Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960

Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПОТОКОВ НЕОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Л. А. Дикий

(Москва)

Теория устойчивости жидкости, имеющей плотностное расслоение, разработана в значительно меньшей степени, чем задачи, связанные с устойчивостью однородной несжимаемой жидкости. Специфические трудности, возникающие в этой теории, легко понять, вспомнив положение, имеющее место при изучении устойчивости плоскопараллельных потоков однородной жидкости. Если, как это делается обычно, искать решения в виде распространяющихся волн

$$\varphi(z)\, e^{i\alpha(x-ct)} \tag{0.1}$$

(здесь z — координата в направлении, поперечном к основному потоку, x — в продольном), то для амплитуды $\varphi(z)$ справедливо уравнение Орра — Зоммерфельда

$$(V-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-V''\varphi=-\frac{i\nu}{\alpha}(\varphi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi) \tag{0.2}$$

где $V(z)$ — скорость невозмущенного потока; если пренебречь вязкостью, то

$$(V-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi)-V''\varphi=0 \tag{0.3}$$

Несмотря на то, «невязкое» уравнение по форме значительно проще «вязкого» хотя бы тем, что оно лишь второго, а не четвертого порядка, применение его наталкивается на принципиальные затруднения. Начать с того, что возникающая краевая задача (α фиксировано, c — собственное число) может либо вовсе не иметь решений, либо иметь их недостаточно много в том смысле, что соответствующие этим собственным числам собственные функции не образуют полной системы. В таком случае, даже зная все собственные функции, все же нельзя ответить на основной вопрос теории устойчивости — как будет развиваться произвольное возмущение, возникшее в некоторый момент в жидкости: будет ли оно возрастать неограниченно или останется ограниченным. Однако при введении хотя бы малой, но отличной от нуля вязкости положение исправляется. Задача на собственные значения тогда имеет полную систему собственных функций. (С математической точки зрения, это задача на собственные значения некоторого несамосопряженного оператора, и установить полноту собственных и «присоединенных» функций можно, например, при помощи теоремы М. В. Келдыша ([1], теорема 1.)

Но можно сказать и более, именно, если не вводить вязкости, то и сама математическая постановка задачи остается не вполне определенной. Именно, «невязкое» уравнение для φ имеет особую точку при $V-c=0$. В связи с этим решения его многозначны и правильный выбор ветви может быть произведен, только если решения «невязкого» уравнения рассматривать как пределы решений «вязкого», полного уравнения (обсуждение этого вопроса содержится в книге Линя [2]).

К сожалению, такой подход не применим в случае жидкости с плотностью, изменяющейся по высоте. Уравнение Орра — Зоммерфельда принимает такой вид:

$$(V-c)^2(\varphi''-\alpha^2\varphi)-(V-c)V''\varphi-\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}\varphi+\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}[(V-c)^2\varphi'-(V-c)V'\varphi]=$$
$$=-\frac{i\nu}{\alpha}\left[\varphi^{\mathrm{IV}}-2\alpha^2\varphi''+\alpha^4\varphi+\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz}(\varphi''-\alpha^2\varphi)\right](V-c) \tag{0.4}$$

Легко видеть, что особая точка уравнения при $V - c = 0$ сохраняется даже при наличии ненулевой вязкости. Таким образом, здесь вязкое уравнение оказывается не лучше «невязкого», и вопрос о выборе ветви решения остается открытым. Поэтому представляется необоснованным механическое перенесение правила выбора ветви решения, выведенного для однородной жидкости, на случай жидкости неоднородной, как это делает Шлихтинг [3].

Таким образом, при изучении устойчивости неоднородной жидкости введение вязкости не дает ощутимых преимуществ, и если число Рейнольдса достаточно велико, то лучше положить вязкость сразу равной нулю. Далее нужно отдавать себе отчет в том, что разложение решений по волновым решениям (0.1) и иследование собственных частот не являются самоцелью, а лишь орудием исследования задачи Коши для уравнения в частных производных. Если же таких волновых решений не окажется, то нужно решить задачу Коши о развитии произвольных начальных возмущений каким-либо иным способом.

Будем считать движение устойчивым, если произвольное начальное возмущение, возникшее в конечной области пространства, с течением времени остается ограниченным. В противном случае движение назовем неустойчивым. В настоящей статье удается показать, что по крайней мере в отдельных примерах такое исследование может быть доведено до конца, причем даже в случаях, когда волновых решений не имеется.

К данной работе близка по теме статья [4]; в ней разобран близкий пример, однако авторы шли другим путем. Именно, они не отказались от разложения решения по волновым вида (0.1) ввиду получающейся простоты из-за полного разделения переменных. Однако от такого волнового решения уже не требуется, чтобы оно было в строгом смысле этого слова решением (0.4). Оно лишь должно удовлетворять уравнению всюду, кроме особой точки, где не ставится никаких условий сопряжения.

Таких «почти собственных» функций можно указать даже слишком много в том же смысле, в котором «слишком много» собственных чисел у обычной краевой задачи, если недостает краевого условия, в данном случае — условия сопряжения в особой точке.

Таким образом, волновые решения понимаются формально как некоторые легко вычисляемые функции, по которым можно пытаться разложить решение задачи Коши. Однако в статье [4] остается недоказанным основной факт полноты системы «почти собственных» функций. Поэтому принятый в статье [4] подход нуждается еще в серьезном обосновании.

1. Рассматривается следующий пример. Двумерный горизонтальный поток в неограниченном полупространстве, скорость V которого линейно возрастает с высотой, а плотность ρ_0 экспоненциально убывает:

$$V(z) = kz, \qquad \rho_0 = \mathrm{const}\, e^{-\beta z}$$

Этот пример изучал Тейлор [5] методом волн. Им было установлено, что при значениях числа Ричардсона $R = g\beta / k^2$, превосходящих $^1/_4$, имеются нейтральные волны, а при меньших числах Ричардсона волн вообще нет.

Отсюда многие авторы сделали вывод [6,7], что поток устойчив лишь при значениях $R > {}^1/_4$.

Ниже показано, что решение устойчиво при любых положительных значениях числа R (в сформулированном ранее смысле [1]).

Пусть ρ', p', u', w' — возущения плотности, давления, скорости.

[1] В указанной работе [4] рассматривается такой же поток, но между двумя твердыми стенками. Вывод об устойчивости такой же.

Напишем линеаризированные уравнения движения

$$\rho_0\left(\frac{\partial u'}{\partial t}+V\frac{\partial u'}{\partial x}+w'\frac{\partial V}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p'}{dx},\qquad \frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0$$

$$\rho_0\left(\frac{\partial w'}{\partial t}+V\frac{\partial w'}{\partial x}\right)=-\frac{\partial p'}{\partial z}-g\rho',\qquad \frac{\partial \rho'}{\partial t}+V\frac{\partial \rho'}{\partial x}+w'\frac{d\rho_0}{dz}=0 \tag{1.1}$$

Если исключить p', ρ' и ввести функцию тока ψ, то получим

$$\beta\left(\frac{\partial}{\partial t}+kz\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\psi}{\partial z}-\beta k\left(\frac{\partial}{\partial t}+kz\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}-\left(\frac{\partial}{\partial t}+kz\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Delta\psi=g\beta\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$$

$$\left(\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\quad u'=-\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad w'=\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$$

Подстановкой $e^{1/2\beta z}\chi$ исключим член с $\partial\psi/\partial z$; получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+kz\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{1}{4}\beta^2-\Delta\right)\chi-\beta k\left(\frac{\partial}{\partial t}+kz\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial\chi}{\partial x}=g\beta\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}$$

Перейдем к системе координат, движущейся вместе со средним потоком $t_1=t$, $z_1=z$, $x_1=x-kzt$. Будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial t_1^2}\left[\frac{1}{4}\beta^2-\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}-\left(\frac{\partial}{\partial z_1}-kt_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2\right]\chi-\beta k\frac{\partial^2\chi}{\partial t_1\partial x_1}-g\beta\frac{\partial^2\chi}{\partial x_1^2}=0$$

Вместо x_1, z_1, t_1 в дальнейшем будем писать просто x, z, t.

Ищем решения в виде $e^{ilx}\xi(z,t)$, т. е. производим преобразование Фурье по x. Для ζ получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{1}{4}\beta^2+l^2-\left(\frac{\partial}{\partial z}-iklt\right)^2\right]\zeta-i\beta kl\frac{\partial\zeta}{\partial t}+g\beta l^2\zeta=0 \tag{1.2}$$

Многие авторы, в том числе Тейлор [5] и авторы статьи [4], пренебрегают в этом уравнении предпоследним членом; ниже этот член сохраняется; впрочем, учет его не меняет результатов.

Начальные условия таковы:

$$\zeta(z,0)=\varphi(z),\qquad \zeta_t(z,0)=\psi(z)$$

Граничное условие на поверхности земли

$$w=0\quad\text{или}\quad\zeta(0,t)=0$$

Что же касается условия на бесконечности (при $z\to\infty$), то здесь требуется такая степень регулярности, которая обеспечивала бы существование и единственность решения. Как мы увидим, для этого достаточно потребовать, чтобы ζ на бесконечности росла медленнее любой экспоненциальной функции. Достаточно решить отдельно две краевые задачи, считая $\psi\equiv0$ и $\varphi\equiv0$. Приводим решение первой из этих задач, вторая решается аналогично. Начальную функцию $\varphi(z)$ будем предполагать отличной от нуля лишь в конечной области пространства; в силу граничного условия $\varphi(0)=0$.

2. В этом пункте мы выведем формулу решения задачи Коши, в которую будет входить некоторая, пока не определенная функция. В следующем пункте будет выведено интегральное уравнение для этой функции. В добавлении 1 уравнение будет исследовано.

Применяем к уравнению (1.2) преобразование Лапласа

$$\zeta^*(p,\ t)=\int\limits_0^\infty e^{-pz}\zeta(z,\ t)\,dz$$

Умножая (1.2) на e^{-pz} и интегрируя по z от 0 до ∞, получим

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[m^2-(p-iklt)^2]\zeta^*-i\beta kl\frac{\partial\zeta^*}{\partial t}+g\beta l^2\zeta^*=\xi(t) \tag{2.1}$$

Здесь

$$\xi(t)=-\frac{\partial^3\zeta(0,t)}{\partial z\,\partial t^2},\qquad m^2=\frac{1}{4}\beta^2+l^2$$

Обозначим через $\varphi^*(p)$ преобразование Лапласа от $\varphi(z)$. Учитывая начальные условия $\zeta^*(p,\ 0)=\varphi^*(p)$, $\zeta_t^*(p,\ 0)=0$, решение уравнения (2.1) найдем в следующем виде:

$$\zeta^*(p,\ t)=\int\limits_0^t\frac{\tau_1^*(s-i\varkappa t)\,\tau_2^*(s-i\varkappa t_1)-\tau_2^*(s-i\varkappa t)\,\tau_1^*(s-i\varkappa t_1)}{W[1-(s-i\varkappa t_1)]^{-1+\beta_1}[1+(s-i\varkappa t_1)]^{-1-\beta_1}}\,\xi(t_1)\,dt_1+$$
$$+i\varkappa\frac{\tau_1^*(s-i\varkappa t)\,\tau_2^{*\prime}(s)-\tau_2^*(s-i\varkappa t)\,\tau_1^{*\prime}(s)}{W(1-s)^{-2+\beta_1}(1+s)^{-2-\beta_1}}\,\varphi^*(ms) \tag{2.2}$$

Здесь $s=p/m$, $\varkappa=kl/m$, $\beta_1=\beta/2m$, а W — некоторая константа. Функции τ_1^* и τ_2^* выражаются через гипергеометрические:

$$\tau_1^*(s)=F\left(\tfrac{3}{2}+r,\tfrac{3}{2}-r;\,2-\beta_1;\,\tfrac{1-s}{2}\right)$$
$$\left(r=\sqrt{\tfrac{1}{4}-R},\ R=\tfrac{g\beta}{k^2}\right)$$
$$\tau_2^*(s)=(1-s)^{-1+\beta_1}F\left(\tfrac{1}{2}+\beta_1+r,\ \tfrac{1}{2}+\beta_1-r;\ \beta_1;\ \tfrac{1-s}{2}\right)$$

Здесь R — число Ричардсона. Очевидно, при $R<{}^1/_4$ параметр r имеет вещественное значение и $0<r<{}^1/_2$, при $R>{}^1/_4$ он чисто мнимый.

Функция $\zeta^*(p,\ t)$, определяемая формулой (2.2), действительно представляет собой преобразование Лапласа некоторой функции $\zeta(z,\ t)$, причем $\zeta(0,\ t)=0$. Это следует из асимптотики $\zeta^*(p,\ t)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}p>m$ (или $\operatorname{Re}s>1$), где эта функция является аналитической. В самом деле, как легко показать, при $|p|\to\infty$ в этой полуплоскости $\zeta^*(p,\ t)=O(|p|^{-2})$. Таким образом, функция $\zeta(z,\ t)$ при любом $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению (1.2), начальным условиям и граничному условию при $z=0$.

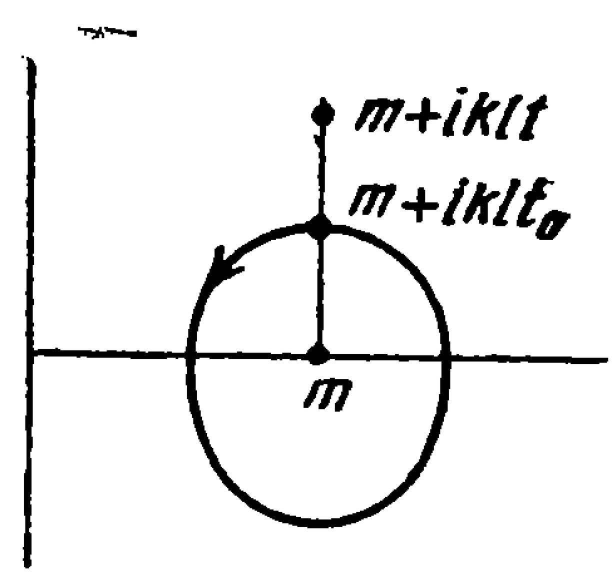
3. Остается пока открытым вопрос о том, чем определяется функция $\xi(t)$, входящая в формулу (2.2). Мы не использовали еще граничного условия при $z=\infty$. Прямой путь его учета был бы таким. Применив формулу обращения к (2.2) и найдя $\zeta(z,\ t)$, следовало бы исследовать асимптотику этого решения при $z\to\infty$ и потребовать, чтобы выполнялось условие регулярности. Но такой путь сопряжен со значительными трудностями. Мы поступаем иначе. Необходимым условием того, чтобы функция $\zeta(z,\ t)$ росла медленнее любой экспоненты, является регулярность функции $\zeta^*(p,\ t)$ в полуплоскости $\operatorname{Re}p>0$. С другой стороны, функции, входящие в правую часть (2.2), имеют точки ветвления в этой полуплос-

кости. Оказывается, подбором $\xi(t)$ можно уничтожить многозначность этой правой части (причем это требование определяет $\xi(t)$ единственным образом). Функция $\zeta^*(p, t)$ становится при этом регулярной в полуплоскости $\operatorname{Re} p > 0$.

Гипергеометрическая функция имеет единственную точку ветвления при значении ее аргумента, равном единице. Таким образом, $\tau_1^*(s)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, а τ_2^* представляет собой произведение $(1-s)^{-1+\beta_1}$ на регулярную при $\operatorname{Re} s > 0$ функцию. Поэтому многозначность правой части (2.2) появляется за счет членов

$$\tau_2^*(s - i\varkappa t)\int_0^t \frac{\tau_1^*(s - i\varkappa t_1)\,\xi(t_1)\,dt_1}{W[1-(s - i\varkappa t_1)]^{-1+\beta_1}[1+(s - i\varkappa t_1)]^{-1-\beta_1}} +$$

$$+ \tau_2^*(s - i\varkappa t)\frac{i\varkappa \tau_1^{*\prime}(s)\,\varphi^*(ms)}{W(1-s)^{-2-\beta_1}(1+s)^{-2+\beta_1}}$$



Фиг. 1

Это выражение, вообще говоря, изменяется при обходе по замкнутому контуру в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, содержащему внутри себя точки отрезка $[1, 1 + i\varkappa t]$.

Найдем приращение этого выражения при обходе по контуру, изображенному на фиг. 1. Обход начинается в некоторой точке $s = 1 + i\varkappa t_0$ $(0 < t_0 < t)$ и кончается в той же точке. Все многозначные функции $[1-(s - i\varkappa t_1)]^{-\beta_1}$, где $0 \leqslant t_1 \leqslant t_0$, умножаются при таком обходе на одно и то же число. Приращение написанного выражения приравняем нулю:

$$\int_0^{t_0} \frac{F(^3/_2 + r,\ ^3/_2 - r;\ 2-\beta_1;\ -i\varkappa(t_0 - t_1)/2)\,\xi(t_1)\,dt_1}{[-i\varkappa(t_0 - t_1)]^{-1+\beta_1}[2 + i\varkappa(t_0 - t_1)]^{-1-\beta_1}} -$$

$$-\frac{i\varkappa}{2}\frac{F'(^3/_2 + r,\ ^3/_2 - r;\ 2-\beta_1;\ -i\varkappa t_0/2)\,\varphi^*(m + iklt_0)}{(-i\varkappa t_0)^{-2+\beta_1}(2 + i\varkappa t_0)^{-2-\beta_1}} = 0$$

или, воспользовавшись формулой

$$F(a, b; c; z) = (1-z)^{c-a-b}F(c-a, c-b;\ c;\ z)$$

будем иметь

$$\int_0^t (t - t_1)^{1-\beta_1} F\left(\tfrac{1}{2} - \beta_1 + r,\ \tfrac{1}{2} - \beta_1 - r;\ 2-\beta_1;\ -\tfrac{i\varkappa}{2}(t - t_1)\right)\xi(t_1)\,dt_1 = g(t) \quad \mathbf{(3.1)}$$

где

$$g(t) = Ct^{2-\beta_1}(2 + i\varkappa t)^{2+\beta_1}F'\left(\tfrac{3}{2} + r;\ \tfrac{3}{2} - r;\ 2-\beta_1;\ -\tfrac{i\varkappa t}{2}\right)\varphi^*(m + iklt)$$

Для определения $\xi(t)$ мы получили интегральное уравнение типа Вольтерра первого рода с разностным ядром.

4. Чтобы получить формулу решения нашей задачи, остается в равенстве (2.2) проделать обратное преобразование Лапласа, т. е. перейти к прообразам. Нет нужды выражать эти прообразы через известные специальные функции. Для нас достаточно знать в каждом отдельном случае, что такой прообраз действительно существует. Последнее же легко проверяется по известным теоремам о представимости функций интегралом Лапласа.

Интегрируем (2.2) по частям; имеем

$$\zeta^*(p, t) = \tau_1^*(s - i\varkappa t)\int_0^t \chi_2^*(s - i\varkappa t_1)\int_0^{t_1} \xi(t_2)\,dt_2 dt_1 - \tag{4.1}$$

$$- \tau_2^*(s - i\varkappa t_1)\int_0^t \chi_2^*(s - i\varkappa t_1)\int_0^{t_1} \xi(t_2)\,dt_2 dt_1 + \tau_1^*(s - i\varkappa t)\,\eta_2^*(s) - \tau_2^*(s - i\varkappa t)\,\eta_1^*(s)$$

Здесь

$$\chi_{1,2}^*(s) = \frac{i\varkappa\tau_{1,2}^*(s)}{W(1-s)^{-1+\beta_1}(1+s)^{-1-\beta_1}}, \qquad \eta_{1,2}^*(s) = \frac{i\varkappa\tau_{1,2}^{*\prime}(s)\,\varphi^*(s)}{W(1-s)^{-2+\beta_1}(1+s)^{-2-\beta_1}}$$

Все функции от s, входящие в правую часть (4.1), т. е. $\tau_{1,2}^*$, $\chi_{1,2}^*$, $\eta_{1,2}^*$, являются преобразованиями Лапласа некоторых функций $\tau_{1,2}(z)$, $\chi_{1,2}(z)$, $\eta_{1,2}(z)$, что следует из их асимптотического поведения при больших $|s|$, при $\operatorname{Re} s > 0$. Именно

$$|\tau_{1,2}^*(s)| < K|s|^{-3/2+\operatorname{Re} r}, \qquad |\chi_{1,2}^*(s)| < K|s|^{-1/2+\operatorname{Re} r}, \qquad |\eta_{1,2}^*(s)| < K|s|^{-1/2+\operatorname{Re} r}$$

в то время как их производные стремятся к нулю на порядок быстрее. Отсюда, в частности,

$$|\tau_{1,2}(z)| < K|z|^{1/2-\operatorname{Re} r}, \qquad |\chi_{1,2}(z)| < K|z|^{-1/2-\operatorname{Re} r} \quad \text{(при малых } |z|)$$

Используя теорему о свертке, будем иметь

$$\zeta(z, t) = e^{i\varkappa tz}\int_0^z [\tau_1(z - z_1)\chi_2(z) - \tau_2(z - z_1)\chi_1(z_1)]\,\vartheta_{z_1}(t)\,dz_1 +$$

$$+ \int_0^z e^{i\varkappa t(z - z_1)}[\tau_1(z - z_1)\eta_2(z_1) - \tau_2(z - z_1)\eta_1(z_1)]\,dz_1 \tag{4.2}$$

Здесь

$$\vartheta_z(t) = \int_0^t e^{-i\varkappa(t - t_1)z}\int_0^{t_1} \xi(t_2)\,dt_2\,dt_1$$

Теперь мы можем видеть, что устойчивость потока, т. е. поведение $\zeta(z, t)$ при $t \to \infty$, зависит лишь от свойств $\vartheta_z(t)$ или $\xi(t)$ при неограниченном возрастании аргумента. В добавлении 1, где исследуется интегральное уравнение (3.1), доказывается, что

$$\begin{aligned} &|\vartheta_z(t)| < K && \text{при } r \text{ действительном} \\ &|\vartheta_z(t)| < K_1 + K_2|\lg(K_3/t + z)| && \text{при } r \text{ мнимом} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Легко убедиться, что отсюда вытекает ограниченность $\zeta(z, t)$ при $t \to \infty$; при r вещественном интеграл в (4.2) оценивается как

$$K\int_0^z z_1^{-1/2-r}(z - z_1)^{-1/2-r}\,dz_1$$

где K не зависит от t. При r мнимом оценка

$$K\int_0^z z_1^{-1/2}|\lg(K_3/t + z_1)|\,dz_1$$

Последнее выражение ограничено при $t \to \infty$. Таким образом, теорема об устойчивости доказана.

5. *Добавление* 1. Приводим исследование интегрального уравнения (3.1), опуская некоторые подробности громоздких вычислений.

При любом $\xi(t)$ левая часть (3.1) обращается в нуль при $t=0$ вместе со своей производной. Следовательно, для существования решения необходимо, чтобы и правая часть $g(t)$ обладала тем же свойством. Но в нашем случае это выполняется. Сейчас станет ясно, что этого и достаточно для существования решения. Уравнение будем решать методом преобразования Лапласа. Для этого обе части умножим на $e^{-\sigma t}$ и проинтегрируем по t от 0 до ∞. Как будет показано в добавлении 2, преобразование Лапласа функции $t^{1-\beta_1}F\,(^1/_2-\beta_1+r,\ ^1/_2-\beta_1-r;\ 2-\beta_1;\ -^1/_2\,i\varkappa t)$ есть

$$K\sigma^{-2}e^{-i\sigma/\varkappa}W_{\beta_1,r}\,(2e^{-i\pi/2}\sigma/\varkappa)$$

где $W_{\beta,r}$ — функция Уиттекера, при этом $|\arg\sigma|<{}^1/_2\,\pi$.

Отсюда нетрудно найти преобразование Лапласа $\xi(t)$, которое обозначим $\xi^*(\sigma)$:

$$\xi^*(\sigma)=\frac{\sigma^2g^*(\sigma)}{Ke^{-i\sigma/\varkappa}W_{\beta_1,r}\,(2e^{-i\pi/2}\sigma/\varkappa)} \tag{5.1}$$

Пользуясь асимптотикой функции Уиттекера при больших $|\sigma|$ и тем, что $g^*(\sigma)=O(|\sigma|^{-3})$ (так как $g(0)=g'(0)=0$), найдем $\xi^*(\sigma)=O(|\sigma|^{-\beta_1-1})$ при $|\sigma|\to\infty$, $|\arg\sigma|<{}^1/_2\pi$. Далее будет показано, что $\xi^*(\sigma)$ регулярна в правой полуплоскости. Следовательно, $\xi^*(\sigma)$, определяемая формулой (4.3), действительно является преобразованием Лапласа некоторой функции $\xi(t)$, удовлетворяющей интегральному уравнению.

Перейдем к оценке $\xi(t)$ при $t\to\infty$. Нас интересует даже не сама функция $\xi(t)$, а функция

$$\vartheta_z(t)=\int\limits_0^t e^{-i\varkappa(t-t_1)z}\int\limits_0^{t_1}\xi(t_2)\,dt_2dt_1$$

Ее преобразование Лапласа есть

$$\vartheta_z^*(\sigma)=\frac{\sigma g^*(\sigma)}{K(\sigma+i\varkappa z)\,e^{-i\sigma/\varkappa}W_{\beta_1,r}\,(2e^{-i\pi/2}\sigma/\varkappa)}$$

Поэтому

$$\vartheta_z(t)=\int\limits_0^t g(t-t_1)\,R_z(t_1)\,dt_1$$

где

$$R_z^*(\sigma)=\frac{\sigma}{K(\sigma+i\varkappa z)\,e^{-i\sigma/\varkappa}W_{\beta_1,r}\,(2e^{-i\pi/2}\sigma/\varkappa)}$$

Эта функция имеет полюс в точке $\sigma=-i\varkappa z$. Ее вычет обозначим $b(z)$. Оценку величины этого вычета при малых z нетрудно получить, пользуясь асимптотикой функции Уиттекера вблизи нуля; именно

$$|b(z)|<Kz^{1/2+\operatorname{Re}r}$$

Более сложно выяснить расположение полюсов, возникших от обращения функции Уиттекера в нуль. В случае r вещественного функция

$$W_{\beta_1,r}\,(2e^{-i\pi/2}\sigma/\varkappa)\qquad \text{в секторе } -\frac{1}{2}\pi\leqslant\arg\sigma\leqslant\pi$$

нулей не имеет, кроме, быть может, одного — на луче $\arg\sigma={}^1/_2\,\pi$.

В случае r мнимого на луче $\arg\sigma={}^1/_2\,\pi$ имеется счетное множество нулей $\sigma^{(n)}$, накапливающихся к началу координат, причем

$$\sigma^{(n)}\sim Ke^{i\pi/2}e^{-\pi n/|r|}.$$

Других нулей в секторе $-\frac{1}{2}\pi \leqslant \arg \sigma \leqslant \pi$ нет. Вычеты при $\sigma = \sigma^{(n)}$ обозначим $a_n(z)$. Можно дать оценку

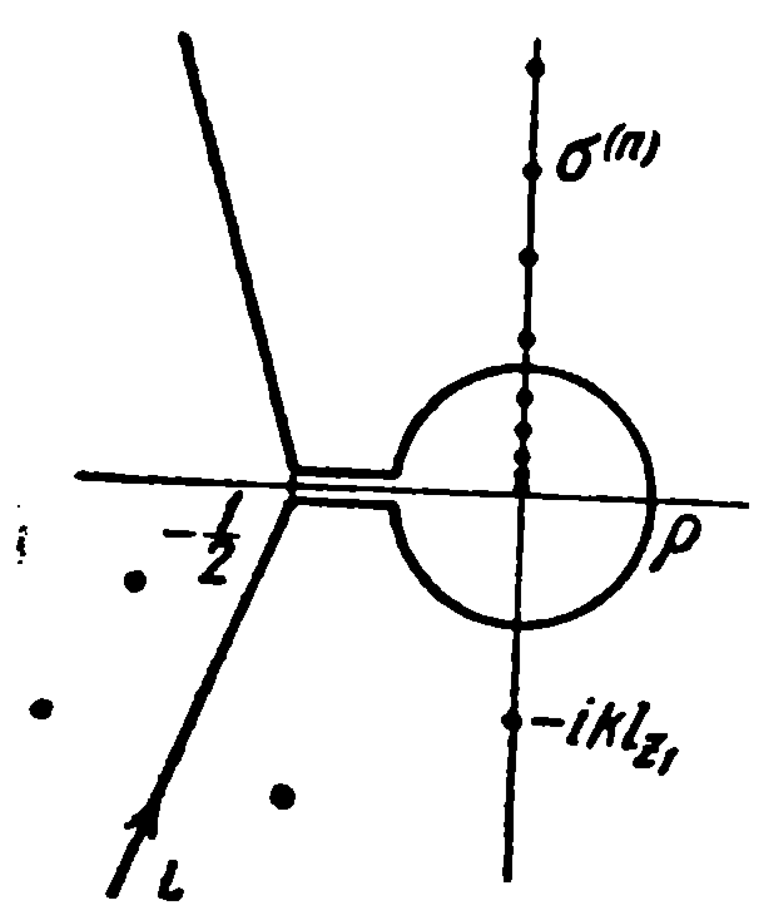
$$|a_n(z)| < K\,|\sigma^{(n)}|^{3/2} / (|\sigma^{(n)}| + \varkappa z) \qquad (K \text{ не зависит от } z)$$

В секторе $-\pi+\varepsilon<\arg z < -\pi/2$ $(\varepsilon > 0)$ может оказаться не более конечного числа нулей. Заметим еще, что при $|\sigma| \to \infty$ верна оценка

$$R_z^*(\sigma) = O(|\sigma|^{-\beta_1}) \qquad \text{в секторе } |\arg \sigma| < \pi - \varepsilon$$

По формуле обращения преобразования Лапласа имеем

$$R_z(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{\sigma e^{\sigma t} d\sigma}{K(\sigma + i\varkappa z)\, e^{-i\sigma/\varkappa} W_{\beta_1, r}(2e^{-i\pi/2}\sigma/\varkappa)}$$



Фиг. 2

Теперь деформируем контур так, как показано на фиг. 2. Наклон прямых — произвольный. Радиус окружности выберем в зависимости от z и t таким образом, чтобы $c_1/t < \rho < c_1/t$, $|\rho - \varkappa z| > c_3\rho$, где константы c_1, c_2, c_3 фиксированы. Если r — число мнимое, то добавим еще одно требование — окружность должна пересекать мнимую ось в точности посередине между корнями функции Уиттекера, расположенными на этой оси.

При таком выборе ρ знаменатель подынтегрального выражения на окружности по модулю превосходит $K\rho^{3/2-\mathrm{Re}\, r}$, в чем можно убедиться из асимптотики функции Уиттекера. В этом случае подынтегральное выражение меньше $K\rho^{-1/2+\mathrm{Re}\, r}$, а интеграл меньше $K\rho^{1/2+\mathrm{Re}\, r}$, т. е. меньше $Kt^{-1/2-\mathrm{Re}\, r}$ и, следовательно, стремится к нулю при $t \to \infty$. Точно такая же оценка получается для интегралов по горизонтальным отрезкам. Интеграл по наклонным прямым экспоненциально стремится к нулю. При деформации контура выделяются вычеты. Имеем

$$R_z(t) = b(z)\, e^{-i\varkappa z t} + \sum_{|\sigma^{(n)}| > \rho} a_n(z)\, e^{i|\sigma^{(n)}|t} + O(t^{-1/2-\mathrm{Re}\, r})$$

В остаточный член входят также вычеты от полюсов в области $-\pi + \varepsilon < \arg \sigma < -\frac{1}{2}\pi$, если таковые имеются, так как последние экспоненциально стремятся к нулю при $t \to \infty$. При r действительном вместо суммы, стоящей на втором месте, должен быть лишь один член. Теперь нужная оценка (4.3) для $\vartheta_z(t)$ получается без труда из того, что

$$\vartheta_z(t) = \int_0^t g(t - t_1)\, R_z(t_1)\, dt_1, \qquad g(t) = O(t^{-1/2+\mathrm{Re}\, r})$$

и из того, что $\sigma^{(n)}$ с ростом n экспоненциально стремится к нулю, а также из оценок для вычетов $a_n(z)$ и $b(z)$.

Примечание. Если бы мы приняли упрощение работ [4,5], о котором говорилось вначале, т. е. пренебрегли предпоследним членом в формуле (1.2), то результаты не изменились бы, лишь всюду вместо $W_{\beta_1, r}$ входило бы

$$W_{0,r}(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, K_r\left(\frac{\sigma}{2}\right)$$

Плотностное расслоение вводит два безразмерных параметра, соответствующих инерционному и архимедову эффекту этого расслоения. Указанное упрощение есть пренебрежение инерционным эффектом.

6. *Добавление 2.* Докажем, что преобразование Лапласа гипергеометрической функции

$$t^{d-1-\beta}\, F\,(^1/_2-\beta+r,\, ^1/_2-\beta-r;\, d-\beta;\, -\alpha t) \qquad (\mathrm{Re}\,(d-\beta)>0)$$

есть

$$\Gamma\,(d-\beta)\;\alpha^{\beta}\sigma^{-d}e^{\sigma/2\alpha}W_{\beta,r}\,(\sigma\,/\,\alpha), \qquad (\,|\arg\alpha\,|<\pi,\ |\arg\sigma\,/\,\alpha\,|<\pi)$$

Для доказательства применим интеграл Барнса — Меллина [8] (стр. 71)

$$f\,(t)\equiv t^{d-1-\beta}F\,(^1/_2-\beta+r,\, ^1/_2-\beta-r;\, d-\beta;\, -\alpha t)=\frac{\Gamma\,(d-\beta)}{\Gamma\,(^1/_2-\beta-r)\,\Gamma\,(^1/_2-\beta+r)}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma\,(^1/_2-\beta-r+s)\,\Gamma\,(^1/_2-\beta-r+s)\,\Gamma\,(-s)}{\Gamma\,(d-\beta+s)}\,(\alpha t)^s t^{d-1-\beta}ds$$

Путь интегрирования проходит так, чтобы полюсы функции $\Gamma\,(^1/_2-\beta-r+s)\times\Gamma\,(^1/_2-\beta+r+s)$, т. е. точки $s=\beta-{}^1/_2\pm r-n\;(n=0,1,2,\ldots)$, лежали слева от пути, а полюсы $\Gamma\,(-s)$, т. е. $s=0,1,2,\ldots$ справа от пути интегрирования. К обеим частям этого равенства применим преобразование Лапласа

$$f^*\,(\sigma)=\int\limits_0^{\infty}e^{-\sigma t}f\,(t)\,dt=$$

$$=\Gamma\,(d-\beta)\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma\,(^1/_2-\beta-r+s)\,\Gamma\,(^1/_2-\beta+r+s)\,\Gamma\,(-s)}{\Gamma\,(^1/_2-\beta-r)\,\Gamma\,(^1/_2-\beta+r)}\,\alpha^s\sigma^{-s-d+\beta}\,ds$$

Произведем замену переменного $s=-s_1$:

$$f^*\,(\sigma)=\Gamma\,(d-\beta)\,\sigma^{\beta-d}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma\,(^1/_2-\beta-r-s)\,\Gamma\,(^1/_2-\beta+r-s)\,\Gamma\,(s)}{\Gamma\,(^1/_2-\beta-r)\,\Gamma\,(^1/_2-\beta+r)}\,(\sigma\,/\,\alpha)^s ds\ .$$

Осталось вспомнить формулу Барнса — Меллина для функции Уиттекера

$$W_{\beta,r}\,(\sigma\,/\,\alpha)=\frac{e^{-\sigma/2\alpha}\,(\sigma/\alpha)^{\beta}}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\frac{\Gamma\,(^1/_2-\beta-r-s)\,\Gamma\,(^1/_2-\beta+r-s)\,\Gamma\,(s)}{\Gamma\,(^1/_2-\beta-r)\,\Gamma\,(^1/_2-\beta+r)}\,(\sigma\,/\,\alpha)^s\,ds$$

([8], стр. 148), что и доказывает наше утверждение.

Поступила 25 IX 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений. 1951, ДАН, т. 77, № 1.
2. Линь Ц. Ц. Теория гидродинамической устойчивости. 1958, Изд-во иностр. лит-ры.
3. Schlichting H. Turbulenz bei Wärmeschichtung, ZAMM, 15, 313, 1935.
4. Eliassen A., Høiland E., Riis E. Two-dimensional perturbation of a flow with constant shear. Inst. for weather and climate res., publ. I, Oslo, 1953.
5. Taylor G. J. Effect of variation in density on the stability... Proc. Roy. Soc. (A), 132, A820, 1931.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. 1956, Изд-во иностр. лит-ры.
7. Прандтль. Гидроаэромеханика.
8. Уиттекер Е. Т., Ватсон Г. Н., Курс современного анализа. 1934, ГТТИ, т. 2.