$

обращается в нуль лишь в отдельных изолированных точках τ.

Здесь символ $(lF^{-1}(\tau)b(\tau))$ означает скалярное произведение вектора l ($l_i = \text{const}$, $l_1^2+\ldots+l_n^2 \neq 0$) на вектор $F^{-1}(\tau)b(\tau)$.

Как показано в работе [9], уравнение (1.4) имеет решение, если

$$\Lambda(t, p, f) \geqslant \lambda(t, q) \qquad \left(\frac{1}{\lambda(t, q)} = \min \Lambda(t, q, \gamma) \text{ при } (lx_0) = -1\right)$$

Заметим, что при выполнении условия (А)

$$\min \Lambda(t, q, \gamma) \quad \text{при } (lx_0) = -1$$

всегда достигается [9], т. е. существует вектор $l^{(q)}$ такой, что

$$\min \Lambda(t, q, \gamma) = \Lambda(t, q, \gamma^{(q)}) \tag{1.6}$$

Функцию $\gamma^{(q)}(\tau)$, удовлетворяющую условию (1.6), будем в дальнейшем называть минимизирующим элементом пространства $L_q(t_0, t)$ при условии $(lx_0) = -1$.

Функция $\lambda(t, q)$ при фиксированных начальных данных x_0 непрерывна и строго монотонна по t. Этот факт подробно доказан в работе [6] при $q = 1$; здесь не приводится доказательства этого свойства функции $\lambda(t, q)$ при $q > 1$, так как оно является повторением (с незначительными изменениями) доказательства непрерывности и монотонности функции $\lambda(t, q)$ по t для $q = 1$.

Следовательно, если существует хотя бы одно значение t, при котором выполняется неравенство $\lambda(t, q) \leqslant 1$ (надо учесть [6], что функция $\lambda(t, q)$ является убывающей по t), то оптимальная задача имеет единственное решение. Оптимальное время регулирования, очевидно, находится из соотношения $\lambda(t, q) = 1$.

Предположим, что неравенство $\lambda(t, q) \leqslant 1$ возможно, и найдем оптимальную управляющую функцию $u(\tau, p)$. Пусть функция $\gamma^{(q)}(\tau)$ является минимизирующим элементом при условии $(lx_0) = -1$.

Как показано в работе [9], каждый минимизирующий при условии $(lx_0) = -1$ элемент $\gamma^{(q)}(\tau)$ является экстремальным для функционала f, норма которого равна $\lambda(t, q)$. Следовательно, если $\gamma^{(q)}(\tau)$ — минимизирующий при условии $(lx_0) = -1$ элемент, а $\Lambda(t, p, f) = \lambda(t, q)$, то имеем

$$-(l^{(q)}x_0) = 1 = \int_{t_0}^{t} \gamma^{(q)}(\tau)\, u(\tau)\, d\tau = \lambda(t, q)\, \Lambda(t, q, \gamma^{(q)}) \tag{1.7}$$

Запишем неравенство Гельдера для функций $\gamma^{(q)}(\tau)$ и $u(\tau)$:

$$\int_{t_0}^{t} |\gamma^{(q)}(\tau)\, u(\tau)|\, d\tau \leqslant \Lambda(t, q, \gamma^{(q)})\, \Lambda(t, p, u) \tag{1.8}$$

Из (1.7) и (1.8) вытекает, что управляющий вектор $u(\tau)$ обладает следующим свойством:

$$\operatorname{sign} u(\tau) = \operatorname{sign} \gamma^{(q)}(\tau)$$

Строго говоря, это соотношение справедливо почти всюду на отрезке $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$.

Знак равенства в (1.8) возможен тогда и только тогда, когда $|u(\tau)|^p = C\,|\gamma^{(q)}(\tau)|^q$, поэтому для определения постоянной C из (1.8) имеем такое соотношение:

$$\int_{t_0}^{t} C^{-p} |\gamma^{(q)}(\tau)|^q d\tau = 1 \quad \text{или} \quad c = \Lambda^{-pq}(t, q, \gamma^{(q)})$$

Следовательно, управляющую функцию $u(\tau)$ можно находить по формуле

$$u(\tau) = \lambda^q(t, q) | \gamma^{(q)}(\tau) |^{\frac{q}{p}} \operatorname{sign} \gamma^{(q)}(\tau) \tag{1.9}$$

Оптимальное управление $u(t, p)$, как уже было сказано, мы получим, если положим в (1.9) $\lambda(t, q) = 1$. Значит, оно имеет вид:

$$u(t, p) = |(l^{(q)}F^{-1}(t)\, b(t))|^{\frac{q}{p}} \operatorname{sign}(l^{(q)}F^{-1}(t)\, b(t)) \tag{1.10}$$

§ 2. Рассмотрим поведение функции $\lambda(t, q)$ при $q \to 1$. Это требуется для исследования оптимального управления $u(t, p)$ и оптимального времени $T(p)$ при $p \to \infty$.

Лемма 2.1. Функция $\lambda(t, q)$ при фиксированных x_0, t и $q \to 1$ имеет предел, равный $\lambda(t)$, причем

$$\frac{1}{\lambda(t)} = \min \Lambda(t, 1, \gamma) \quad \text{при } (lx_0) = -1 \tag{2.1}$$

Доказательство. Пусть q_s — произвольная убывающая последовательность и пусть $\lim q_s = 1$ при $s \to \infty$.

Если

$$\frac{1}{\lambda(t, q_s)} = \Lambda(t, q_s, \gamma^{(q_s)}) \quad \text{при } (l^{(q_s)}x_0) = -1 \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{\lambda(t)} = \Lambda(t, 1, \gamma^{\circ}) \quad \text{при } (l^{\circ}x_0) = -1 \tag{2.3}$$

то

$$\Lambda(t, q_s, \gamma^{(q_s)}) \leqslant \Lambda(t, q_s, \gamma^{\circ}) \tag{2.4}$$

Но при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$ из соотношения (1.5) имеем $|\gamma^{\circ}(\tau)| \leqslant M$, где M — постоянная величина. Значит,

$$\Lambda(t, q_s, \gamma^{(q_s)}) \leqslant M_1 \tag{2.5}$$

где M_1 — постоянная (при фиксированном t) величина.

Для функции $\gamma(\tau)$ выполняется условие (А); в таком случае можно показать, что последовательность $l^{(q_s)}$ ограничена равномерно по s.

Следовательно, существует подпоследовательность $l^{(q_{sm})}$ последовательности $l^{(q_s)}$ такая, что

$$\lim l^{(q_{sm})} = l^{(1)} \quad \text{при } m \to \infty, \qquad (l^{(1)}x_0) = -1$$

Очевидно также, что функция $|\gamma^{(q_{sm})}(\tau)|^{q_{sm}}$ при фиксированном m непрерывна по τ, а при $m \to \infty$ имеем

$$|\gamma^{(q_{sm})}(\tau)|^{q_{sm}} \to |\gamma^{(1)}(\tau)|$$

равномерно по τ. Поэтому в неравенстве

$$\Lambda(t, q_{sm}, \gamma^{(q_{sm})}) \leqslant \Lambda(t, q_{sm}, \gamma^{\circ})$$

можно перейти к пределу. Получаем

$$\Lambda(t, 1, \gamma^{(1)}) \leqslant \Lambda(t, 1, \gamma^{\circ}) \tag{2.6}$$

С другой стороны,

$$\Lambda(t,\ 1,\ \gamma^\circ) = \min \Lambda(t,\ 1,\ \gamma) \qquad \text{при } (lx_0) = -1$$

Значит, справедливо неравенство

$$\Lambda(t,\ 1,\ \gamma^{(1)}) \geqslant \Lambda(t,\ 1,\ \gamma^\circ) \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.8) имеем

$$\Lambda(t,\ 1,\ \gamma^{(1)}) = \Lambda(t,\ 1,\ \gamma^\circ)$$

Но это значит, что функция $\gamma^{(1)}(\tau)$ является минимизирующим элементом при условии $(lx_0) = -1$. Рассуждения справедливы для любой последовательности $\Lambda(t,\ q_s)$ и ее подпоследовательностей, поэтому доказано, что $\lim \lambda(t,\ q) = \lambda(t)$ при $q \to 1$.

Пусть $u(t)$ — оптимальное управление и T — оптимальное время регулировования для начальных данных x_0 при ограничении (1.3).

Если оптимальная задача рассмотрена при ограничениях (1.2), то, как и выше, оптимальное управление и оптимальное время будем обозначать соответственно через $u(\tau,\ p)$, $T(p)$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $N > 0$, что неравенства

$$|T(p) - T| < \varepsilon, \qquad \operatorname{mes} E(|u(\tau,\ p) - u(\tau)| \geqslant \sigma) < \varepsilon$$

выполняются [1], если только $p > N$.

Доказательство. Так как функция $\lambda(t)$ при фиксированном x_0 непрерывна и монотонно убывает по t, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\beta > 0$, что выполняются неравенства

$$\lambda(t - \varepsilon) > 1 + \beta, \qquad \lambda(t + \varepsilon) < 1 - \beta$$

Кроме того, функция $\lambda(t,\ q)$ при фиксированных x_0, t непрерывна справа по q.

Значит, для $\beta > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что при $q - 1 < \delta_1$ имеем

$$|\lambda(t + \varepsilon,\ q) - \lambda(t + \varepsilon)| < \beta, \qquad |\lambda(t - \varepsilon,\ q) - \lambda(t - \varepsilon)| < \beta$$

Из приведенных неравенств и непрерывности функции $\lambda(t,\ q)$ по t (при фиксированном q) следует, что при

$$q - 1 < \delta_1 \qquad \left(p > \frac{\delta_1}{\delta_1 - 1}\right)$$

существует такое $T(p)$, при котором

$$\lambda(T(p),\ q) = 1, \qquad |T(p) - T| < \varepsilon$$

Покажем теперь, что

$$\operatorname{mes} E(|u(\tau,\ p) - u(\tau)| \geqslant \sigma) < \varepsilon \qquad \text{при } p > \frac{\delta}{\delta - 1}, \qquad \delta > 0$$

В работах [2-6] доказано, что функция $u(\tau)$ имеет вид:

$$u(\tau) = \operatorname{sign}(l^\circ F^{-1}(\tau)\, b(\tau)) \qquad (t_0 \leqslant \tau \leqslant t_0 + T)$$

---

[1] Символ $\operatorname{mes} E(|u(\tau,\ p) - u(\tau)| \geqslant \sigma)$ означает: мера множества, на котором справедливо неравенство $|u(\tau,\ p) - u(\tau)| \geqslant \sigma$, где σ — любое положительное число.

Рассмотрим множество векторов $l^{(q)}$ из формулы (1.10).

Множество векторов $l^{(q)}$, как было сказано при доказательстве леммы (2.1), ограничено равномерно по q. Кроме того [10], оно ограничено равномерно по $T(p)$.

Если $l^{(q_s)}$ — сходящаяся последовательность и

$$\lim l^{(q_s)} = l^{(1)} \quad \text{при } s \to \infty$$

то можно показать (см. доказательство леммы 2.1), что функция $l^{(1)}F^{-1}(\tau)\,b(\tau))$ является минимизирующим элементом при условии

$$(lx_0) = -1$$

Известно [9], что

$$\operatorname{sign}(l^{(1)}F^{-1}(\tau)\,b(\tau)) = \operatorname{sign}(l^{\circ}F^{-1}(\tau)\,b(\tau))$$

Следовательно, какую бы малую ε_1-окрестность ($\varepsilon_1 < \varepsilon$) нулей функции $(l^{\circ}F^{-1}(\tau)\,b(\tau))$ мы не взяли, всегда найдется такое $\delta_2 > 0$, что для $q_s - 1 < \delta_2$ нули функций $(l^{(q_s)}F^{-1}(\tau)\,b(\tau))$ попадут в эту ε_1-окрестность нулей функции $(l^{\circ}F^{-1}(\tau)\,b(\tau))$.

Вне такой ε_1-окрестности знаки функции $(l^{(q_s)}F^{-1}(\tau)\,b(\tau))$ и $(l^{\circ}F^{-1}(\tau)b(\tau))$ совпадают.

Так как отношение $q_s / p_s < \delta_3$, где δ_3 — малое положительное число, то

$$\operatorname{mes} E(|u(\tau, p) - u(\tau)| \geqslant \sigma) < \varepsilon_1 \quad \text{при } q_s - 1 < \delta_3$$

Итак, окончательно имеем

$$|T(p) - T| < \varepsilon, \ \operatorname{mes} E(|u(\tau, p) - u(\tau)| \geqslant \sigma) < \varepsilon$$

если только $p > N$ (N можно взять равным наибольшему из чисел $\delta_1/(\delta_1 - 1)$ и $\delta_3/(\delta_3 - 1)$. Теорема доказана.

Можно убедиться, что все рассуждения § 1 и 2 справедливы для случая нескольких управляющих функций уравнений (1.1).

Поступила 23 III 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Понтрягин Л. С. К теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР, т. 110, вып. 1, 1956.
2. Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов в линейных системах. Докл. АН СССР, т. 116, вып. 1, 1957.
3. Гамкрелидзе Р. В. Теория оптимальных по быстродействию процессов в линейных системах. Изв. АН СССР, т. 22, вып. 4, 1958.
4. Гамкрелидзе Р. В. К общей теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР, т. 123, вып. 2, 1958.
5. Красовский Н. Н. Об одной задаче оптимального регулирования. ПММ, т. XX1, вып. 5, 1957.
6. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика, т. 18, № 11, 1957.
7. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. ГИТТЛ, М. — Л., 1951.
8. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. ГИТТЛ, М.— Л., 1956.
9. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Ст. 4. ГОНТИЗ НТВУ, 1938.
10. Кириллова Ф. М. О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования. Изв. ВУЗ, № 4/5, 1958.