

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ УДАР ПЛАВАЮЩЕГО ЭЛЛИПСА О НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

Н. А. Кудрявцева

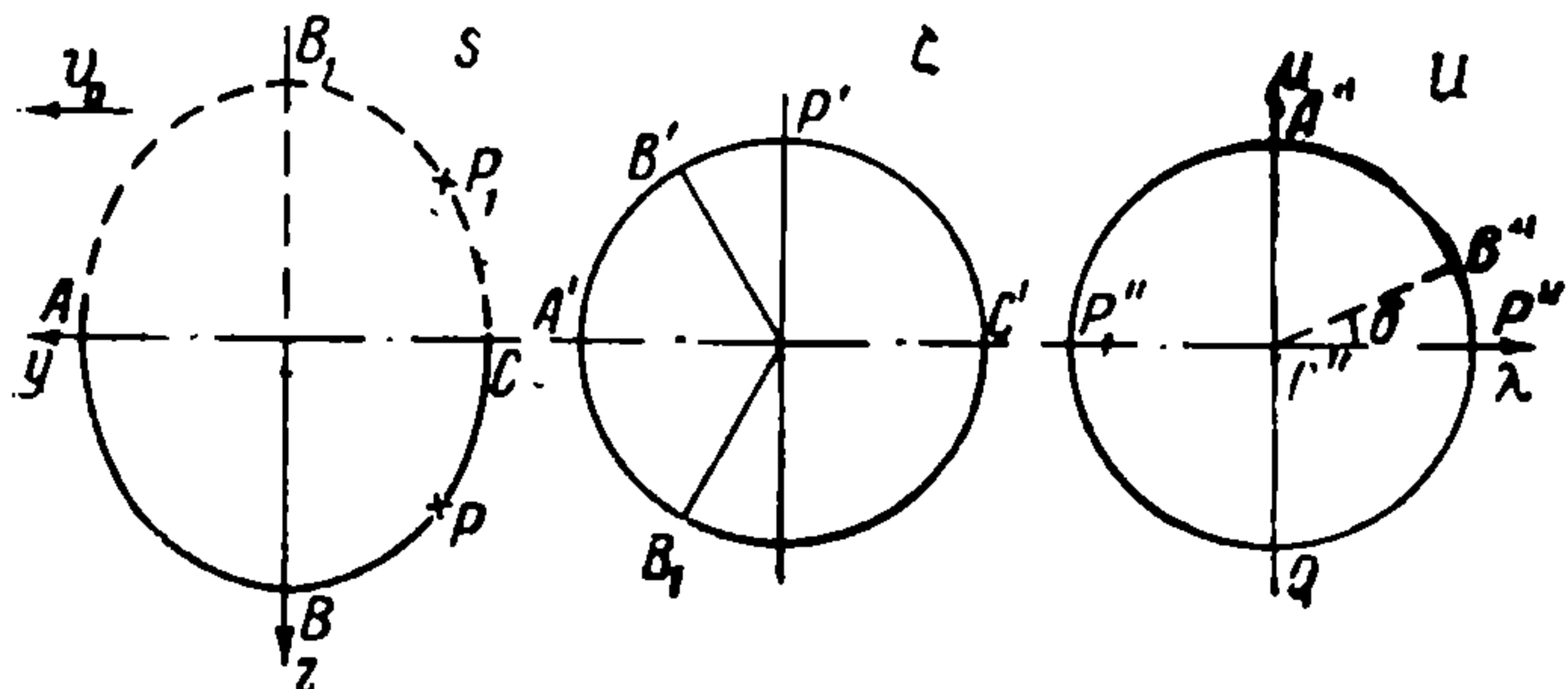
(Москва)

В работах, посвященных удару тела о жидкость, показывается, что при отсутствии массовых импульсных сил движение, возникающее после удара, потенциально.

Импульсивное давление p_t связано с потенциалом скоростей φ простым соотношением $p_t = -\rho\varphi$, и задача сводится к решению уравнения Лапласа с граничными условиями $\varphi = 0$ на свободной поверхности жидкости и $\partial\varphi/\partial n = V_n$, где V_n — проекция на нормаль скорости тела на смоченной поверхности тела. Последнее условие справедливо, если нет отрыва жидкости от поверхности тела. Предположение об отсутствии отрыва жидкости непосредственно после удара может привести к решению, не имеющему физического смысла, так как при этом внутри жидкости получаются области с отрицательным импульсивным давлением [1].

Ниже приводится аналитическое решение задачи горизонтального удара наполовину погруженного эллипса, а также некоторые эксперименты.

§ 1. Для импульса и импульсивного момента, действовавших на тело во время удара, имеем зависимости



Фиг. 1

$$J = J_y + iJ_z = i \int_{\Sigma} p_t ds = -i\rho \int_{\Sigma} \varphi ds$$

$$(s = y + iz) \quad (1.1)$$

$$M = \int (y dZ - z dY) = -\operatorname{Re} \left\{ \rho \int \bar{s} \varphi ds \right\}$$

где Y, Z — силы в направлении осей y, z .

Для определения импульсных сил и момента при ударе эллипса найдем характеристическую функцию $w = \varphi + i\psi$.

Для ее определения имеем следующие условия (фиг. 1):

$$\varphi = 0 \quad \text{на } PC, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = V_n \quad \text{на } ABP \quad \text{или} \quad \psi = v_0 z \quad (1.2)$$

где v_0 — горизонтальная скорость, которую приобретает эллипс от внешнего импульса. Продолжая характеристическую функцию в верхнюю полуплоскость, получим

$$\varphi = 0 \quad \text{на } P_1C, \quad \psi = -v_0 z \quad \text{на } AB_1P_1 \quad (1.3)$$

Граница области отрыва определяется условием непрерывного изменения скорости жидкости в этой области и тем, что на части поверхности эллипса, на которой происходит отрыв жидкости, нормальная скорость тела больше нормальной скорости жидкости. При подходе к точке

отрыва P вдоль дуги эллипса сверху должно выполняться условие

$$\lim \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_0 \quad \text{или} \quad \lim \frac{\partial \psi}{\partial z} = v_0 \quad (1.4)$$

Отобразим область $s = y + iz$, внешнюю к поверхности эллипса, на верхнюю внутренность единичного полукруга в плоскости $u = \lambda + i\mu$, так чтобы неизвестные пока точки отрыва P и P_1 перешли в концы действительного диаметра, а точка C — в центр полукруга.

Функция, реализующая это конформное преобразование, имеет вид:

$$s = y + iz = \frac{4au^2 \cos \sigma_1 - a(u^2 + 1) - 4ibu(u^2 + 1) \cos \sigma_1}{(u^2 + 1)^2 + 4u^2 \cos^2 \sigma_1} \quad (1.5)$$

где a, b — полуоси эллипса, σ_1 — аргумент точки отрыва P'' в плоскости u , который связан с ординатой точки отрыва

$$z_P = \frac{2b \cos \sigma_1}{1 + \cos^2 \sigma_1} \quad (1.6)$$

Граничное условие для контура круга K плоскости $u = \lambda + i\mu$, перенесенное с плоскости s , будет

$$\psi(\sigma) = v_0 \frac{2b \cos \sigma_1 \cos \sigma}{\cos^2 \sigma_1 + \cos^2 \sigma} \quad (1.7)$$

Искомую характеристическую функцию, голоморфную внутри круга K и удовлетворяющую граничному условию (1.7), можно представить в виде

$$w(u) = v_0 \frac{8b}{\pi} \frac{u(1+u^2) \cos \sigma_1}{(1+u^2)^2 + 4u^2 \cos^2 \sigma_1} \left[\ln \frac{i-u}{i+u} - \frac{u-u^{-1}}{i\alpha - \frac{1}{i\alpha}} \ln \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right] \quad (1.8)$$

где

$$\alpha = \sqrt{1 + \cos^2 \sigma_1} - \cos \sigma_1$$

Для определения неизвестного значения угла воспользуемся равенством $\lim \partial \psi / \partial z = v_0$ при $\lambda \rightarrow 1$. Выделив из (1.8) мнимую часть и продифференцировав ее, для определения σ_1 получим уравнение

$$\ln \frac{1 + \sqrt{1 + \cos^2 \sigma_1}}{\cos \sigma_1} = \sqrt{1 + \cos^2 \sigma_1}$$

которое имеет единственное решение $\cos \sigma_1 = 0.663$. Ордината точки отрыва P при этом будет равна $z = 0.92b$.

Чтобы определить импульсную силу и момент, подействовавшие во время удара на эллипс, найдем потенциал φ , выделив действительную часть из характеристической функции w :

$$\varphi = v_0 \frac{2}{\pi} \frac{u(u^2 + 1) \cos \sigma_1}{(1 + u^2)^2 + 4u^2 \cos^2 \sigma_1} \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sigma}{2} \right) + \sin \sigma \right] \quad (1.9)$$

Пользуясь формулой (1.1) и выполняя интегрирование в плоскости u , получим

$$\begin{aligned} J_y &= -\rho \frac{2b^2}{\pi} v_0 \sin^2 \sigma_1 \\ J_z &= -\rho ab v_0 \left[\ln \frac{1 + \sqrt{1 + \cos^2 \sigma_1}}{\cos \sigma_1} - (1 + \cos^2 \sigma_1)^{-1/2} \right] \\ M &= \frac{1}{3} \rho b (b^2 - a^2) v_0 (1 + \cos^2 \sigma)^{-3/2} \end{aligned} \quad (1.10)$$

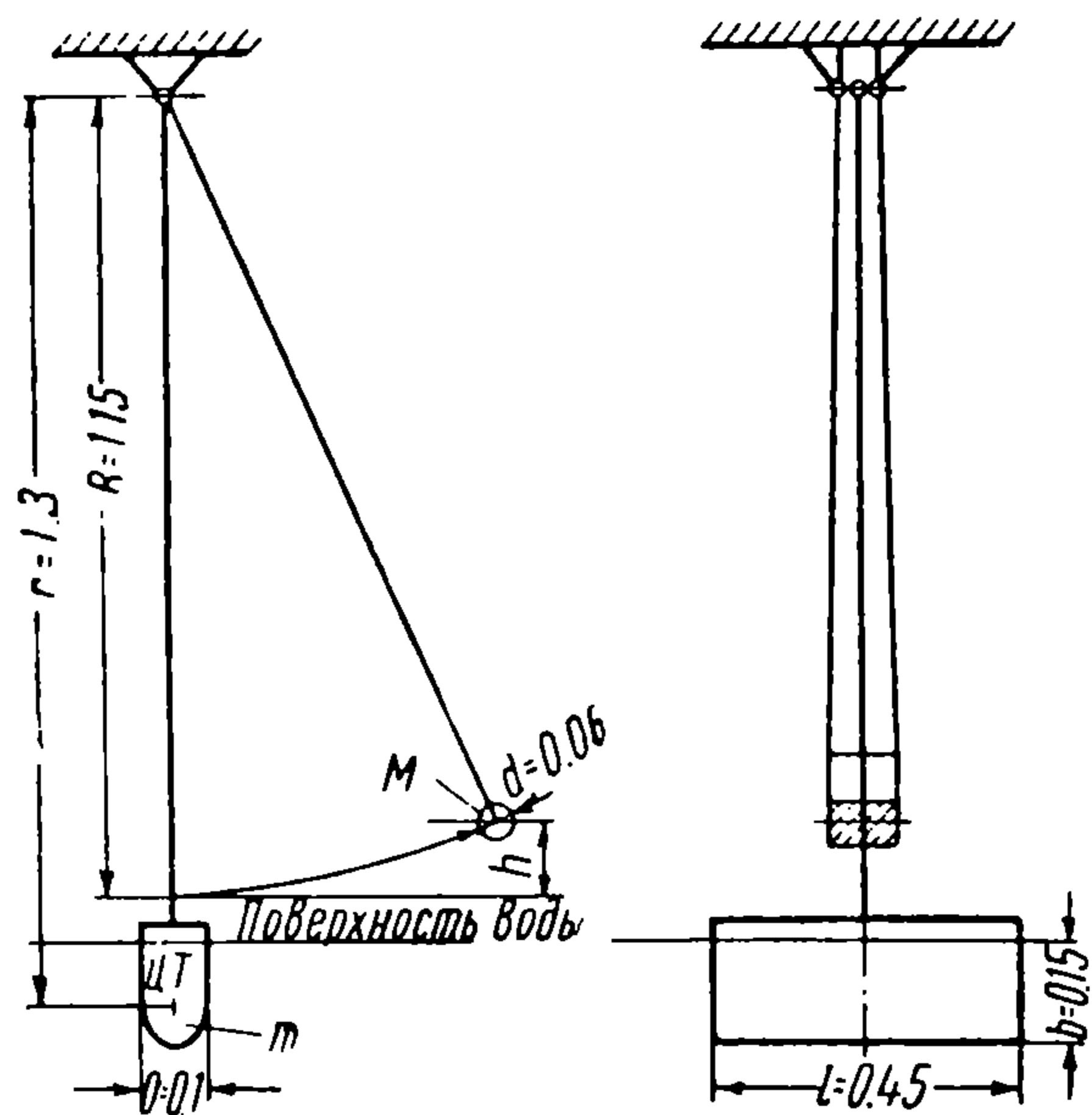
Отсюда при $a \rightarrow 0$, когда эллипс превращается в пластинку, получим формулы, приведенные в работе [1].

Для присоединенной массы при ударе о несжимаемую жидкость в случае горизонтального удара будем иметь

$$\lambda_{22} = 0.56\rho \frac{2b^2}{\pi}, \quad \lambda_{23} = 0.598\rho \frac{2ab}{\pi}, \quad \lambda_{24} = -0.195\rho b(b^2 - a^2) \quad (1.11)$$

§ 2. Для проверки наличия отрыва жидкости от поверхности эллипса проведен специальный эксперимент, позволяющий измерить присоединенную массу вдоль свободной поверхности жидкости.

Исследуемое тело представляло собой срезанный эллиптический цилиндр, подвешенный на длинной трубе к сварной раме.



Фиг. 2

Линейные размеры трубы велики по сравнению с размерами тела, поэтому движение в первый момент после удара груза маятника по эллиптическому цилиндру (фиг. 2) можно считать горизонтальным. Это позволяет записать уравнение количества движения системы до и после удара в следующем виде:

$$I_M \omega_{01} = I_M \omega_1 + I_m \omega_2 \quad (\text{в воздухе}) \quad (2.1)$$

$$I_M \omega_{01} = I_M \omega_1^1 + (I_m + I_\lambda) \omega_2^1 \quad (\text{в воде})$$

Здесь ω_{01} — угловая скорость груза-маятника до удара, ω_1, ω_1^1 — угловые скорости груза-маятника после удара в воздухе и в воде, ω_2, ω_2^1 — угловые скорости эллиптического цилиндра после удара в воздухе и в воде, I_M, I_m, I_λ — моменты инерции груза-маятника, эллиптического цилиндра и присоединенной массы воды при ударе.

Расстояние R от оси подвеса до центра тяжести груза-маятника с массой M и r — до центра тяжести эллиптического цилиндра с массой m , значительно больше размеров соударяющихся тел, поэтому собственными моментами инерции можно пренебречь и считать, что

$$I_M = MR^2, \quad I_m = mr^2, \quad I_\lambda = \lambda_{22}r^2 \quad (2.2)$$

Допускаемая при этом ошибка составит не более 1%. От угловых скоростей перейдем к линейным, измеряя линейные скорости в точке соударения тел.

Второе соотношение при ударе записывается в виде

$$V_2 - V_1 = V_2^1 - V_1^1 = KV_{01} \quad (2.3)$$

Здесь V_{01} — скорость груза-маятника до удара, V_1, V_1^1 — скорости груза-маятника после удара в воздухе и в воде, V_2, V_2^1 — скорости эллиптического цилиндра после удара в воздухе и в воде, K — постоянная величина, называемая коэффициентом восстановления при ударе, зависящая только от материала соударяющихся тел.

Используя соотношения (2.1) — (2.3), выражение для присоединенной массы воды при ударе можно представить в виде

$$\lambda_{22} = \left(\frac{V_2}{V_2^1} - 1 \right) \left(m + M \frac{R^2}{r^2} \right) \quad (2.4)$$

Таким образом, зная скорость цилиндра после удара в воздухе и в воде в начальный момент движения, когда еще не сказывается сопротивление воды, можно найти присоединенную массу λ_{22} .

Процесс удара фотографировался киноаппаратом с частотой съемки 150 кадров в секунду. В результате расшифровки пленки найдена зависимость пути перемещения цилиндра по времени при ударе в воде и в воздухе. Из-за недостаточной жесткости конструкции появились упругие колебания тела, и для расчета взята усредненная зависимость пути перемещения по времени, дифференцируя которую, получим скорость движения цилиндра после удара в воде и в воздухе.

На фотографиях (фиг. 3) показаны четыре последовательные стадии удара цилиндра о воду, из которых видно, что на задней стороне цилиндра наблюдается отрыв жидкости ($t = 0.0370$ — 0.0637 сек.) и что экспериментальная точка отрыва ($z = 0.85 b$) близка к полученной теоретически ($z = 0.92 b$).

Графическим дифференцированием при $t = 0$ определены скорость V_2 и V_2^1 и по формуле (2.4) получена присоединенная масса воды при ударе эллиптического цилиндра о воду: $\lambda_{22} = 0.368 \text{ кг сек}^2/\text{М}$.

Теоретически вычисленная по формуле (1.11) величина присоединенной массы равна $0.327 \text{ кг/сек}^2/\text{М}$. Разница в величинах присоединенных масс невелика (13%) и в значительной мере объясняется погрешностями экспериментальной установки и обработки.

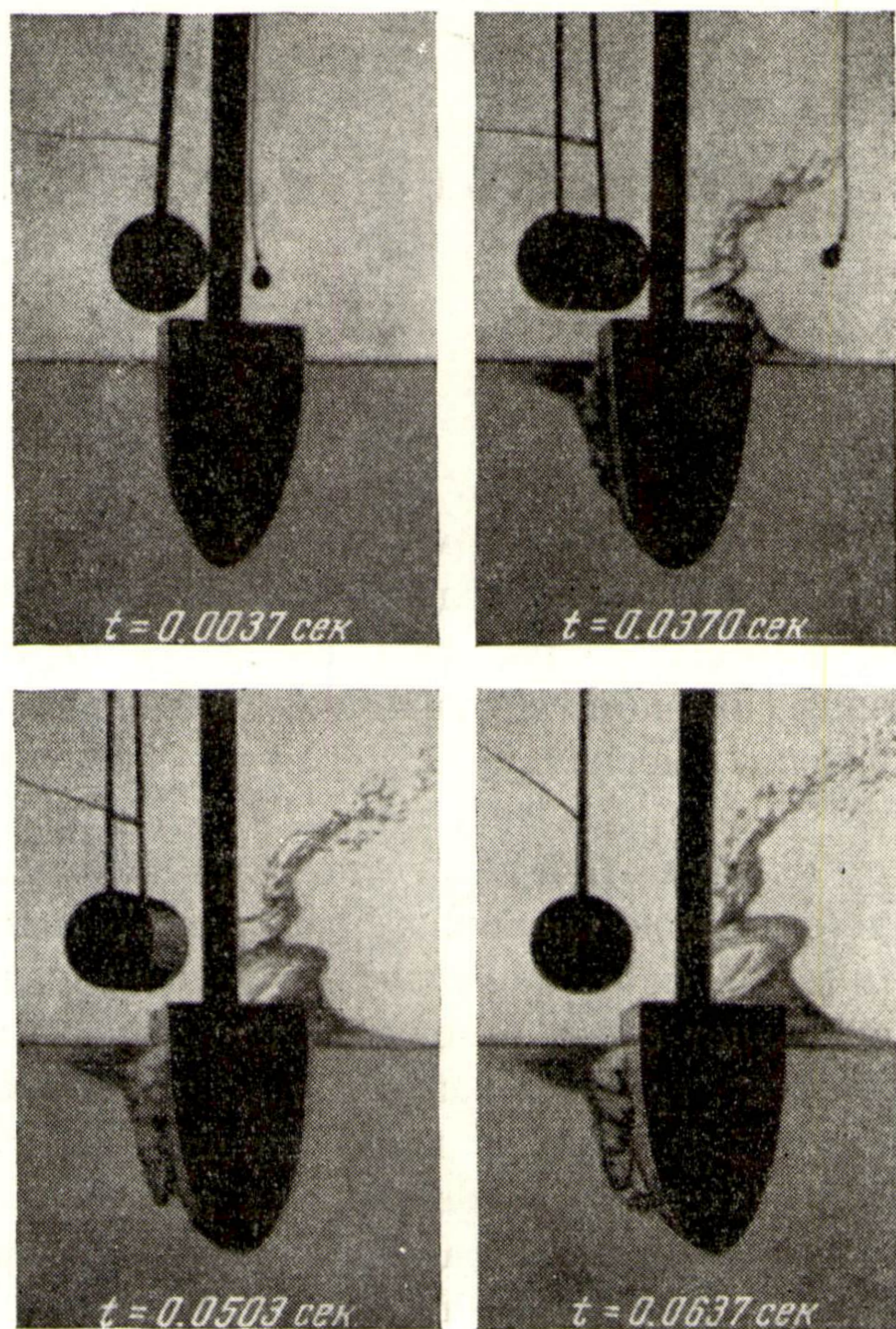
Проведенный эксперимент подтвердил основную теоретическую предпосылку о наличии отрыва жидкости от поверхности эллипса.

Корректное решение задачи о горизонтальном ударе эллипса показало, что приближенное определение точки отрыва и импульсных сил и момента на основании решения задачи о безотрывном ударе эллипса [2] приводит к большим погрешностям.

Поступила 20 X 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики, ГИТТЛ, 1950.
2. Семенов Тянь-Шанский В. В. К вопросу об ударе эллипса. Тр. Ленинград. корабельн. ин-та, 1954, т. 13.



Фиг. 3