

О ВОЛНАХ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ НА ПОВЕРХНОСТИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ УДАРНОЙ ВОЛНОЙ

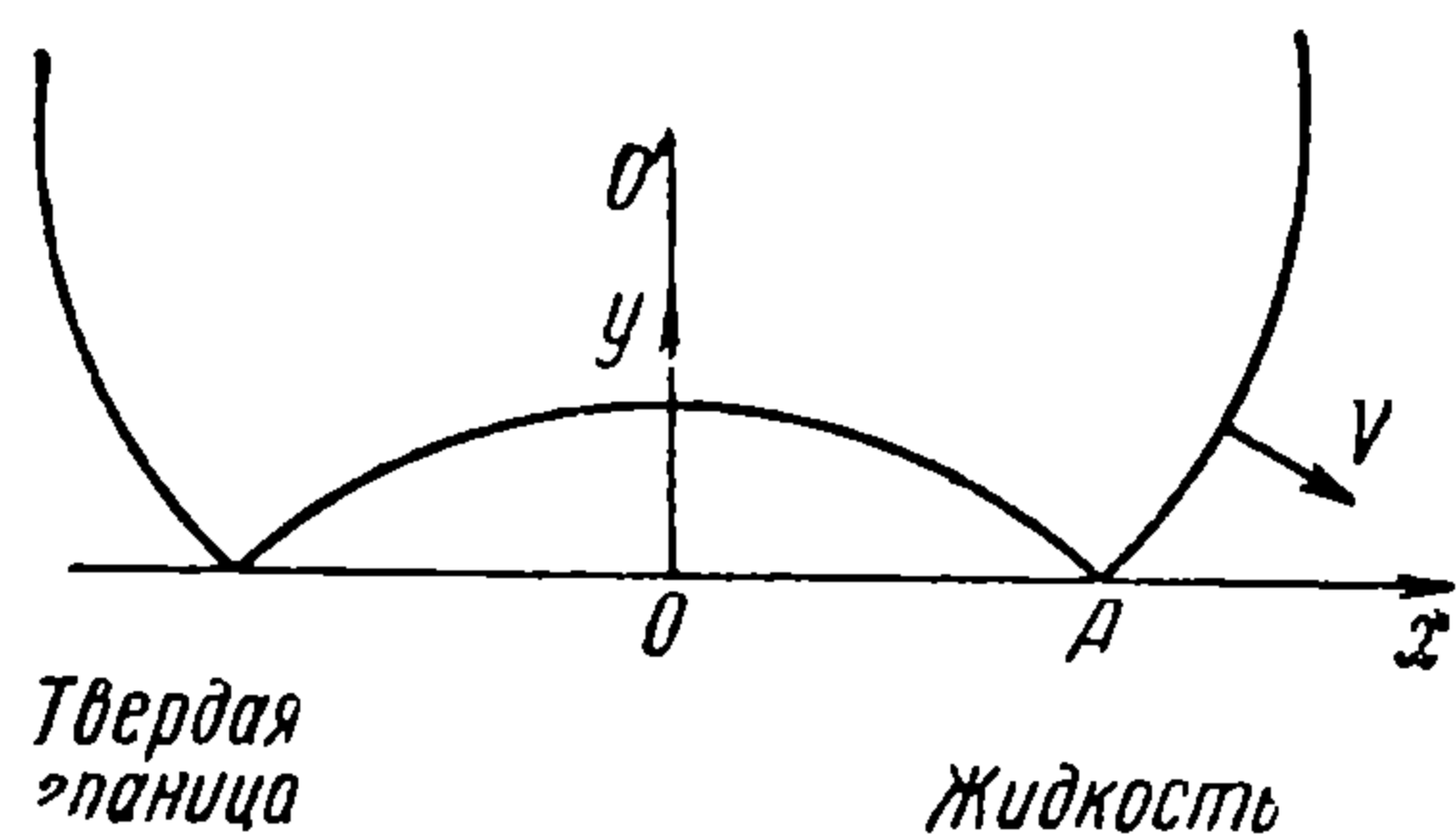
Б. Н. Румянцев

(Москва)

Рассматриваются плоская и пространственная задачи о движении жидкости под действием давления, приложенного к ее поверхности, без учета влияния силы тяжести. Исследуется ряд автомодельных решений.

Если над поверхностью жидкости произведен взрыв (фиг. 1), то через некоторое время ударная волна достигает жидкости и взаимодействует с ней. Для определения движения жидкости и газа пужно решать задачу совместно в обеих областях. Однако в первом приближении, учитывая соотношение плотностей двух сред, можно считать, что перемещения жидкости не влияют на движение газа, которое примем известным. Такая постановка приводит к задаче: определить движение жидкости под действием давления, приложенного к поверхности и изменяющегося по заданному закону. В аналогичной постановке линейная задача для сжимаемой жидкости в работе [1] рассматривалась, но автор исследовал только поля давлений. Примем жидкость несжимаемой; это оправдано для случая воздуха и воды при давлениях за ударной волной не больше 22 кг/см^2 .

§ 1. Плоская задача. Рассмотрим сначала плоский случай. Вследствие того, что движение начинается из состояния покоя, существует потенциал скорости φ , удовлетворяющий в области течения уравнению



Фиг. 1

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (\nabla\varphi = -\mathbf{v}) \quad (1.1)$$

Граничные условия будут следующие:

$$p(x, 0; t) = p_0(x, t) \quad \text{на оси } x \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на твердых границах} \quad (1.3)$$

Здесь \mathbf{n} — направление нормали к твердой границе. Если воспользоваться интегралом Коши, то, пренебрегая членами второго порядка и гравитацией, условие (1.2) можно представить в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = p_0(x, t) \quad \text{на оси } x \quad (1.4)$$

Ограничимся рассмотрением трех случаев: 1) давление за ударной волной постоянное, 2) давление за ударной волной — произвольная функция x/t и 3) цилиндрический взрыв на поверхности жидкости.

1. Пусть вдоль стенки CO движется со скоростью V перпендикулярная к ней ударная волна (фиг. 2). В точке O она встречает свободную поверхность жидкости с плотностью ρ_1 и начинает двигаться вдоль нее; при этом точка A движется в направлении положительной оси x со ско-

ростью $V \sin \alpha$. На участке AB давление можно считать нулем, на OA оно определяется из решения газодинамической задачи, которое считаем известным [2,3]. Рассматриваемая задача автомодельна, так как все течение зависит только от безразмерных комбинаций $\xi = x/Vt$, $\eta = y/Vt$ и углов α и β .

В безразмерных координатах соотношения (1.1), (1.3) и (1.4) имеют вид соответственно:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} = 0 \quad (\varphi = \Phi(\xi, \eta) V^2 t) \quad (1.5)$$

$$\Phi - \left(\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = a(\xi) \quad \text{при } 0 < \xi < \frac{1}{\varepsilon} \quad \left(a = \frac{P_0(\xi)}{V^2 \rho_1} \right) \quad (1.6)$$

$$\Phi - \left(\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} \right) = 0 \quad \text{при } \frac{1}{\varepsilon} < \xi < \infty \quad \left(\varepsilon = \sin \alpha \right)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n_1} = 0 \quad \text{на твердой границе} \quad (1.7)$$

Перейдем к комплексным переменным, полагая $w = \Phi - i\Psi$, $z = \xi + i\eta$. При этом граничные условия (1.6) примут вид:

$$\operatorname{Re}(w - \zeta dw/d\zeta) = a_1(\zeta_1) \quad \text{при } 0 < \zeta_1 < 1 \quad (\zeta = z\varepsilon) \quad (1.8)$$

$$\operatorname{Re}(w - \zeta dw/d\zeta) = 0 \quad \text{при } 1 < \zeta_1 < \infty \quad (\zeta_1 = \xi\varepsilon)$$

Введем новую аналитическую функцию $W = w - \zeta dw/d\zeta$. Для нее граничные условия (1.6) имеют вид:

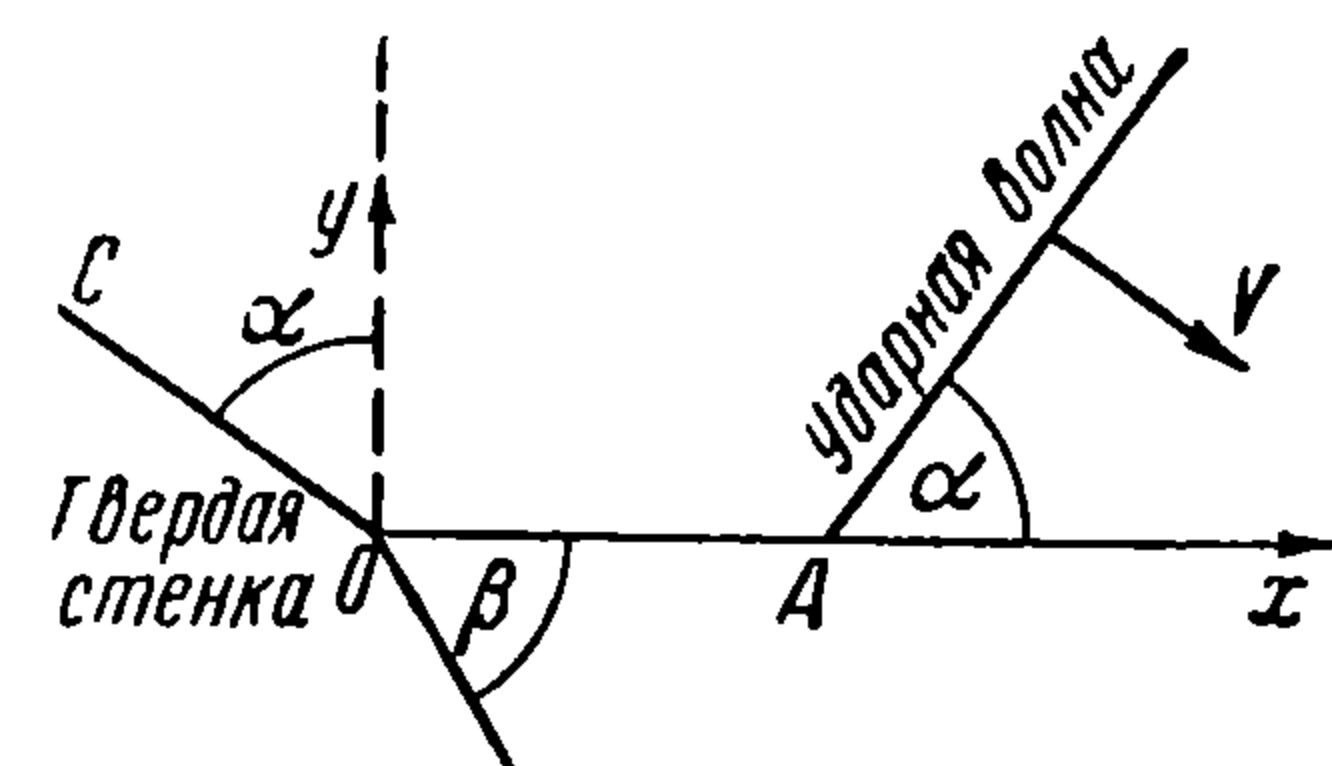
$$\operatorname{Re} W = a_1(\zeta_1) \quad \text{при } 0 < \zeta_1 < 1, \quad \operatorname{Re} W = 0 \quad \text{при } 1 < \zeta_1 < \infty \quad (1.9)$$

Перейдем к переменной $\tau = \zeta^k$, изменяющейся в правом нижнем квадранте, где $k = \pi/2\beta$; пусть $W = W_1(\tau)$. Продолжим по принципу симметрии функцию $W_1(\tau)$ в левый нижний квадрант, при этом вследствие симметрии относительно оси η_1 условие (1.7) автоматически выполняется. Теперь можно определить W_1 по формуле Шварца:

$$W_1 = -\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^1 a_1(t^{1/k}) \frac{dt}{t - \tau} \quad (1.10)$$

В рассматриваемом случае $a_1 = \text{const}$, поэтому W имеет вид:

$$W = -\frac{a}{\pi i} \ln \frac{\zeta^k - 1}{\zeta^k + 1}$$



Фиг. 2

Для того чтобы найти функцию $dw/d\zeta = \varepsilon^{-1}(-u + iv)$, где u и v — соответственно горизонтальная и вертикальная скорости, нужно проинтегрировать уравнение

$$\zeta \frac{dw}{d\zeta} - w + W = 0 \quad (1.11)$$

Интегрируя его, находим

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{2ka}{\pi i} \int \frac{\zeta^{k-2} d\zeta}{\zeta^{2k} - 1} \quad (1.12)$$

При $k = 1$ интеграл равен

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{a}{\pi i} \ln \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1} \quad (1.13)$$

При $k > 1$ и целом можно получить общую формулу

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\zeta} = & -\frac{2a}{\pi i} \left\{ \frac{1}{2} [(-1)^k \ln(1+\zeta) - \ln(1-\zeta)] - \right. \\ & -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \cos \frac{j(k-1)\pi}{k} \ln \left[1 - 2\zeta \cos \frac{j\pi}{k} + \zeta^2 \right] + \\ & \left. + \sum_{j=1}^{k-1} \sin \frac{j(k-1)\pi}{k} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\zeta - \cos \frac{j\pi}{k}}{\sin \frac{j\pi}{k}} \right\} + C_k \end{aligned} \quad (1.14)$$

где C_k — постоянные интегрирования, которые определяются из условия покоя на ∞ . При $k=2$ и 3 из (1.14) получается

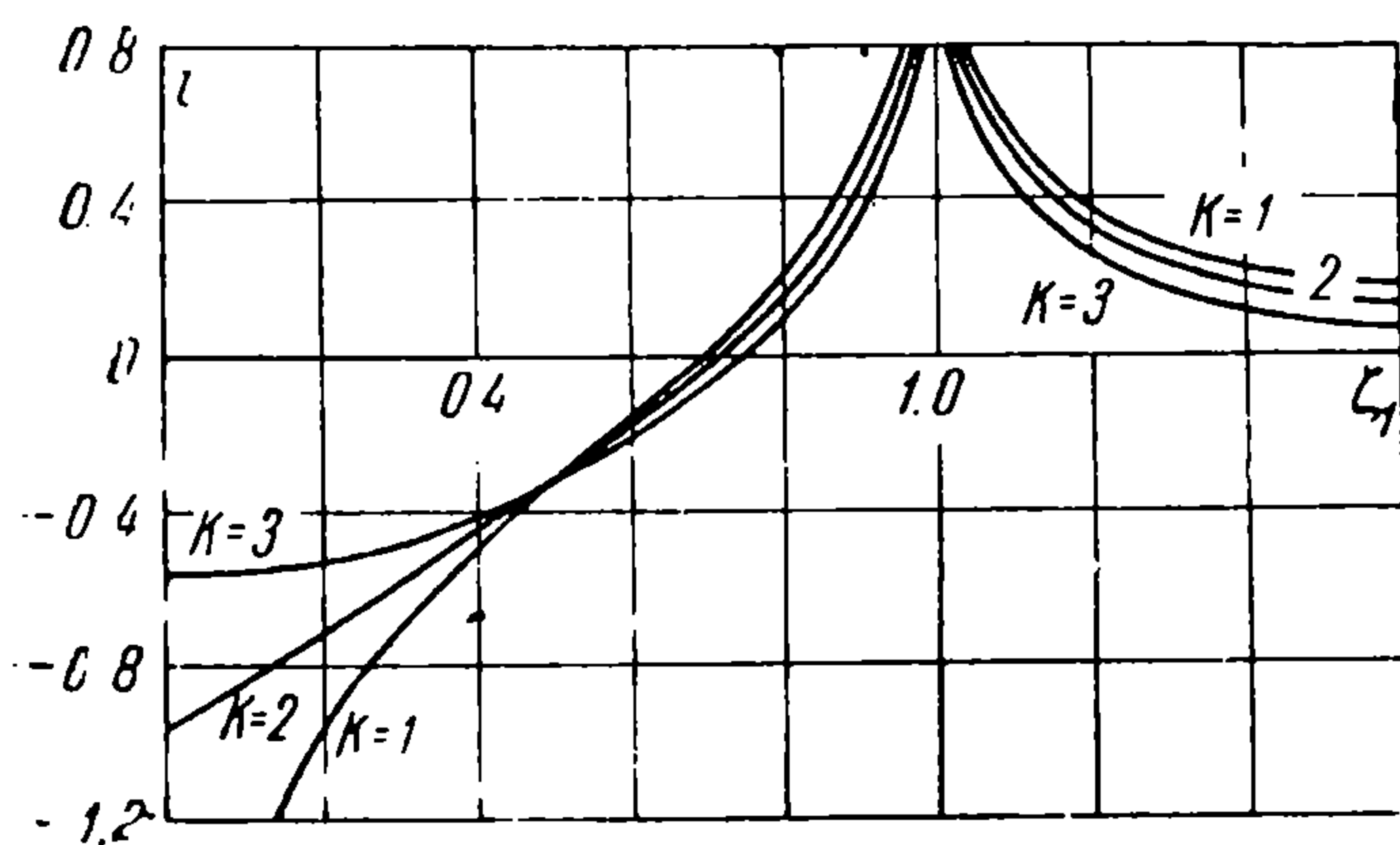
$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{a}{\pi i} \left(\ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \zeta - \pi + \pi i \right) \quad \text{при } k=2 \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\zeta} = & -\frac{a}{\pi i} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{(1-\zeta+\zeta^2)(1+\zeta+\zeta^2)}{(1-\zeta^2)^2} + \right. \\ & \left. + \sqrt{3} \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\zeta-1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\zeta+1}{\sqrt{3}} \right) + \pi i \right] \quad \text{при } k=3 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Вычислим скорость в начале координат. Из (1.13), (1.15) и (1.16) получаем

$$(u+iv)_{z=0} = a\varepsilon \left(1 - i \operatorname{tg} \frac{\pi}{2k} \right) = a\varepsilon (1 - i \operatorname{tg} \beta) \quad (1.17)$$

Таким образом, скорость в начале координат направлена вдоль твердой границы. Из (1.13), (1.15) и (1.16) видим, что горизонтальная скорость u равна $a\varepsilon$ в зоне повышенного давления и нулю в зоне нулевого давления. Графики зависимости вертикальной скорости



Фиг. 3

$v_1 = a^{-1} \operatorname{Im} dw/d\zeta$ от величины ζ_1 для значений $k=1, 2, 3$ построены на фиг. 3. Особенности в начале координат при $k=1$ и при любых k в точке $\zeta=1$ являются дефектом линейной теории.

Вычислим перемещение частиц жидкости S_1 :

$$S_1 = V \int_0^t (u+iv) dt \quad (1.18)$$

Подставляя в (1.18) выражения u и v через ζ и вычисляя интеграл, получим поле перемещений частиц жидкости. Проведем исследование только для точек поверхности жидкости. Горизонтальное перемещение, очевидно, равно $a\varepsilon Vt$ в зоне высокого давления и нулю в зоне нулевого давления.

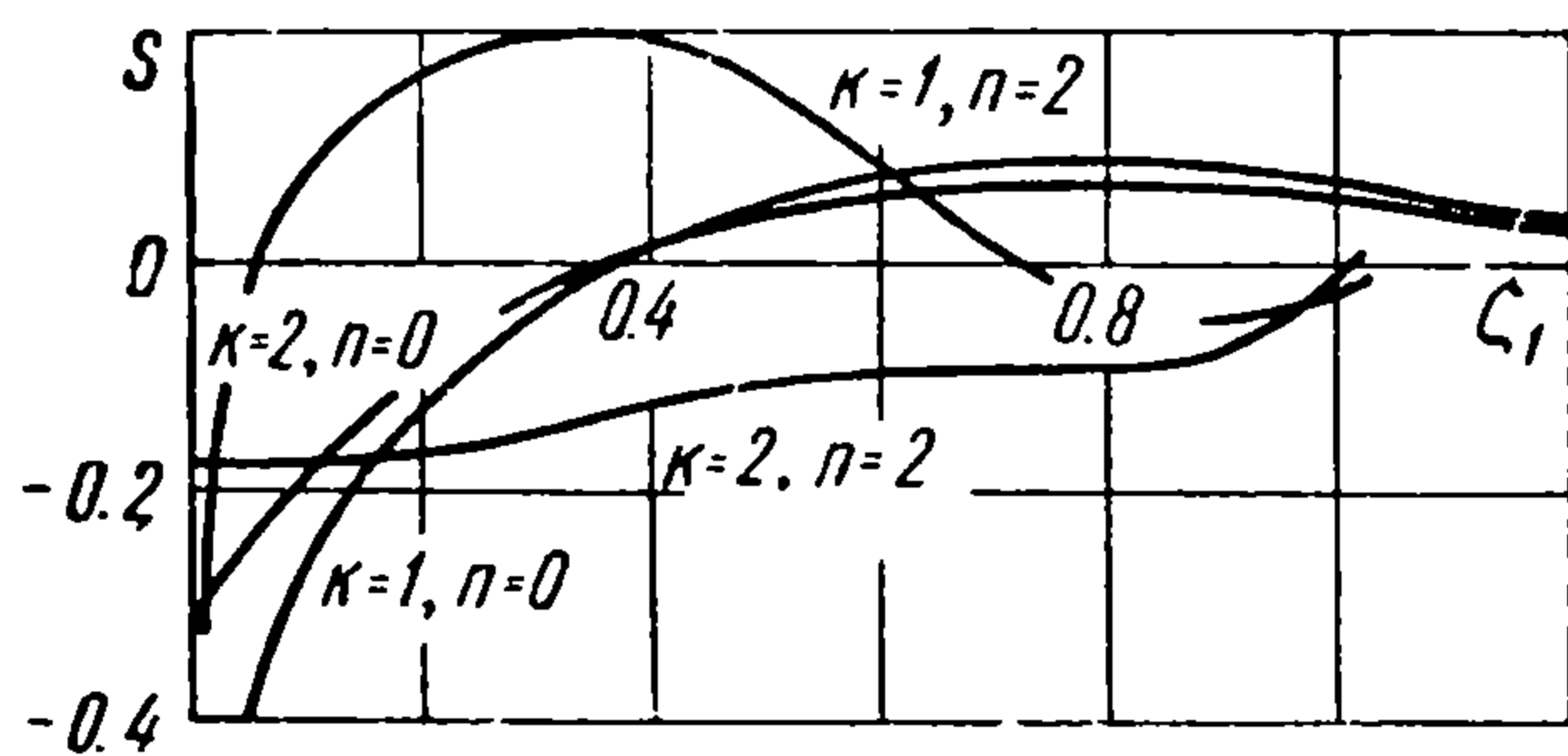
Рассмотрим вертикальное перемещение S_* . Интегрируя (1.18) и вводя безразмерное расстояние $S = S_* \pi / a\varepsilon Vt$, получим

$$S = -i \left(\ln \frac{\zeta_1^2 - 1}{\zeta_1^2} - 2 + \zeta_1 \ln \frac{1 + \zeta_1}{1 - \zeta_1} \right) \quad \text{при } k=1 \quad (1.19)$$

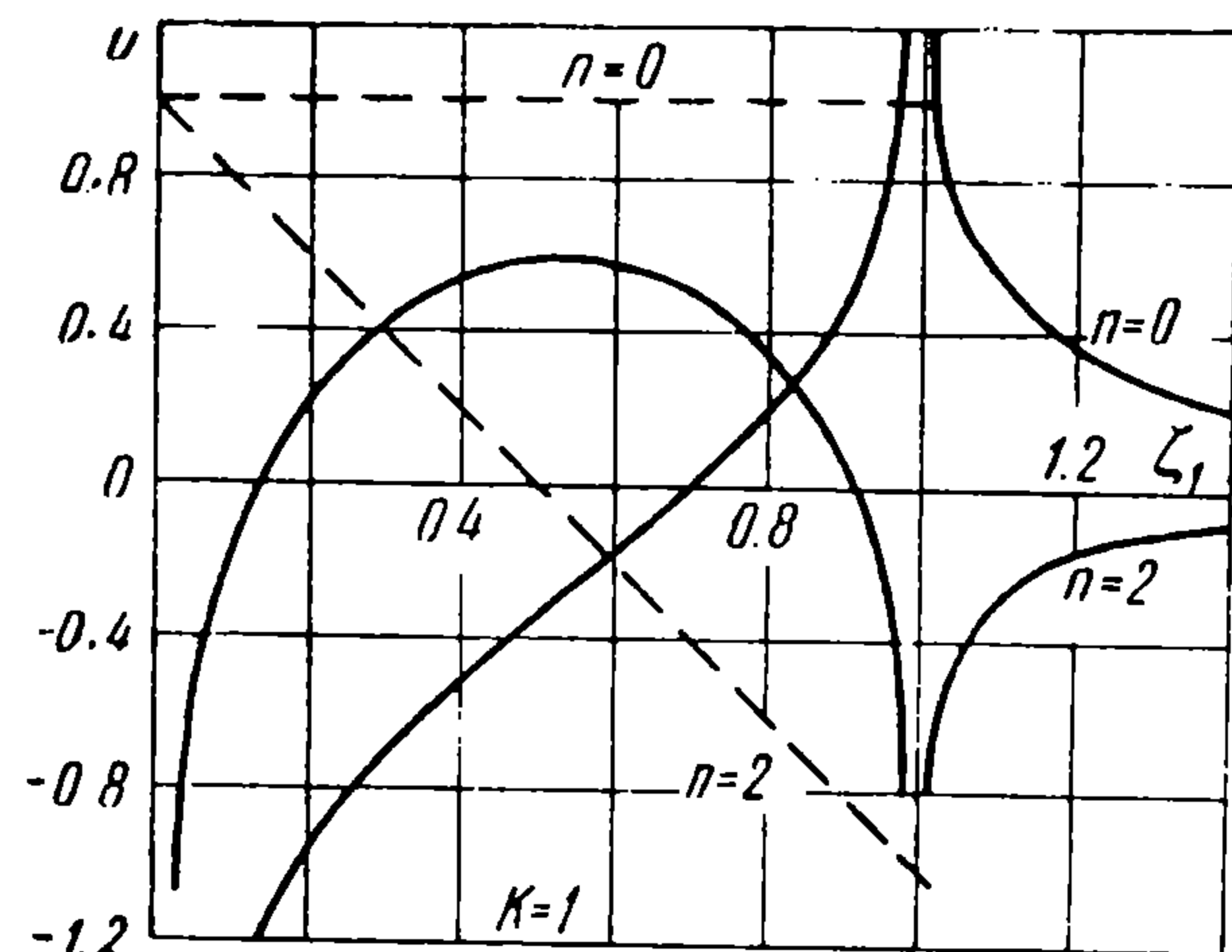
$$S = i \left(\ln \frac{1 + \zeta_1}{1 - \zeta_1} + \zeta_1 \ln \frac{1 - \zeta_1^4}{\zeta_1^4} + 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \zeta_1 - \pi \right) \quad \text{при } k=2 \quad (1.20)$$

Графики функций $S(\zeta_1)$ по этим формулам приведены на фиг. 4. Заметим, что при $k > 1$ поле перемещений не имеет особенностей.

2. При вычислении поля скоростей мы полагали, что давление в зоне после ударной волны постоянно. Это предположение справедливо для больших и малых углов падения α (фиг. 2), для $\alpha \approx 0$ и $\alpha \approx 1/2\pi$. Для промежуточных α так можно считать лишь приближенно (например, в [4] показано, что при падении ударной волны на малый угол повышенное давление сосредоточено в узкой области, примыкающей к ударной волне). Для более точного решения функцию $a_1(\zeta_1)$, определяющую



Фиг. 4



Фиг. 5

распределение давления по поверхности жидкости, следует взять согласно эксперименту либо можно ею задаться, используя решение газодинамической задачи об отражении ударной волны от произвольного угла. Будем считать, что функция $a_1(\zeta_1)$ известна, разложим ее в ряд по степеням ζ_1 :

$$a_1(\zeta_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta_1^n \quad (1.21)$$

Подставив (1.21) в (1.10), получаем

$$W = -\frac{1}{\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^1 t^{\frac{n}{k}} \frac{dt}{t-\tau} \quad (1.22)$$

Подставляя (1.22) в (1.11) и пользуясь правилом дифференцирования под знаком интеграла, находим

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{k^2}{\pi i} \int \zeta^{k-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-1}^1 \frac{\zeta_1^{n+k-1} d\zeta_1}{(\zeta_1^k - \zeta^k)^2} d\zeta \quad (1.23)$$

Постоянная интегрирования определяется из условия покоя на ∞ . Внутренний интеграл в (1.23) при любом целом k берется в элементарных функциях; таким образом, вычисление поля скоростей при произвольной функции $a_1(\zeta_1)$ сводится к квадратурам.

В качестве примера рассмотрим один из простейших случаев неравномерного распределения давления $a_1(\zeta_1) = a_2 \zeta_1^2$, $a_2 = \text{const}$. Здесь большая часть давления сосредоточена вблизи ударной волны. Вычисляя интегралы, находим

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{a_2}{\pi i} \left[\ln \frac{\zeta^2}{\zeta^2 - 1} + 2 \left(\zeta \ln \frac{\zeta - 1}{\zeta + 1} + 2 \right) \right] \quad \text{при } k = 1 \quad (1.24)$$

$$\frac{dw}{d\zeta} = -\frac{2a_2}{\pi i} \left(\zeta \ln \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \text{arc tg } \zeta + \frac{\pi}{2} \right) \quad \text{при } k = 2 \quad (1.25)$$

На фиг. 5 построены распределения вертикальных (сплошные линии) и горизонтальных (штриховые линии) скоростей, рассчитанные по (1.24). Там же для сравнения построены соответствующие кривые для равномерного распределения давления.

Подставляя (1.24) и (1.25) в (1.18), получаем вертикальное перемещение поверхности:

$$S = -i \left(\ln \frac{\zeta_1^2 - 1}{\zeta_1^2} - 6 + \zeta_1 \ln \frac{1 + \zeta_1}{1 - \zeta_1} + \pi^2 \zeta_1 - 2 \int_0^{\zeta_1} \ln \frac{1 + \zeta_1}{1 - \zeta_1} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \right) \quad \text{при } k = 1 \quad (1.26)$$

$$S = i \left(\ln \frac{1 + \zeta_1}{1 - \zeta_1} + \zeta_1 \ln \frac{1 - \zeta_1^2}{1 + \zeta_1^2} - 2 \operatorname{arctg} \zeta_1 - \frac{\pi}{2} (\pi - 2) - \int_0^{\zeta_1} \ln \frac{1 - \zeta_1^2}{1 + \zeta_1^2} \frac{d\zeta_1}{\zeta_1} \right) \quad \text{при } k = 2 \quad (1.27)$$

Графики этих функций построены на фиг. 4. По формулам (1.24) и (1.25) легко подсчитать горизонтальное перемещение S' . Оно в обоих случаях одинаково и равно

$$S' = S_1' / Vt = a_2 \varepsilon (1 - 2\zeta_1) \quad \text{при } 0 < \zeta_1 < 1, \quad S' = 0 \quad \text{при } 1 < \zeta_1 < \infty$$

3. Предположим, что от точки O распространяется цилиндрическая зона давления. Закон изменения давления на поверхности жидкости примем таким, как при сильном цилиндрическом взрыве энергии $1/2 E$. В этом случае течение зависит от параметров $\gamma, \rho_1, \rho_2, E, x, y, t$, где γ — отношение теплоемкостей для газа, ρ_1 — плотность жидкости, ρ_2 — плотность газа. Согласно теории размерностей все течение будет зависеть от безразмерных параметров

$$\xi = \frac{\rho_2^{1/4} x}{E^{1/4} t^{1/2}}, \quad \eta = \frac{\rho_2^{1/4} y}{E^{1/4} t^{1/2}}, \quad \gamma, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

Ограничимся рассмотрением наиболее важного случая бесконечно глубокой жидкости. В нижней полуплоскости, занятой жидкостью, будет справедливо уравнение (1.5), где потенциал скорости в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\varphi(x, y; t) = \Phi(\xi, \eta) \sqrt{\frac{E}{\rho_2}}$$

Граничное условие на поверхности (1.4) в безразмерных координатах имеет вид:

$$\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = - \frac{h(\xi)}{\gamma + 1} \frac{\rho_2}{\rho_1} = - a_1(\xi) \quad \left(h(\xi) = \frac{p}{p_2} \right) \quad (1.28)$$

где $h(\xi)$ — известная функция [5], описывающая в безразмерных координатах распределение давления при сильном взрыве, p_2 — давление за сильной ударной волной. Введем комплексные переменные $w = \Phi + i\Psi$, $z = \xi + i\eta$. Условие (1.28) тогда представится в виде

$$\operatorname{Re} \left(z \frac{dw}{dz} \right) = - a_1(\xi) \quad \text{при } |\xi| < 1, \quad \operatorname{Re} \left(z \frac{dw}{dz} \right) = 0 \quad \text{при } |\xi| > 1 \quad (1.29)$$

Таким образом, для определения функции zdw/dz нужно решить задачу Дирихле. Применяя интеграл Шварца, находим

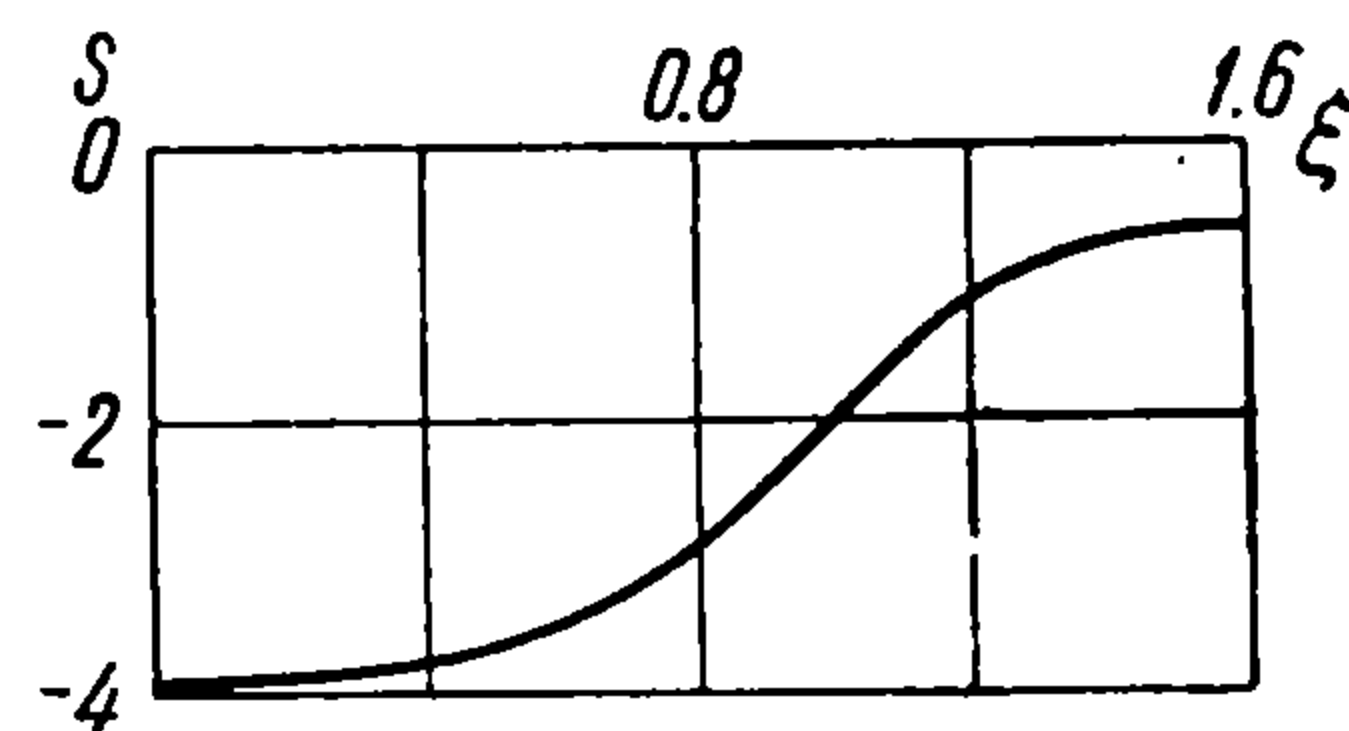
$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{\pi iz} \int_{-1}^1 a_1(t) \frac{dt}{t - z} \quad (1.30)$$

Полученная формула описывает поле скоростей. Для того чтобы получить о нем приближенное представление, аппроксимируем $a_1(t)$ постоянной $a_1(t) = a$, при этом ошибка допускается только вблизи ударной волны. Из (1.30) получаем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a}{\pi i} \frac{1}{z} \ln \frac{z-1}{z+1} \quad (1.31)$$

Посредством приближенной формулы (1.31) легко вычислить поле перемещений. Имеем

$$S = \frac{\pi S_1 \rho_2}{2 a k^{1/4} t^{1/2}} = -i \left(\frac{1-z^2}{z} \ln \frac{z-1}{z+1} - 2 \right) \quad (1.32)$$



Фиг. 6

График вертикальных перемещений частиц поверхности жидкости, рассчитанный по этой формуле, построен на фиг. 6. Для горизонтальных перемещений получаем выражения

$$S' = a \frac{1-\xi^2}{\xi} \quad \text{при } |\xi| < 1, \quad S' = 0 \quad \text{при } |\xi| > 1$$

Вычислим энергию E_1 , которую приобретает жидкость после взрыва. Воспользовавшись приближенной формулой (1.31), получаем

$$E_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} E \int_0^\infty \varphi \frac{d\varphi}{d\eta} d\xi = \frac{0.084}{(\gamma+1)^2} \frac{\rho_2}{\rho_1} E \quad (1.33)$$

Таким образом, величина энергии, переданной жидкости, пропорциональна отношению плотностей двух сред.

§ 2. Пространственная задача. Рассмотрим при тех же предположениях задачу о движении жидкости, заполняющей нижнее полупространство, под действием давления, возникающего от точечного взрыва в газе. В нижнем полупространстве потенциал скоростей φ удовлетворяет уравнению Лапласа. Условие на поверхности имеет вид (задачу считаем осесимметричной, поэтому будем пользоваться цилиндрическими координатами):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = p_1(\rho, t) \quad \text{при } z = 0 \quad (2.1)$$

где $p_1(\rho, t)$ — известная функция. Рассмотрим функцию $\Phi(\rho, z; t) = \partial \varphi / \partial t$. Она, очевидно, тоже должна удовлетворять уравнению Лапласа.

Рассмотрим трансформанту Ханкеля Φ° нулевого порядка функции Φ :

$$\Phi^\circ(\xi, z; t) = \int_0^\infty r \Phi(r, z; t) J_0(\xi r) dr$$

Как известно, умножая обе части уравнения Лапласа на $r J_0(\xi r)$ и интегрируя по r от 0 до ∞ , получим, что Φ° удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 \Phi^\circ}{dz^2} - \xi^2 \Phi^\circ = 0$$

решение которого, пригодное для случаев, когда $\Phi \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$, имеет вид:

$$\Phi^\circ = A(\xi, t) e^{\xi z}$$

Умножая (2.1) на $rJ_0(\xi r)$, интегрируя по r и полагая в последнем соотношении $z = 0$, определяем $A(\xi, t)$, а затем, применяя формулу обращения для преобразования Ханкеля, получаем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \int_0^{\infty} \xi J_0(\xi \rho) e^{\xi z} \int_0^{\infty} r J_0(\xi r) p_1(r, t) dr d\xi \quad (2.2)$$

Формула (2.2) дает поле давлений в жидкости, вызванное произвольным распределением давления по поверхности $p_1(\rho, t)$. Перейдем к рассмотрению частных случаев.

1°. Пусть функция $p_1(\rho, t)$ имеет следующий вид:

$$p_1 = a_1 \quad \text{при } \rho < Vt, \quad p_1 = 0 \quad \text{при } \rho > Vt \quad (a_1, V = \text{const})$$

Это соответствует круговой зоне постоянного давления, расширяющейся во все стороны с постоянной скоростью. В такой постановке задача автомодельна, все параметры течения зависят от безразмерных величин

$$a = \frac{a_1}{\rho_1 V^2}, \quad \rho_1 = \frac{\rho}{Vt}, \quad z_1 = \frac{z}{Vt}$$

Потенциал скорости в безразмерных переменных имеет вид:

$$\varphi(\rho, z; t) = V^2 t \Phi(\rho_1, z_1)$$

Уравнение (2.2) в безразмерной форме преобразуется к виду

$$\Phi - \rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_1} - z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} = a \int_0^{\infty} e^{\xi z_1} J_0(\xi \rho_1) J_1(\xi) d\xi \quad (2.3)$$

Разложим $\Phi(\rho_1, z_1)$ в ряд по степеням z_1 , ограничившись двумя членами

$$\Phi(\rho_1, z_1) = \Phi_0(\rho_1) + z_1 \Phi_1(\rho_1) + \dots \quad (2.4)$$

Подставляя (2.4) в (2.3), разлагая правую часть (2.3) также в ряд по z_1 и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z_1 , получаем для членов нулевого и первого порядка выражения

$$\Phi_0 - \rho_1 \frac{d\Phi_0}{d\rho_1} = a \int_0^{\infty} J_0(\xi \rho_1) J_1(\xi) d\xi \quad (2.5)$$

$$\rho_1 \frac{d\Phi_1}{d\rho_1} = -a \int_0^{\infty} \xi J_0(\xi \rho_1) J_1(\xi) d\xi \quad (2.6)$$

Из (2.5) находим горизонтальную скорость частиц поверхности жидкости:

$$u = \frac{d\Phi_0}{d\rho_1} = a \quad \text{при } \rho_1 < 1, \quad u = 0 \quad \text{при } \rho_1 > 1 \quad (2.7)$$

Из (2.6) находим соответствующую вертикальную скорость:

$$v_1 = \Phi_1(\rho_1) \frac{\pi^2}{2a} = - \left[\int_0^{\rho_1} \frac{3 - \rho^2}{(1 + \rho^2)^2} \frac{1 + \rho^2}{2\rho} d\rho + \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{1 - \rho^2}{(1 + \rho^2) \rho} \sin \frac{1 + \rho^2}{\rho} d\rho \right] \quad (2.8)$$

Произвольная постоянная выбрана из условия покоя на бесконечности. График вертикальной скорости, рассчитанный по этой формуле, построен на фиг. 7 (штриховая кривая). Вычислим перемещения точек поверхности жидкости. Введем безразмерное расстояние $S = S_1 \pi^2 / Vtza$, где S_1 — размерное расстояние. Обозначим через S' и S_* горизонтальное и вертикальное перемещения. Используя (2.8) и (1.18), получаем для горизонтального перемещения

$$S' = a \quad \text{при } \rho_1 < 1, \quad S' = 0 \quad \text{при } \rho_1 > 1$$

На основании (2.8) и (1.18) построен график вертикального перемещения (фиг. 8, штриховая кривая).

2°. Примем теперь, что распределение давления $p_0(\rho, t)$ таково, как если бы в точке O на поверхности жидкости произошел сильный взрыв, при котором в газ выделилась энергия $E/2$. Задача в такой постановке также автомодельна, все течение зависит от безразмерных комбинаций

$$\rho_1 = \frac{\rho}{(E/\rho_2)^{1/5} t^{2/5}}, \quad z_1 = \frac{z}{(E/\rho_2)^{1/5} t^{2/5}}, \quad \gamma, \quad \frac{\rho_2}{\rho_1}$$

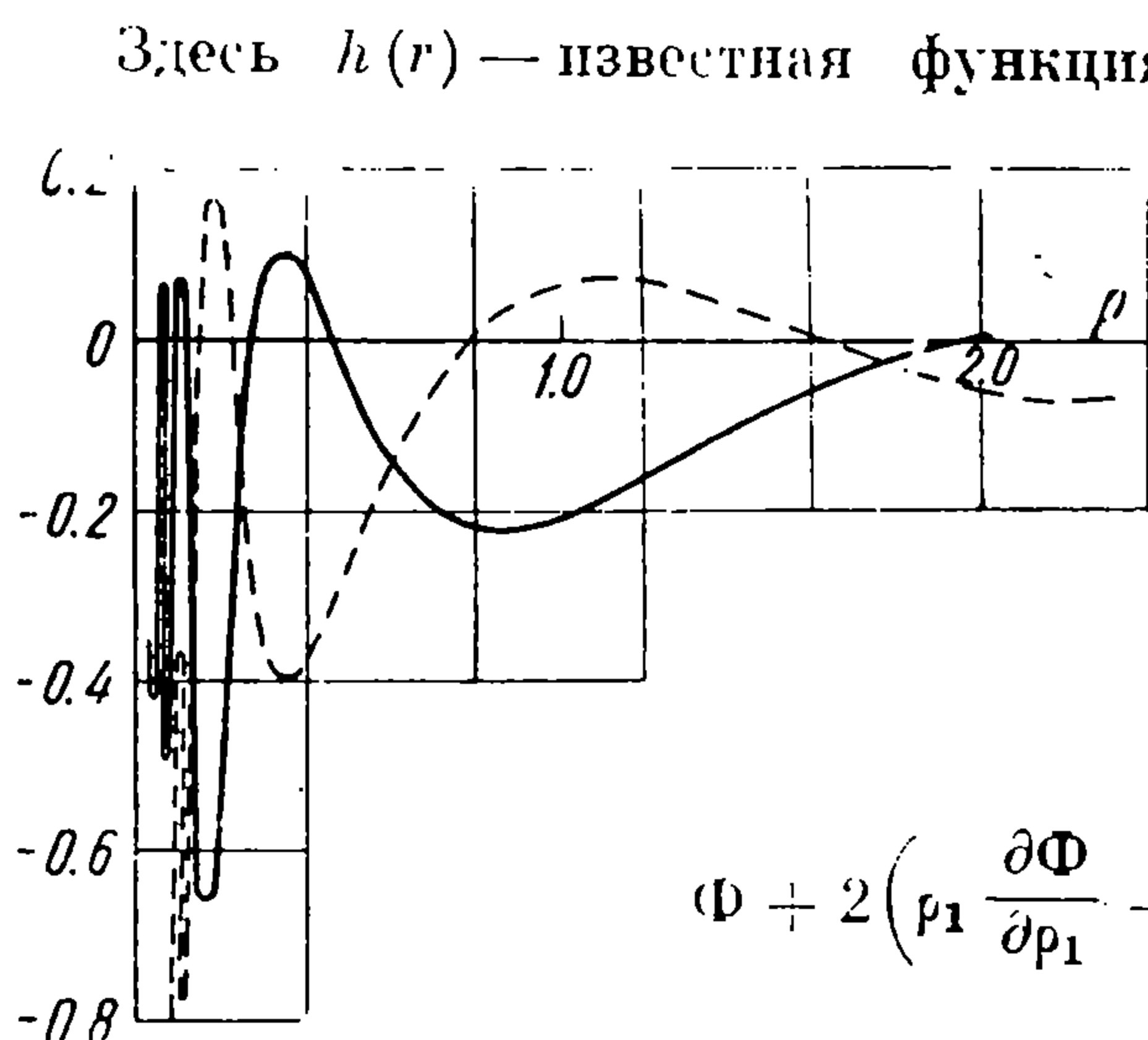
Потенциал скорости φ выражается через соответствующую безразмерную функцию следующим образом:

$$\varphi(\rho, z; t) = \left(\frac{E}{\rho_2}\right)^{2/5} \frac{1}{t^{1/5}} \Phi(\rho_1, z_1)$$

Уравнение (2.2), записанное в безразмерной форме для данного случая, приобретает вид:

$$\Phi + 2\left(\rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_1} + z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}\right) = a \int_0^\infty \xi J_0(\xi \rho_1) e^{\xi z_1} \int_0^1 r J_0(\xi r) h(r) dr d\xi \quad (2.9)$$

$$\left(a = -\frac{8}{5(\gamma + 1)} \frac{\rho_2}{\rho_1}\right)$$



Фиг. 7

Здесь $h(r)$ — известная функция, описывающая распределение давлений при сильном взрыве [5]; ее график приведен на фиг. 9. При сложном виде функции $h(r)$ внутренний интеграл в (2.9) не берется в элементарных функциях. Рассмотрим простейшую аппроксимацию $h(r)$; ее можно, как видно по фиг. 9, с хорошим приближением считать постоянной: $h(r) = b = 0.366$. При этом (2.9) приобретает вид:

$$\Phi + 2\left(\rho_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \rho_1} + z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}\right) = ab \int_0^\infty e^{\xi z_1} J_0(\xi \rho_1) J_1(\xi) d\xi \quad (2.10)$$

Аналогично проделанному в предыдущем пункте, подставляя (2.4) в (2.10), разлагая интеграл в ряд и приравнявая коэффициенты при равных степенях z_1 , получаем два дифференциальных уравнения для определения Φ_0 и Φ_1 . Решая их, находим для горизонтальной скорости на поверхности жидкости $u = d\Phi_0/d\rho_1$

$$u = \frac{ab}{2\rho_1^{3/2}} \quad \text{при } \rho_1 < 1, \quad u = 0 \quad \text{при } \rho_1 > 1$$

и для вертикальной скорости $v_1 = \Phi_1 \pi^2 / ab$

$$v_1 = - \left[\int_0^{\rho_1} \frac{(3 - \rho^2) \rho}{(1 + \rho^2)^2} \cos^2 \frac{1 + \rho^2}{2\rho} d\rho + \int_0^{\rho_1} \frac{1 - \rho^2}{1 + \rho^2} \sin \frac{1 + \rho^2}{\rho} d\rho \right] + \frac{C}{\rho^{3/2}} \quad (2.11)$$

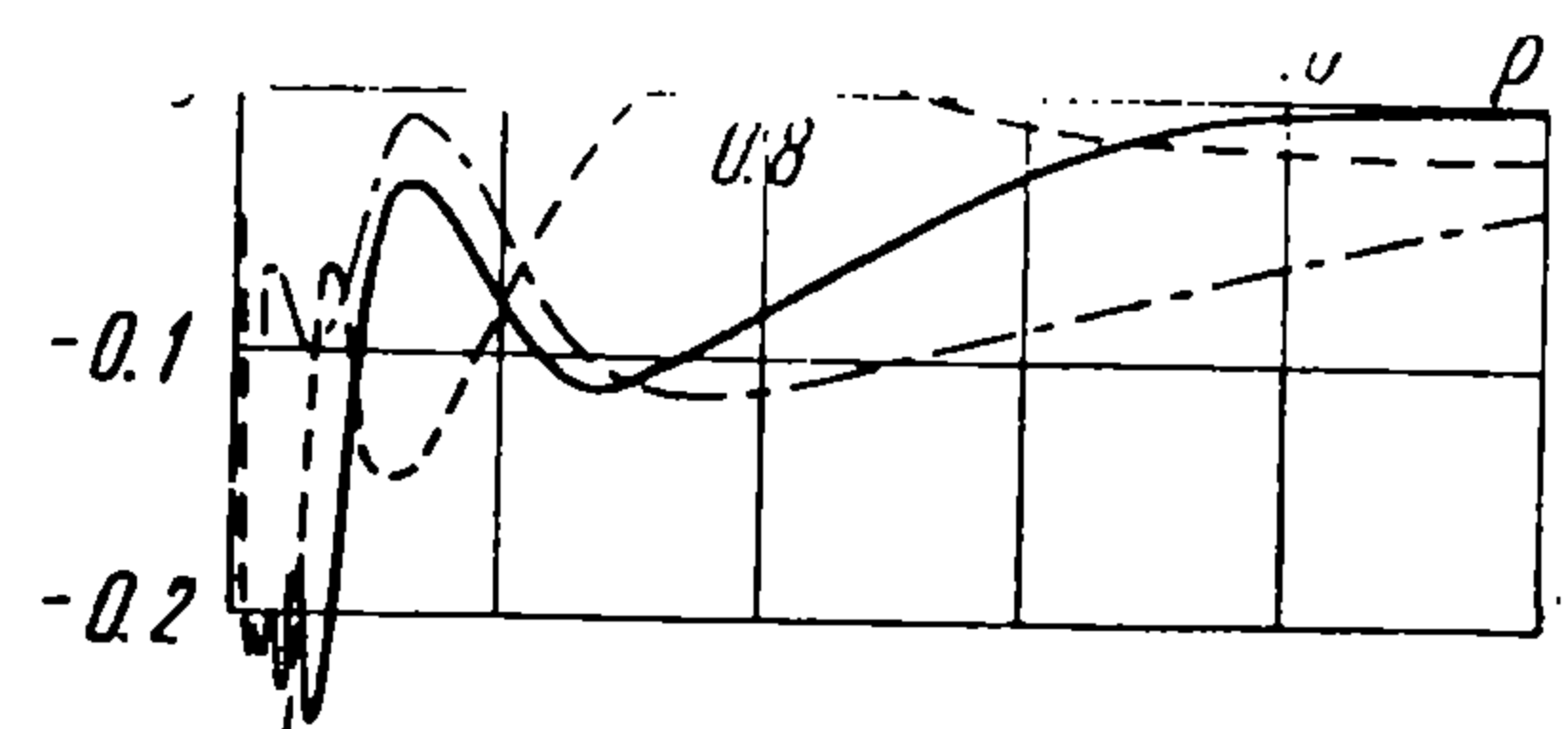
Произвольную постоянную C определяем из условия конечности энергии, приобретенной жидкостью. Получаем $C = 0$. График вертикальной скорости v_1 построен на фиг. 7 (сплошная кривая).

Введем безразмерное расстояние

$$S = \frac{2}{5} S_1 \left(\frac{E}{\rho_2}\right)^{-1/5} t^{-2/5}$$

На фиг. 8 построен график вертикального безразмерного смещения (сплошная кривая), полученный в результате численного интегрирования по формулам (2.11) и (1.18).

Из графика на фиг. 9 видно, что прямая $h(r) = b$ сильно отклоняется от кривой вблизи ударной волны, где давление на узком участке принимает большие значения.



Фиг. 8

Можно учесть этот факт и таким образом уточнить предыдущую теорию. Именно предположим, что функция $h_1(r) = h(r) - b$ имеет вид:

$$h_1(r) = c\delta(r-1), \quad c = \int_0^1 [h(r) - b] dr$$

$\delta(r-1)$ — дельта-функция Дирака

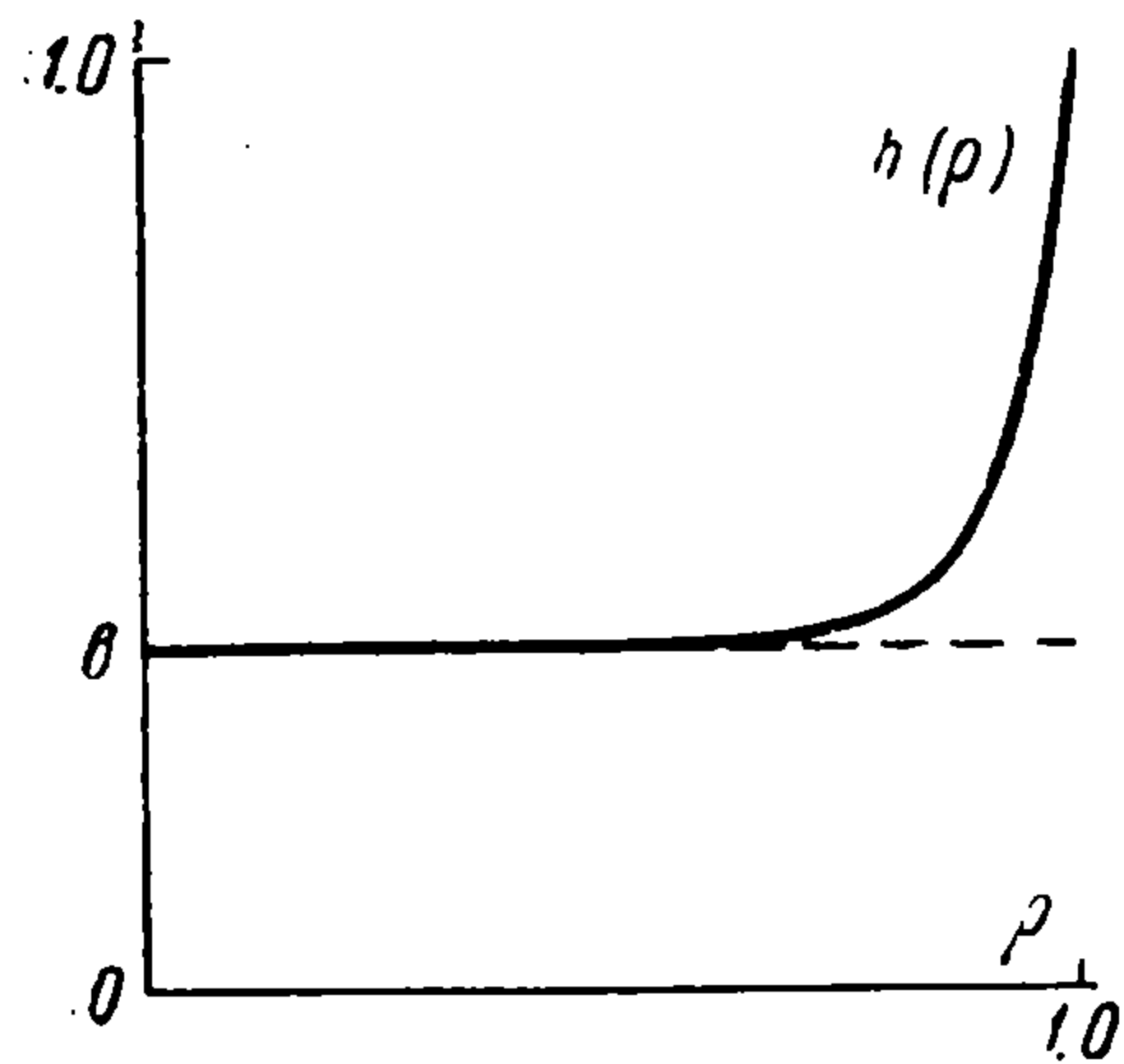
Обозначая потенциал скорости искомого движения через Φ , замечаем, что в силу линейности задачи

$$\Phi = \Phi_b + \Phi_\delta$$

где Φ_b — полученное ранее решение для течения под действием равномерного давления, Φ_δ — потенциал скорости течения под действием кольцевой зоны давления. Определим Φ_δ .

Для этого подставим $h_1(r)$ в (2.9), получаем

$$\Phi_\delta + 2 \left(\rho_1 \frac{\partial \Phi_\delta}{\partial \rho_1} + z_1 \frac{\partial \Phi_\delta}{\partial z_1} \right) = ac \int_0^\infty \xi e^{\xi z_1} J_0(\xi \rho_1) J_0(\xi) d\xi \quad (2.12)$$



Фиг. 9

Для горизонтальной и вертикальной скоростей аналогично предыдущему получаем выражения

$$u_\delta = 0$$

$$v_\delta = -\frac{4ac}{\pi \rho_1^{3/2}} \left[\int_0^{\rho_1} \frac{\rho}{(1+\rho^2)^2} \cos^2 \frac{1+\rho^2}{2\rho} d\rho + \int_0^{\rho_1} \frac{\rho}{2(1+\rho^2)} \sin \frac{1+\rho^2}{\rho} d\rho \right] \quad (2.13)$$

Используя формулы (2.13) и (1.18), получаем соответствующее вертикальное перемещение. Его график (увеличенный в b/c раз) построен на фиг. 8 (пунктирная кривая).

Можно для случая точечного взрыва подсчитать энергию E_1 , переданную жидкости. Используя (2.11), после вычисления интеграла получаем формулу

$$E_1 = \frac{0.0022}{(\gamma+1)^2} \frac{\rho_2}{\rho_1} E$$

В заключение приношу благодарность Н. Н. Моисееву за ценные советы и внимание к работе.

Поступила 9 X 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Багдоев А. Г. Исследование задачи о проникании давления в глубь сжимаемой жидкости. Вести. Моск. университета, 1957, № 3.
2. Лудлофф. Аэродинамика взрывных волн. В сб. статей «Проблемы механики» под ред. Р. Мизеса и Т. Кармана. Изд-во иностр. лит-ры, 1955.
3. Ludloff H. F., Friedman H. B., Aerodynamics of Blasts-Diffraction of Blast Around Finite Corners. JAS, 1955, 22, No. 1, 27—34.
4. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, 1958, т. XXII, № 5.
5. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, Изд. 4, М., 1957.