Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Описывается приближенный метод вычисления оптимальной по быстродействию траектории [1] в линейной управляемой системе. Оптимальная задача заменяется вспомогательной «сглаженной» задачей, которая исследуется обычными приемами вариационного исчисления.

§ 1. Рассмотрим регулируемую систему, описываемую дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = Ax + bu \tag{1.1}$$

где x — n-мерный вектор фазовых координат системы, A — $n \times n$-матрица b — n-вектор, характеризующие структуру системы, $u(t)$ — скалярная функция, описывающая управляющее воздействие. Допустимы управления, стесненные условием

$$|u(t)| \leqslant 1 \tag{1.2}$$

Оптимальная задача [1—3] формулируется следующим образом.

Задача А. При данных начальных условиях $x = x_0$, $t = t_0 = 0$ требуется определить допустимую функцию $u^\circ(t)$ (оптимальное управление-такую, что траектория $x^\circ(t) = x(x_0, t, u^\circ)$ системы (1.1), порожденная управлением $u^\circ(t)$, приходит в точку $x = 0$ за наименьшее время T°. Решение этой задачи определяется принципом максимума [2], причем оптимальная траектория $x^\circ(t)$ и вспомогательная вектор-функция $\psi^\circ(t)$ «импульсов» $\psi_i^\circ(t)$ являются решением некоторой гамильтоновой системы при начальных условиях $\psi_i^\circ(0) = c_{i0}$ $(i = 1, \ldots, n)$, обеспечивающих попадание траектории $x^\circ(t)$ в точку $x = 0$. Трудность конкретного вычисления $u^\circ(t)$ и $x^\circ(t)$ заключается, в частности, в определении постоянных c_{i0}. В настоящей заметке описывается приближенный способ вычисления $u^\circ(t)$ и $x^\circ(t)$, при котором задача сводится к классической вариационной проблеме, решаемой прямым методом.

Наряду с задачей А рассмотрим вспомогательные задачи. Пусть $U_\varepsilon[x, t]$ — непрерывно дифференцируемая по x_i функция, удовлетворяющая условиям (1.3)

$$0 \leqslant U_\varepsilon \leqslant 1 \quad \text{при всех } t, x; \qquad U_\varepsilon[0, t] = 0; \qquad U_\varepsilon[x, t] = 0 \quad \text{при } t > \tau_\varepsilon$$

$$U_\varepsilon[x, t] \geqslant q(\varepsilon) \quad \text{при } \|x\| \geqslant \varepsilon > 0, \ 0 \leqslant t \leqslant \theta_\varepsilon \tag{1.4}$$

$$(\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2})$$

$$\lim q(\varepsilon) = 1, \qquad \lim \theta_\varepsilon = \infty, \qquad \lim \tau_\varepsilon = \infty \qquad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{1.5}$$

Задача A_ε. При данных $x = x_0$, $t_0 = 0$ требуется определить допустимое управление $u_\varepsilon^\circ(t)$ такое, что

$$T_\varepsilon^\circ = \int_0^\infty U_\varepsilon[x(x_0, t, u_\varepsilon^\circ), t]\, dt = \min \tag{1.6}$$

Задача $A_{\varepsilon k}$. При данных $x = x_0$, $t_0 = 0$ требуется определить управление $u_{\varepsilon k}^\circ(t)$ такое, что

$$T_{\varepsilon k}^\circ = \int_0^\infty (U_\varepsilon[x(x_0, t, u_{\varepsilon k}^\circ), t] + [u_{\varepsilon k}^\circ(t)]^{2k})\, dt - T^\circ = \min \tag{1.7}$$

где k — натуральное число и функция $u_{\varepsilon k}^\circ$ не стеснена условием (1.2).

Везде в дальнейшем предполагается, что точка x_0 лежит в области G_0, из которой возможно допустимое управление в точку $x = 0$ за конечное время $T(x_0)$. Если, в частности, выполняется условие

$$\sum_{l=0}^{n-1} \lambda_l A^l b \neq 0 \qquad \text{при} \qquad \sum_{l=0}^{n-1} \lambda_l^2 \neq 0 \tag{1.8}$$

то G_0 — открытая область, охватывающая точку $x = 0$. Если при этом собственные числа матрицы A имеют отрицательные действительные части, то область G_0 совпадает [2—5] со всем пространством $\{x\}$.

§ 2. Обоснованием замены задачи A задачами A_ε и $A_{\varepsilon k}$ при малом $\varepsilon > 0$ и большом k может служить следующий результат.

Теорема 2.1. Справедливы равенства

$$\lim T_\varepsilon^\circ = T^\circ \qquad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{2.1}$$

$$\lim T_{\varepsilon k}^\circ = T^\circ \qquad \text{при } \varepsilon \to 0,\ k \to \infty \tag{2.2}$$

причем функции $u_\varepsilon^\circ(t)$ и $u_{\varepsilon k}^\circ(t)$ при $\varepsilon \to 0$, $k \to \infty$ сходятся в среднем к функции $u^\circ(t)$ на отрезке $[0, T^\circ]$ (в L_2).

Доказательство. Справедливость теоремы можно проверить, опираясь на результаты [3—6]. Приведем, однако, подробное доказательство, опирающееся на рассуждения из [2—7].

Очевидно, справедливы неравенства

$$T_\varepsilon^\circ < T^\circ, \qquad T_{\varepsilon k}^\circ < T^\circ \tag{2.3}$$

Рассмотрим коротко вопрос о существовании оптимального управления $u^\circ(t)$. Поскольку из точки x_0 возможно допустимое управление $u(t)$ в точку $x = 0$ за время $T(x_0)$, справедливо равенство

$$-x_0 = \int_0^{T(x_0)} F^{-1}(\tau)\, b\, u(\tau)\, d\tau \tag{2.4}$$

где $F^{-1}(\tau) = \|F_{ij}^{-1}\|_1^n$ — матрица, обратная к фундаментальной матрице решений системы $dx/dt = Ax$.

Это означает, что существует линейный функционал [8]

$$f[h] = \int_0^{T(x_0)} h(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \qquad \left(h \in L(0, T(x_0))\right) \tag{2.5}$$

такой, что

$$f[h_i] = -x_{i0}, \qquad h_i(\tau) = \sum_{j=1}^{n} F_{ij}^{-1}(\tau)\, b_j \qquad (i = 1,\ldots,n)$$

$$\|f\| = \sup\left(|u(\tau)| \leqslant 1 \quad \text{при } 0 \leqslant \tau \leqslant T(x_0)\right) \tag{2.6}$$

Пусть среди функций $h_i(\tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant T(x_0)$ имеется точно m $(m \leqslant n)$ линейно независимых и пусть для определенности это первые m функций h_i, причем $h_j = \lambda_{j1}h_1 + \ldots + \lambda_{jm}h_m$ $(j = m+1,\ldots,n)$. Тогда согласно (2.5) имеем $x_{j0} = \lambda_{j1}x_{10} + \ldots + \lambda_{jm}x_{m0}$ $(j = m+1,\ldots,n)$ и для попадания в точку $x = 0$ при $t = T^\circ \leqslant T(x_0)$ при управлении u° достаточно удовлетворить условиям

$$f^\circ[h_i] = -x_{i0} \qquad (i = 1,\ldots,m) \qquad \|f^\circ\| \leqslant 1 \tag{2.7}$$

где функционал f° определен функцией u°:

$$f^\circ[h] = \int_0^{T^\circ} h(\tau)\, u^\circ(\tau)\, d\tau \tag{2.8}$$

Функционал f° [или, что то же [8], измеримую функцию $u^\circ(\tau)$], удовлетворяющий условиям (2.7), можно построить тогда и только тогда, когда [7]

$$\min\left[\int_0^{T^\circ} \left|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(\tau)\right| d\tau\right] \geqslant 1 \qquad \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x_{i0} = -1\right) \tag{2.9}$$

причем в нашем случае функция $u^\circ(\tau)$ (при наименьшем T°) определяется единственным образом из условия [3 7]

$$u^\circ(\tau) = \operatorname{sign}\left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^\circ h_i(\tau)\right] \tag{2.10}$$

где λ_i° — решения задачи (2.9). Итак, мы попутно проверили, что $u^\circ(\tau)$ имеет вид (2.10) и точка $x = 0$ достижима лишь из точек $x_{j0} = \lambda_{j1}x_{10} + \ldots + \lambda_{jm}x_{m0}$ $(j = m+1,\ldots,n)$. Заметим здесь еще, что, поскольку функции $h_i(\tau)$ построены из решений $F_{ij}^{-1}(\tau)$ стационарной линейной системы дифференциальных уравнений, величина $\lambda_1^\circ h_1(\tau) + \ldots + \lambda_m^\circ h_m(\tau)$ обращается в нуль лишь при отдельных изолированных значениях τ. Предположим от противного, что условие (2.1) [или (2.2)] не выполняется. Тогда по (1.6), (1.7), (1.3) — (1.5) и (2.3) заключаем о существовании последовательности

$$u_l = u_{\varepsilon_l}(t) = (\text{или } u_l^* = u_{\varepsilon_l k_l}(t) = [\operatorname{sign} u_{\varepsilon_l k_l}(t)](\sup[|u_{\varepsilon_l k_l}(t)|, 1]))$$

такой, что траектория $x(x_0, t, u_l)$ [или $x(x_0, t, u_l^*)$] приводится на поверхности $\|x\| = \varepsilon_l$ за время T_l (или T_l^*), причем

$$\lim \varepsilon_l = 0, \qquad \lim T_l = T_0 < T^\circ \quad (\text{или } \lim T_l^* = T_0^* < T^\circ) \qquad \text{при } l \to \infty$$

Из этой последовательности можно выделить слабо сходящуюся в $L_2(0, T_0)$ к функции $u_0(t)$ (или к функции $u_0^*(t)$ соответственно) подпоследовательность. В формуле для решения системы (1.1)

$$x(t) = F(t)\,x_0 + \int_0^t F(t)\,F^{-1}(\tau)\,bu(\tau)\,d\tau \tag{2.11}$$

для этой подпоследовательности возможен предельный переход под знаком интеграла, поэтому управления (измеримые) $u_0(t)$ [или $u_0^*(t)$] приводят траекторию системы (1.1) в точку $x=0$ при $t = T_0^* < T^\circ$ (или $t = T_0^* < T^\circ$). Это невозможно, так как $u^\circ(t)$ — оптимальное управление, и согласно рассуждениям, приведенным выше в начале доказательства теоремы, минимум достигается на функции $u^\circ(t)$ вида (2.10) не только относительно допустимого класса кусочно-непрерывных функций, но и относительно более широкого класса измеримых ограниченных функций. Полученное противоречие доказывает равенства (2.1) и (2.2).

Справедливость второго заключения теоремы при условиях (2.1) и (2.2) проверяется также, исходя из слабой компактности функций $u_\varepsilon(t)$ [или $u_{\varepsilon k}^*(t) = [\operatorname{sign} u_{\varepsilon k}(t)] \sup\,|u_{\varepsilon k}(t)|,\ 1)]$ при $0 \leqslant t \leqslant T^\circ$ и на основании единственности оптимального управления $u^\circ(t)$, определяемого (2.10).

§ 3. В этом параграфе выводятся необходимые условия оптимальности управления $u_\varepsilon^\circ(t)$ и траектории $x_\varepsilon^\circ(t)$ для задачи A_ε.

Теорема 3.1. Оптимальное управление $u_\varepsilon^\circ(t)$ для задачи A_ε удовлетворяет условию

$$u_\varepsilon^\circ(t)\ \ (\psi^\circ(t)\cdot b) = \max \tag{3.1}$$

где вектор-функция $\psi^\circ(t)$ — частное решение системы

$$\frac{d\psi}{dt} = -A'\psi + \eta(t) \qquad \left(\eta_i(t) = \frac{\partial U_\varepsilon[x_\varepsilon^\circ(t),\,t]}{\partial x_i}\right) \tag{3.2}$$

(A' — транспонированная матрица A, $\eta(t)$ — вектор-функция).

Примечание 3.1. Если, в частности, $U[x,t] = 1$ при $\|x\| > \varepsilon$, $t < \theta_\varepsilon$, то вектор-функция $\psi^\circ(t)$, определяющая по (3.1) оптимальное управление $u_\varepsilon^\circ(t)$, является частным решением системы

$$\frac{d\psi}{dt} = -A'\psi \qquad (\text{при } \|x\| > \varepsilon) \tag{3.3}$$

что совпадает с условиями принципа максимума [2] для задачи A, связанными с условиями (3.1) и (3.2) по теореме 2.1.

Доказательство теоремы 3.1. Задача A_ε есть обыкновенная вариационная задача. Поскольку решение системы (1.1) определяется равенством (2.11), вариация δT_ε функционала (1.6), соответствующая вариации $\delta u_\varepsilon(t)$, имеет вид:

$$\delta T_\varepsilon = \int_0^\infty \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial U_\varepsilon[x_\varepsilon^\circ(t),\,t]}{\partial x_i} \int_0^t \left[\sum_{j=1,\ e=1,}^n F_{ij}(t)\,F^{-1}{}_{je}(\tau)\,b_e \delta u(\tau)\right] d\tau\right] dt$$

Если вариация $\delta u(\tau)$ равна нулю всюду вне окрестности точки $\tau = \tau^*$, то

$$\operatorname{sign}\delta T_\varepsilon = -f(\tau^*)\operatorname{sign}\delta u(\tau^*) =$$

$$= \operatorname{sign}\delta u(\tau^*) \int_{\tau^*}^\infty \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1,\ e=1}^n F_{ij}(t)\,F_{je}^{-1}(\tau^*)\,b_e\right]\right] dt \tag{3.4}$$

Матрица $F^{-1}(t)$ является транспонированной фундаментальной матрицей решений системы (3.3). Поэтому, дифференцируя интеграл (3.4) по параметру τ^*, проверяем, что функцию $f(t)$ можно рассматривать как скалярное произведение вектора b на некоторое частное решение $\psi^\circ(t)$ системы (3.2). Вследствие минимальности T_ε° вариация δT_ε не может быть отрицательной, что вследствие (3.4) и доказывает теорему

Примечание 3.2. Использование условий (3.1), (3,2) для конкретного вычисления траекторий затруднительно, так как не указано правило для определения начальных условий решения $\psi^\circ(t)$. Однако рассмотрение сглаженной задачи A_ε выясняет возможность подхода к оптимальной задаче А как к обыкновенной вариационной проблеме. Кроме того, с этой точки зрения легко проследить связь методов решения оптимальных задач с классическими вариационными методами механики. При этом функция $U_\varepsilon[x, t]$ играет формально ту же роль, что и слагаемые, соответствующие потенциальной энергии в функции Гамильтона механической задачи. Заметим попутно, что при такой аналогии обобщенная функция Ляпунова $v^\circ(x, t)$, определенная в статье [5], соответствует действию S механической системы в теории уравнений Гамильтона — Якоби. Аналогия между вариационными принципами механики и методами решения оптимальных задач в несколько ином аспекте, чем в этом примечании, рассматривалась Л. И. Розоноэром [9].

§ 4. В этом параграфе описывается прямой метод решения задачи $A_{\varepsilon k}$. Выберем в качестве $U_\varepsilon[x, t]$ функцию

$$U_\varepsilon = 1 - \exp(-x^2/2\varepsilon) \text{ при } t \in [0, \tau_\varepsilon], \qquad U_\varepsilon = 0 \text{ при } t > \tau_\varepsilon$$

где τ_ε — достаточно большое число; иначе говоря, интеграл (1.7) заменяем интегралом от функции $U_\varepsilon = 1 - \exp(-x^2/2\varepsilon)$ в конечных пределах $[0, \tau_\varepsilon]$. Задачу $A_{\varepsilon k}$ можно решать прямым методом.

Будем искать решение — оптимальное управление — в виде

$$u(t) = a_1 \sin(t/\tau_\varepsilon) + \ldots + a_l \sin(lt/\tau_\varepsilon) \tag{4.1}$$

Подстановка $u(t)$ в формулы (2.11) и (1.7) сводит задачу к проблеме

$$\min F(a_1, \ldots, a_l) = \min \left[\int_0^{\tau_\varepsilon} (U_\varepsilon[x(x_0, t, u), t] + u^{2k}(t))\, dt \right]$$
$$\text{при } (-\infty < a_i < \infty, i = 1, \ldots, l \tag{4.2}$$

Если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало, а числа k и l достаточно велики, то управление $u'(t) = a_1^\circ \sin(t/\tau_\varepsilon) + \ldots + a_l^\circ(lt/\tau_\varepsilon)$, где a_i° — решения задачи (4.2), будет отличаться (в среднем) сколь угодно мало от оптимального управления $u^\circ(t)$ и траектория $x(x_0, t, u')$ будет сколь угодно мало отличаться от $x^\circ(t)$ в каждый момент t переходного процесса. Действительно, минимум функции $F(a_1, \ldots, a_l)$, очевидно, не меньше $T_{\varepsilon k}^\circ$. В то же время функцию $u^\circ(t)$ при достаточно большом l можно сколь угодно точно (в среднем) аппроксимировать многочленом (4.1) и, следовательно, при достаточно малом $\varepsilon > 0$, больших k и l, величина $\min F(a_1, \ldots, a\ )$ будет сколь угодно мало отличаться от $T_{\varepsilon k}^\circ$.

Таким образом, в соответствии с теоремой 2.1 при $\varepsilon \to 0$, $k \to \infty$, $l \to \infty$ решение (4.1) задачи (4.2) должно сходиться в среднем к $u^\circ(t)$, что и доказывает наше утверждение.

Минимум (4.2) можно искать методом наискорейшего спуска. Если коэффициенты a_i считать функциями параметра ϑ, то для определения минимизирующих значений a_i° следует интегрировать (численно) систему уравнений

$$\frac{da_i(\vartheta)}{d\vartheta} = -\int_0^{\tau_\varepsilon} \Big(\sum_j^n \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}\Big[\int_0^t \sum_{q,s}^n F_{jq} F_{qs}^{-1}\, b_s \sin\frac{i\tau}{\tau_\varepsilon}\, d\tau\Big] + 2ku^{2k-1}(t)\sin\frac{it}{\tau_\varepsilon}\Big)\, dt$$

$$F_{jq} = F_{jq}(t),\ F_{qs}^{-1} = F_{qs}^{-1}(\tau) \qquad (i = 1, \ldots,) \tag{4.3}$$

при $\vartheta \geqslant 0$ и при начальных условиях $a_{i0} = a_i(0)$, лежащих в сфере притяжения особой точки $a_i = a_i^\circ$ системы (4.3). Процедура наискорейшего спуска по траекториям (4.3) может быть осуществлена на оптимизаторе — системе экстремального регулирования [10], причем ограничение $u(t)$, создаваемое членом u^{2k}, может быть заменено другим, более удобным при моделировании ограничением.

Примечания 4.1. Описанный способ вычисления оптимальной траектории путем сглаживания задачи и приложения прямых методов можно применять и в случае нелинейной нестационарной системы регулирования.

4.2. Следует отметить, что описанный способ решения позволяет определить лишь индивидуальное оптимальное управление $u^\circ(t)$ для заданных наперед начальных условий. Этот метод мало эффективен в применении к задаче синтеза, т. е. к задаче определения оптимального управления u° в виде функции $u^\circ(x)$ фазовых координат x_1.

Поступила 12 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Фельдбаум А. А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. Автоматика и телемеханика, 1953, № 6.
2. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования. УМН, 1959, т. XIV, вып. 1.
3. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. Автоматика и телемеханика, 1957, т. XVIII, № 11.
4. Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР, 1957, т. 116 вып. 1.
5. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулировния. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
6. Кириллова Ф. М. О корректности постановки одной задачи оптимального регулирования. Изв. Высш. учебн. заведений, Математика, 1958, № 4 (5).
7. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Статья IV, стр. 171. ГОНТИ — НТВУ. 1938.
8. Люстерник Л. А. и Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Гостехиздат, М.— Л., 1951.
9. Розоноэр Л. И. Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. III. Автоматика и телемеханика, 1959, т. 20, вып. 12.
10. Цянь Сюе-сень. Техническая кибернетика. Изд-во иностр. лит-ры, М., стр. 225—253, 1956.