Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ВОЛНЫ В ГРУНТЕ ПОД ИЗОЛЯЦИЕЙ ХОЛОДИЛЬНИКОВ

М. Д. Хаскинд

(Одесса)

В настоящее время расчеты теплопередачи в основной своей части базируются на искусственном введении коэффициента теплоотдачи α, при помощи которого условно суммируется ряд явлений теплового контакта двух сред. В приближенных инженерных расчетах и прикидках средняя величина этого коэффициента имеет решающее значение, поскольку в какой-то мере учитывается интегральный эффект этого контакта.

В математическом отношении сложный характер теплового контакта формулируется в виде граничного условия третьего рода с коэффициентом пропорциональности α. Во многих случаях это условие носит чисто локальный характер и по существу определяет собой отношение нормальной производной к разности температур в данной точке границы раздела, вообще говоря, зависящее от основных физических параметров. Это обстоятельство хорошо известно и ставит под сомнение целесообразность математического решения ряда тепловых задач с указанным граничным условием.

Вместе с тем в рассматриваемых автором контактных задачах теплопередачи при наличии изоляционного слоя [1, 11] переход к граничным условиям третьего рода становится возможным, так как в общем выражении для теплового сопротивления слагаемое α^{-1} пренебрежимо мало по сравнению с тепловым сопротивлением изоляции.

Данная статья, сформулированная применительно к температурным волнам под изоляцией холодильников, не является столь частной темой хотя бы потому, что к этому классу прикладных задач примыкают тепловые расчеты оснований различного рода сооружений и некоторые диффузионные и термодиффузионные задачи. Главным в постановке является то, что здесь вводятся новые характеристики в виде обобщенных комплексных коэффициентов теплопередачи, отражающих нестационарный характер рассматриваемых явлений.

Подобного рода задачи имеют также интерес в акустике и прикладной электродинамике для импедансных границ раздела. Однако в отличие от этих задач численные значения соответствующих безразмерных параметров таковы, что позволяют применять совершенно иные приближенные методы и строить точное решение данной задачи при помощи аппарата функций Матье.

§ 1. Постановка задачи. Температурное поле в грунте под изоляцией холодильников состоит из стационарного распределения температур, обусловленного средними значениями температур воздуха над поверхностью грунта, грунтовых вод и в камерах холодильника [1], и нестационарного температурного поля, возникающего в связи с колебаниями этих температур около соответствующих средних значений.

Для определения нестационарного температурного поля рассмотрим бесподвальный холодильник с изолированными полом шириной $2l$ и с толщиной изоляции δ. Пусть функции $\theta^\circ(x, y, t)$ и $\theta(x, y, t)$ определяют нестационарные распределения температур в изоляции и в грунте, H — глубина залегания грунтовых вод, λ_u и $\lambda_г$ — коэффициенты теплопроводности изоляции и грунта, α_c — коэффициент теплоотдачи пола холодильника, a_u и $a_г$ — коэффициенты температуропроводности изоляции и грунта, тогда для определения нестационарного поля температур в однородном грунте имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=\frac{1}{a_г}\frac{\partial\theta}{\partial t}\quad \text{при } -H\leqslant y\leqslant 0 \tag{1.1}$$

и граничные условия

$$\theta=\Delta\theta_0 \quad \text{при } y=0,\quad |x|>l \tag{1.2}$$

$$\lambda_г\frac{\partial\theta}{\partial y}=\lambda_u\frac{\partial\theta^\circ}{\partial y},\qquad \theta=\theta^\circ \quad \text{при } y=0,\ |x|<l \tag{1.3}$$

$$\theta=\Delta\theta_b \quad \text{при } y=-H \tag{1.4}$$

где $\Delta\theta_0(t)$ и $\Delta\theta_b(t)$ — отклонения температур воздуха над поверхностью грунта и грунтовых вод от средних значений θ_0 и θ_b.

Функция $\theta^\circ(x,y,t)$ определяется при помощи условия

$$-\lambda_u\frac{\partial\theta^\circ}{\partial y}=\alpha_c(\theta^\circ-\Delta\theta_c)\quad \text{при } y=\delta,\ |x|<l \tag{1.5}$$

где $\Delta\theta_c(x,t)$ — отклонение температуры в камерах холодильника от среднего значения $\theta_c(x)$.

В случае однородной изоляции функция $\theta^\circ(x,y,t)$ удовлетворяет при $0\leqslant y\leqslant\delta$ и $|x|<l$ уравнению теплопроводности (1.1), в котором $a_г$ следует заменить на a_u. Из анализа размерности [1] следует, что с большой для практики точностью это уравнение в пределах толщины изоляции принимает упрощенный вид:

$$\frac{\partial^2\theta^\circ}{\partial y^2}=\frac{1}{a_u}\frac{\partial\theta^\circ}{\partial t}\quad \text{при } 0\leqslant y\leqslant\delta,\qquad |x|<l \tag{1.6}$$

являющийся верным, так как толщина изоляции δ во много раз меньше ширины $2l$.

Во всем дальнейшем изучим реакцию на гармоническое воздействие, т. е. положим

$$\begin{gathered}\Delta\theta_0=Ae^{j\omega t},\qquad \Delta\theta_b=Be^{j\omega t},\qquad \Delta\theta_c=Ce^{j\omega t}\\ \theta(x,y,t)=\theta(x,y)e^{j\omega t},\qquad \theta^\circ(x,y,t)=\theta^\circ(x,y)e^{j\omega t}\qquad (j=\sqrt{-1})\end{gathered} \tag{1.7}$$

Здесь и дальше в комплексных выражениях, содержащих экспоненциально-временной множитель $\exp j\omega t$, следует рассматривать только действительную часть.

На основании (1.7) уравнения (1.1) и (1.6) преобразуются в следующие:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}=(1+j)^2\sigma_г^2\theta\quad \text{при } -H\leqslant y\leqslant 0\qquad \left(\sigma_г=\left(\frac{\omega}{2a_г}\right)^{1/2}\right) \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial^2\theta^\circ}{\partial y^2}=(1+j)^2\sigma_u^2\theta^\circ\quad \text{при } 0\leqslant y\leqslant\delta,\ |x|<l\qquad \left(\sigma_u=\left(\frac{\omega}{2a_u}\right)^{1/2}\right) \tag{1.9}$$

Из уравнения (1.9) имеем (1.10)

$$\theta^\circ(x,y)=C_1(x)\operatorname{ch}\frac{\mu_u}{\delta}y+C_2(x)\operatorname{sh}\frac{\mu_u}{\delta}y\quad \text{при } 0\leqslant y\leqslant\delta,\ |x|<l\ (\mu_u=(1+j)\sigma_u\delta)$$

где C_1 и C_2 — постоянные интегрирования, зависящие от x.

Используя соотношения (1.3), (1.5), (1.7) и (1.10), получаем следующее условие для $\theta(x, y)$:

$$-\lambda_г \frac{\partial\theta}{\partial y} = k_1\theta - k_2 C \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < l \tag{1.11}$$

где k_1 и k_2 — обобщенные комплексные коэффициенты теплопередачи, определяемые соотношениями

$$k_1 = \frac{\lambda_u \mu_u (\alpha_c \delta \operatorname{ch} \mu_u + \lambda_u \mu_u \operatorname{sh} \mu_u)}{\delta (\alpha_c \delta \operatorname{sh} \mu_u + \lambda_u \mu_u \operatorname{ch} \mu_u)}, \qquad k_2 = \frac{\lambda_u \mu_u \alpha_c}{\alpha_c \delta \operatorname{sh} \mu_u + \lambda_u \mu_u \operatorname{ch} \mu_u} \tag{1.12}$$

Для неоднородной изоляции, состоящей из отдельных слоев, граничное условие (1.11) сохраняет свой вид, только k_1 и k_2 определяются более сложными выражениями. При малых значениях $|\mu_u|$ ($\operatorname{sh} \mu_u \approx \mu_u$, $\operatorname{ch} \mu_u \approx 1$) обобщенные комплексные коэффициенты теплопередачи принимают одно и то же стационарное значение коэффициента теплопередачи:

$$k = \left(\frac{1}{\alpha_c} + \frac{\delta}{\lambda_u}\right)^{-1}$$

Однако в рассматриваемом случае величина $|\mu_u|$ не является малой. В самом деле, для изоляции из стеклянной ваты $a_u = 10^{-3}$ *м²/час* и поэтому при годовых колебаниях $\mu_u = (1 + j)\,\delta / 1.65$, где δ порядка 1 *м*.

Таким образом, требуется определить функцию $\theta(x, y)$ из уравнения (1.8), удовлетворяющую условию (1.11) и условиям (1.2) и (1.4), принимающим на основании (1.7) вид:

$$\theta = A \quad \text{при } y = 0 \ |x| > l, \qquad \theta = B \quad \text{при } y = -H \tag{1.13}$$

Поставленную задачу можно несколько упростить, полагая

$$\theta(x, y) = \theta_1(x, y) + U(x, y)$$

$$\theta_1 = \left(\frac{A}{\operatorname{sh} \mu_г} - B \operatorname{cth} \mu_г\right) \operatorname{sh} \mu_г \left(1 + \frac{y}{H}\right) + B \operatorname{ch} \mu_г \left(1 + \frac{y}{H}\right) \tag{1.14}$$

$$(\mu_г = (1 + t)\, \sigma_г H)$$

где функция $U(x, y)$ определяется из уравнения (1.8) и согласно (1.11) и (1.13) удовлетворяет условиям

$$\lambda_г \frac{\partial U}{\partial y} + k_1 U = v_c^\circ \quad \text{при } y = 0 \ |x| < l \tag{1.15}$$

$$\left(v_c^\circ = k_2 C - A \left(k_1 + \frac{\lambda_г \mu_г}{H} \operatorname{cth} \mu_г\right) + B \frac{\lambda_г \mu_г}{H \operatorname{sh} \mu_г}\right)$$

$$U = 0 \quad \text{при } y = 0, \ |x| > l \text{ и при } y = -H \tag{1.16}$$

Отметим еще, что для многокамерного холодильника и при наличии внешней изоляции в грунте вокруг наружных стен холодильника величина C представляет собой кусочно-гладкую функцию, равную постоянной A на участках внешней изоляции.

§ 2. Построение решения. Покажем, что функция $U(x, y)$, определяемая из уравнения (1.8), регулярная в полосе $-H < y < 0$ и удовлетворяющая условиям (1.15) и (1.16), при заданных значениях v_c° определяется единственным способом. Действительно, пусть $U_1(x, y)$ и $U_2(x, y)$ — две функции, регулярные в полосе $-H < y < 0$ и удовлетворяющие уравнению (1.8) и условиям (1.15) и (1.16); тогда функция $U_0 = U_1 - U_2$ удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial U_0}{\partial y} = -\frac{k}{\lambda_г} U_0 \quad \text{при } y=0,\ |x|<l, \qquad U_0 = 0 \text{ при } y=-H \text{ и } y=0,\ |x|>l$$

и исчезает при $x \to \pm\infty$. Пользуясь формулой Грина, получаем

$$\iint\limits_S \left(\nabla U_0^* \cdot \nabla U_0 + \frac{j\omega}{a_г} U_0^* U_0\right) dS = -\frac{k_1}{\lambda_г} \int\limits_{-l}^{l} U_0^* U_0 dx \tag{2.1}$$

где S — площадь полосы $-H \leqslant y \leqslant 0$ и U_0^* — комплексно-сопряженная величина. Из соотношения (2.1) имеем (2.2)

$$\iint\limits_S \nabla U_0^* \cdot \nabla U_0 dS = -\frac{\operatorname{Re}(k_1)}{\lambda_г} \int\limits_{-l}^{l} |U_0|^2 dx \quad -\frac{\omega}{a_г} \iint\limits_S |U_0|^2 dS = -\frac{\operatorname{Im}(k_1)}{\lambda_г} \int\limits_{-l}^{l} |U_0|^2 dx$$

Для выяснения знаков действительной и мнимой частей коэффициента k_1 воспользуемся упрощенными выражениями обобщенных комплексных коэффициентов теплопередач. Заметим, что для изоляции из стеклянной ваты $\lambda_u = 0{,}03$ *ккал / м час* °C, $a_u = 10^{-3}$ *м*^{2} */ час* и значение α_c порядка 10 *ккал / м*^{2} *час* °C. Поэтому для годовых колебаний $|\lambda_u \mu_u / \alpha_c \delta| \approx 0.004$. Следовательно, с достаточной для практики точностью можно пренебречь этим отношением в формулах (1.12) и поэтому имеем следующие упрощенные выражения[1]:

$$k_1 = k\mu_u \operatorname{cth} \mu_u = \frac{kz\,[\operatorname{sh} 2z + \sin 2z + j(\operatorname{sh} 2z - \sin 2z)]}{2(\operatorname{ch}^2 z - \cos^2 z)}$$

$$k_2 = \frac{k\mu_u}{\operatorname{sh} \mu_u} = \frac{kz\,[\operatorname{sh} z \cos z + \operatorname{ch} z \sin z + j(\operatorname{sh} z \cos z - \operatorname{ch} z \sin z)]}{\operatorname{ch}^2 z - \cos^2 z} \tag{2.3}$$

$$k = \frac{\lambda_u}{\delta} \approx \left(\frac{1}{\alpha_c} + \frac{\delta}{\lambda_u}\right)^{-1}, \qquad z = \sigma_u \delta$$

где k — приближенное значение стационарного коэффициента теплопередачи. Из (2.3) следует, что $\operatorname{Re}(k_1) > 0$ и $\operatorname{Im}(k_1) > 0$ и согласно (2.2) $U_0 = 0$. Построим теперь точное решение задачи при отсутствии грунтовых вод ($H = \infty$, $\theta_1 = A \exp[(1+j)\sigma_г y]$). С этой целью перейдем к эллиптической системе координат ξ и η при помощи соотношений

$$x = l \operatorname{ch} \xi \cos \eta, \qquad y = l \operatorname{sh} \xi \sin \eta \tag{2.4}$$

В эллиптических координатах условия (1.15) и (1.16) примут вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \nu_1 \sin \eta u = v_c \sin \eta \quad \text{при } \xi = 0,\ -\pi < \eta < 0,$$

$$u = 0 \quad \text{при } \eta = 0,\ \eta = -\pi \qquad (\xi > 0)$$

$$\left(v_c = \nu_2 C - (\nu_1 + \mu) A,\ \nu_1 = \frac{k_1 l}{\lambda_г},\ \nu_2 = \frac{k_2 l}{\lambda_г},\ \mu = (1+j)\sigma_г l\right) \tag{2.5}$$

а уравнение (1.8) преобразуется в следующее:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \mu^2 (\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta) u = 0 \qquad \left(\mu^2 = j\frac{\omega l^2}{a_г}\right) \tag{2.6}$$

---

[1] При $|\mu_u| \gg 1$ приходим к предельным выражениям $k_1 = \lambda_u (1+j) \sigma_u$ и $k_1 = 0$, переводящие (1.11) в граничные условия М. А. Леонтовича.

Воспользуемся совокупностью произведений функций Матье $\mathrm{Se}_n(\xi)\,\mathrm{se}_n(\eta)$, являющихся частными решениями уравнения (2.6), где $\mathrm{se}_n(\eta)$ — ортогональные системы периодических функций со следующей нормировкой:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [\mathrm{se}_n(\eta)]^2 \, d\eta = \pi \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Функция $\mathrm{se}_n(\eta)$ представляется рядом Фурье [2]

$$\mathrm{se}_n(\eta) = \sum_{r=1}^{\infty}{}' B_{nr} \sin r\eta \tag{2.7}$$

где индексы n и r — одинаковой четности и коэффициенты B_{nr} являются целыми функциями параметра $q = -{}^1/_4\,\mu^2$. Функция же $\mathrm{Se}_n(\xi)$ представляется также в виде ряда через функции Бесселя [3, 4].

Представим функцию U в виде следующего ряда:

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{Se}_n(\xi)}{\mathrm{Se}_n(0)} \mathrm{se}_n(\eta) \tag{2.8}$$

Это выражение удовлетворяет второму из условий (2.5) и на основании свойств функции $\mathrm{Se}_n(\xi)$ обеспечивает затухание температурных волн при $y \to -\infty$. Для определения коэффициентов a_n подставим (2.8) в первое из условий (2.5), тогда получим

$$\begin{gathered} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Se}_n'(0)}{\mathrm{Se}_n(0)} a_n \,\mathrm{se}_n(\eta) + \nu_1 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin\eta \,\mathrm{se}_m(\eta) = v_c \sin\eta \\ \left(-\pi < \eta < 0, \ \mathrm{Se}_n'(0) = \left(\frac{d\,\mathrm{Se}_n}{d\xi}\right)_{\xi=0}\right) \end{gathered} \tag{2.9}$$

Разложим теперь в промежутке $-\pi < \eta < 0$ в ряд по функциям Матье $\mathrm{se}_n(\eta)$ следующие функции:

$$\sin\eta\,\mathrm{se}_m(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} d_{nm}\,\mathrm{se}_n(\eta) \qquad \left(d_{nm} = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin\eta\,\mathrm{se}_m(\eta)\,\mathrm{se}_n(\eta)\,d\eta\right) \tag{2.10}$$

$$v_c \sin\eta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\mathrm{se}_n(\eta) \qquad \left(b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} v_c \sin\eta\,\mathrm{se}_n(\eta)\,d\eta\right) \tag{2.11}$$

Произведя вычисления коэффициентов d_{nm} при помощи (2.7), получим

$$d_{nm} = \sum_{r,\,i=1}^{\infty} B_{nr} B_{mi}\, l_{ri} \tag{2.12}$$

где коэффициенты l_{ri} отличны от нуля только при r и i одинаковой четности и имеют следующий вид:

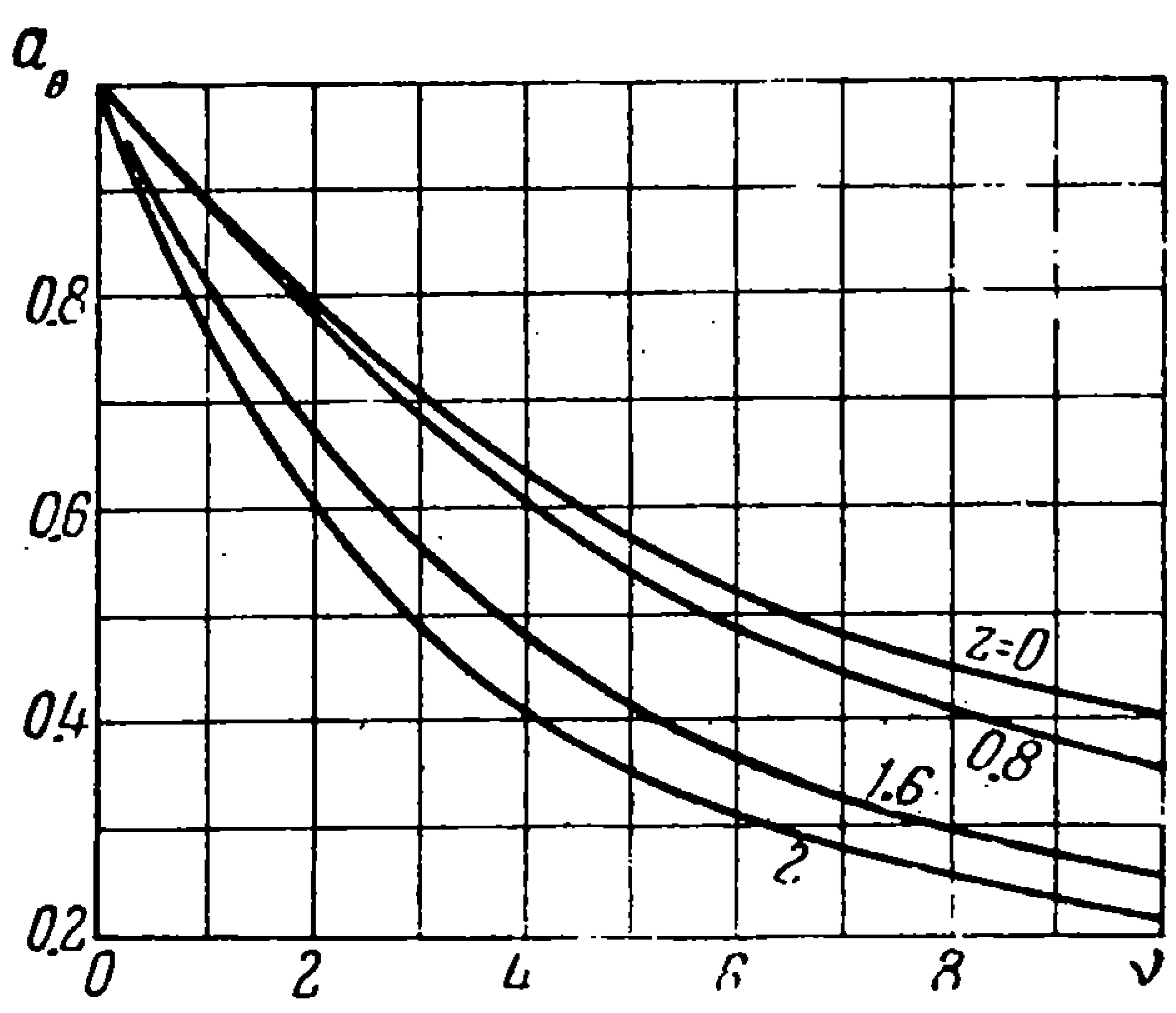
$$\begin{aligned} l_{2p+1,\,2q+1} &= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4(p+q+1)^2 - 1} - \frac{1}{4(p-q)^2 - 1}\right] \\ l_{2p,\,2q} &= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{4(p+q)^2 - 1} - \frac{1}{4(p-q)^2 - 1}\right] \end{aligned} \tag{2.13}$$

Поэтому и коэффициенты d_{nm} отличны от нуля только при n и m одинаковой четности. Подставив (2.10) и (2.11) в (2.9) и сравнив коэффициенты при $\mathrm{se}_n(\eta)$, получим две независимые бесконечные системы уравнений для коэффициентов a_n:

$$\frac{\mathrm{Se}'^{(0)}_{2s+1}}{\mathrm{Se}^{(0)}_{2s+1}}\, a_{2s+1} + \nu_1 \sum_{l=0}^{\infty} d_{2s+1,\,2l+1} a_{2l+1} = b_{2s+1} \qquad (s = 0, 1, \ldots) \tag{2.14}$$

$$\frac{\mathrm{Se}_{2s}'(0)}{\mathrm{Se}_{2s}(0)}\, a_{2s} + \nu_1 \sum_{l=1}^{\infty} d_{2s,\,2l}\, a_{2l} = b_{2s} \qquad (s = 1, 2, \ldots) \tag{2.15}$$

Из этих уравнений коэффициенты a_n определяются при помощи бесконечных определителей [5], причем в силу однозначности решения определители этих систем уравнений отличны от нуля. В практически важном случае $v_c(x)$ является четной функцией, и тогда все $b_{2s} = 0$, а следовательно, $a_{2s} = 0$. Отметим, в частности, что при $v_c = \mathrm{const}$ коэффициенты $b_{2s+1} = v_c B_{2s+1}$.



Фиг. 1

При малых значениях $|\mu^2|$ функция $\mathrm{Se}_n(\xi) \approx \exp(-n\xi)$ и $d_{nm} \approx l_{nm}$. Поэтому при малых $|\mu^2|$ системы уравнений (2.14) и (2.15) совпадают с системами, рассмотренными в [1], разрешимость которых доказана.

После того как коэффициенты a_n определены, можно по формулам (1.7), (1.14) и (2.8) найти нестационарное распределение температур под изоляцией холодильника. В частности, колебания температуры в центре под изоляцией холодильника определяются выражением ($v_c(x)$ — четная функция)

$$\theta(0, 0, t) = \left[A + \sum_{s=0}^{\infty} a_{2s+1}\,\mathrm{se}_{2s+1}\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] e^{j\omega t}$$
$$\left(\mathrm{se}_{2s+1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p B_{2s+1,\,2p+1}\right) \tag{2.16}$$

Легко также вычислить количество тепла Q, идущее в холодильник за единицу времени. Для этого пользуемся формулой

$$Q = -\lambda_г \int^{l} \left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=0} dx = \left[-2\lambda_г \mu A + \lambda_г \int_{-\pi}^{0} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)_{\xi=0} d\eta\right] e^{j\omega t}$$

которая на основании (2.7) и (2.8) принимает следующий вид:

$$Q = -2\lambda_г \left[\mu A + \sum_{s,\,p=1}^{\infty} \frac{\mathrm{Se}'_{2s+1}(0)}{(2p+1)\,\mathrm{Se}_{2s+1}(0)}\, a_{2s+1} B_{2s+1,\,2p+1}\right] e^{j\omega t} \tag{2.17}$$

Приближенное определение коэффициентов a_n осуществляется таким же путем, как в стационарном случае [1].

В качестве первого приближения можно положить $a_г = \infty$, т. е. $|\mu^2| = 0$, тогда результаты вычислений при $C = 0$ приводят к зависимости $a_0 = |\theta(0, 0, t)/A|$ от $\nu = kl/\lambda_г$, представленной на фиг. 1 для различных значений $z = \sigma_u \delta$.

Если ширина изоляции достаточно велика, то краевой эффект проникновения температурных волн под изоляцию можно изучить в замкнутом виде, рассматривая полубесконечную изоляцию в промежутке $(0, \infty)$. Представим для этого случая функцию $u(x, y)$ в виде интеграла плоских температурных волн $(H = \infty)$:

$$U(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(w)\, e^{-jwx + y\sqrt{w^2+\mu_0^2}}\, dw \qquad (\mu_0 = (1+j)\,\sigma_г) \tag{2.18}$$

Условия (1.16) и (1.15) приводят к уравнениям для определения Γ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(w)\, e^{-jwx}\, dw = 0 \quad \text{при } x < 0 \tag{2.19}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{w^2 + \mu_0^2} + \mu_0 Z\right) \Gamma(w)\, e^{-jwx}\, dw = v \quad \text{при } x > 0 \tag{2.20}$$

$$\left(Z = \frac{k_1}{\lambda_г \mu_0},\ v = \frac{k_2}{\lambda_г} C - (1+Z)\,\mu_0 A \right)$$

Общая теория такого вида уравнений [6—9] основывается на факторизации выражения

$$\sqrt{w^2 + \mu_0^2} + \mu_0 Z = f_+(w)\, f_-(w) \tag{2.21}$$

где функция $f_+(w)$ регулярна и не имеет нулей в верхней полуплоскости $(\operatorname{Im} w \geqslant 0)$, а функция $f_-(w)$ регулярна и не имеет нулей в нижней полуплоскости $(\operatorname{Im} w \leqslant 0)$, причем $f_-(w) = f_+(-w)$ и

$$f_+(i\mu_0 \cos\tau) = \sqrt{\mu_0(\cos\beta + \cos\tau)}\, \exp\left(-\frac{1}{2\pi} \int_{\tau-\beta}^{\tau+\beta} \frac{u\,du}{\sin u}\right) \qquad (Z = \sin\beta) \tag{2.22}$$

Положим $v = r\exp(-jsx)$, где s имеет отрицательную мнимую часть, которую в окончательном решении следует устремить к нулю, тогда решения уравнений (2.19) и (2.20) определяются формулой

$$\Gamma(w) = -\frac{r}{2\pi j} \frac{1}{f_-(s)\, f_+(w)\,(w - s)} \tag{2.23}$$

Формулы (2.18) и (2.23) определяют решение для рассматриваемого значения v. Последующим суммированием находим общее решение для заданной функции $v(x)$.

§ 3. Демпфирующие свойства изоляционного слоя. Пусть ширина изоляции пола холодильника $2l$ достаточно велика, так что на протяжении всей ширины и при $-H < y < 0$ можно пользоваться упрощенным уравнением (1.8), т. е.

$$\frac{d^2\theta}{dy^2} = (1+j)^2 \sigma_г^2\, \theta \tag{3.1}$$

Решая это уравнение и удовлетворяя условиям (1.4) и (1.11), получим

$$\theta(y, t) = \left[D \operatorname{sh} \mu_г \left(1 + \frac{y}{H}\right) + B \operatorname{ch} \mu_г \left(1 + \frac{y}{H}\right)\right] e^{j\omega t} \tag{3.2}$$

$$D = \frac{k_2 C}{k_1 \operatorname{sh} \mu_г + \lambda_г \mu_г H^{-1} \operatorname{ch} \mu_г} - \frac{B}{k_1 \operatorname{ch} \mu_г + \lambda_г \mu_г H^{-1} \operatorname{sh} \mu_г}$$

В частности, колебания температуры под изоляцией ($y = 0$) определяются выражением

$$\theta(0, t) = \frac{k_2}{k_1 + \lambda_г \mu_г H^{-1} \operatorname{cth} \mu_г} Ce^{j\omega t} + \left[\left(\operatorname{ch} \mu_г - \frac{\operatorname{sh} \mu_г}{k_1 \operatorname{ch} \mu_г + \lambda_г \mu_г H^{-1} \operatorname{sh} \mu_г}\right) Be^{j\omega t} \qquad (3.4)$$

Проведем количественный анализ выражений (3.2)—(3.4) при $H = \infty$. В этом случае имеем

Фиг. 2

$$\theta(0, t) = \Phi(j\omega) Ce^{j\omega t}, \qquad \Phi(j\omega) = \frac{k_2}{k_1 + (1+j)\sigma_г \lambda_г}$$

$$\theta(y, t) = \theta(0, t) e^{(1+j)\sigma_г y} \qquad (3.5)$$

Последняя из формул показывает, что характер затухания температурных волн по глубине имеет такой же вид, как и в случае свободного неизолированного грунта, исследованном Фурье. Однако начальная амплитуда при $y = 0$ не равна C, а определяется через передаточную функцию $\Phi(j\omega)$, которая характеризует реакцию под изоляцией на гармоническое температурное воздействие с единичной амплитудой. Представим эту функцию в виде

$$\Phi(j\omega) = \psi(\omega) e^{-j\varepsilon(\omega)}, \qquad \psi(\omega) = |\Phi(j\omega)|$$
$$\varepsilon(\omega) = \arg \Phi^{-1}(j\omega) \qquad (3.6)$$

где $\psi(\omega)$ — относительная амплитуда колебаний температуры под изоляцией, а $\varepsilon(\omega)$ — сдвиг по фазе.

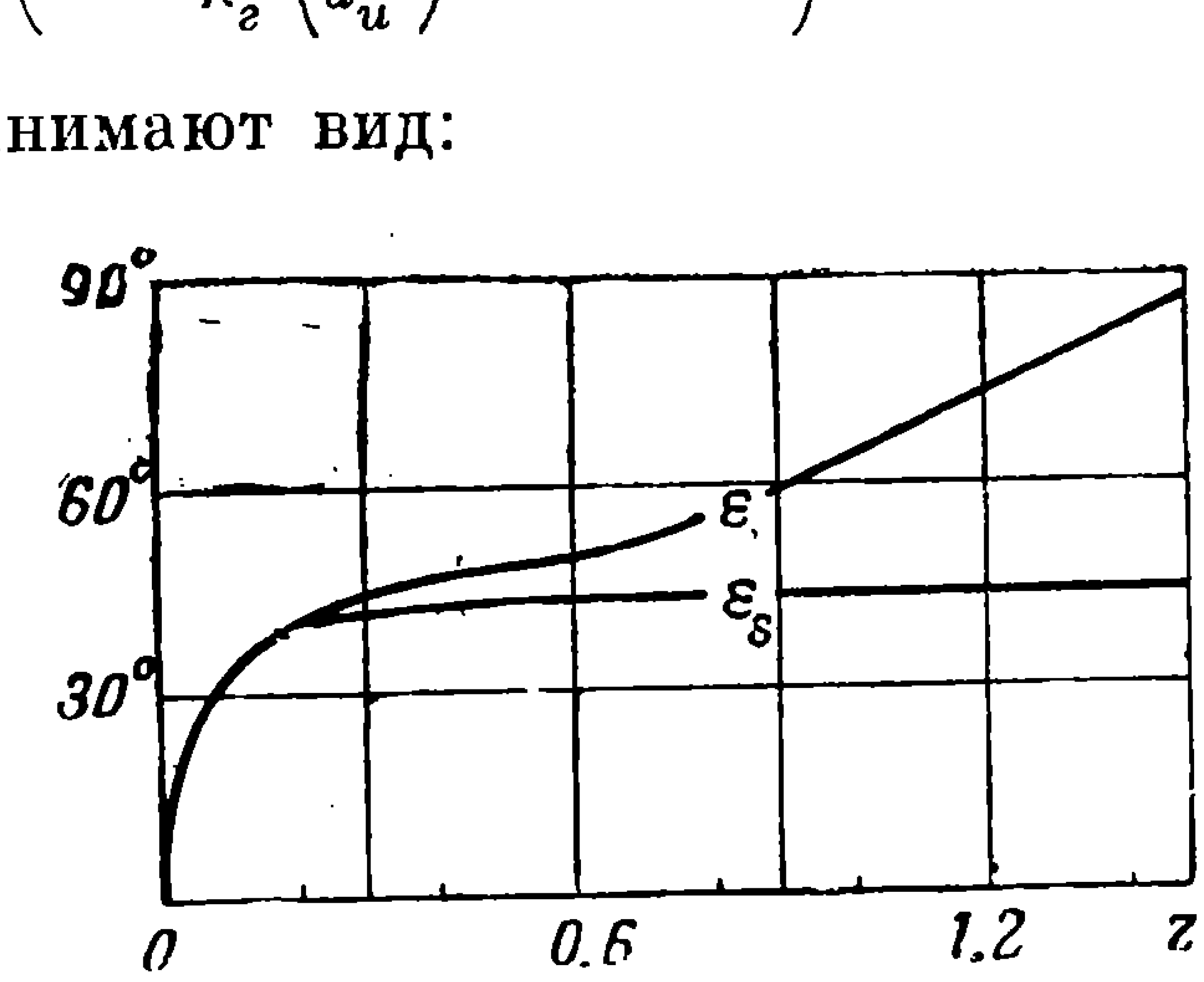
Для приближенных вычислений воспользуемся упрощенными выражениями (2.3), на основании которых получаем

$$\psi(\omega) = \frac{\nu_0}{[\operatorname{ch}^2 z - \cos^2 z + \nu_0 \operatorname{sh} 2z + \nu_0^2 (\operatorname{sh}^2 z + \cos^2 z)]^{1/2}}$$
$$\operatorname{tg} \varepsilon(\omega) = \operatorname{tg} z \frac{1 + \nu_0 \operatorname{th} z}{\nu_0 + \operatorname{th} z} \qquad \left(\nu_0 = \frac{\lambda_u}{\lambda_г}\left(\frac{a_г}{a_u}\right)^{1/2}, \ z = \sigma_u \delta\right) \qquad (3.7)$$

При малых z выражения (3.7) принимают вид:

$$\psi_s(\omega) = \frac{\nu_0}{(\nu_0^2 + 2\nu_0 z + 2z^2)^{1/2}}$$
$$\operatorname{tg} \varepsilon_s(\omega) = \frac{z}{\nu_0 + z} \qquad (3.8)$$

где $\psi_s(\omega)$ и $\varepsilon_s(\omega)$ можно также получить при помощи отождествления величин k_1 и k_2 со стационарным значением коэффициента теплопередачи k.



Фиг. 3

На фиг. 2 и 3 представлены зависимости ψ и ε от z при значении $\nu_0 = 0.047$, которое соответствует влажной земле и изоляции из стеклянной ваты. Из этих графиков видно, насколько быстро затухает амплитуда колебаний температуры под изоляцией при увеличении $z = \sigma_u \delta$, а также то, что использование стационарного значения коэффициента теплопередачи (ψ_s и ε_s) приводит к довольно заниженным значениям амплитуды и сдвига по фазе.

Если колебания температуры $\Delta\theta_c$ являются беспорядочными, но стационарными [10], для которых известна корреляционная функция $R_c(\tau)$ или спектральная плотность $S_c(\omega)$, то спектральная плотность $S_\theta(\omega)$ колебаний температуры под изоляцией определяется при помощи простого соотношения

$$S_\theta(\omega) = |\Phi(j\omega)|^2 S_c(\omega) \tag{3.9}$$

причем для стационарного случайного процесса $R(\tau)$ и $S(\omega)$ связаны между собой преобразованиями Фурье [10]

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = 2\int_{0}^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau \\ R(\tau) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\cos\omega\tau\, d\omega \end{aligned} \tag{3.10}$$

Отсюда следует, что, определив при помощи экспериментальных данных $R_c(\tau)$ или $S_c(\omega)$, можно затем по формулам (3.9) и (3.10) найти $S_\theta(\omega)$, $R_\theta(\tau)$ и, в частности, дисперсию величины θ, равную $R_\theta(0)$. После этого нетрудно рассчитать остальные статистические характеристики распределения величины θ. Подобный путь может быть использован и в общем случае, так как в § 2 даны передаточные функции ряда величин.

Поступила 2 XII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Хаскинд М. Д. Теплопередача в грунте под изоляцией холодильников. Изв. АН СССР, ОТН, 1958, № 10.
2. Стрет М. Д. О. Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике. ОНТИ, 1935.
3. Купрадзе В. Д. Основные задачи математической теории дифракции (установившиеся процессы). ОНТИ, 1935.
4. Мак-Лахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. Изд-во иностр. лит-ры, 1953.
5. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа, 1949.
6. Wiener N. und Hopf E. Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen. Sitz. Berlin. Akad. Wiss., 1931, 696—706.
7. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, 1948.
8. Фок В. А. О некоторых интегральных уравнениях математической физики. Математ. сб., 1944, т. 14, вып. 1.
9. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. 4. Гостехиздат, 1951, 179—188.
10. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. Успехи математ. наук, 1952, т. 7, вып. 5.
11. Хаскинд М. Д. Промерзание грунта под изолированной поверхностью. Докл. АН СССР, 1959, т. 125, № 4.