Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ПЛОСКОМ ВИХРЕВОМ ДВИЖЕНИИ ГАЗА

Ю. С. Завьялов

(Томск)

Рассматривается плоское установившееся вихревое движение идеальной сжимаемой жидкости. В работе [1] указывалось, что если функция скорости $v(p, \psi)$ (p — давление и ψ — функция тока) такова, что величина $(1/v)(\partial^2 v/\partial p^2)$ не зависит от ψ, то нелинейное уравнение вихревого движения [2,3] сводится к линейному уравнению потенциального потока; это является обобщением известных результатов работы Ю. В. Руднева [3]. В случае адиабатического движения указанное условие можно выполнить приближенно, если энтропийная функция $\vartheta(\psi) = p^{1/k}/\rho$ (ρ — плотность) изменяется сравнительно мало. Ранее такие адиабатические течения в сверхзвуковом случае рассматривались И. З. Тарасовой [4-6] при дополнительном предположении, что $(1/v)(\partial^2 v/\partial p^2) = \mathrm{const}$, и без выяснения их связи с потенциальными движениями. Отметим еще, что вопрос о нелинейных уравнениях рассматриваемого здесь типа и приводящихся к линейным в общем случае изучен в работах [7,8].

В настоящей работе дается доказательство утверждения работы [1] на примере адиабатического движения. Далее излагается обобщение метода аппроксимаций, применяемого для исследования потенциальных течений, на вихревое сверхзвуковое движение. Для него строится приближенное общее решение, аналогичное решению С. А. Христиановича [9], но содержащее уже не две, а три произвольные функции. Дается решение основных краевых задач без скачков уплотнения и некоторых задач о течениях со скачками уплотнения.

§ 1. Постановка задачи. Возьмем уравнения плоского вихревого движения газа, выведенные Л. И. Седовым [2], в форме Ю. В. Руднева [3]:

$$v\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + 2\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{\partial v}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2 - \frac{\partial^3 v}{\partial p^2\partial\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 = 0 \qquad (1.1)$$

$$dz = d(x+iy) = -\rho_0 e^{i\theta}\left[\left(v\frac{\partial\psi}{\partial p} + i\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)d\theta + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + i\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)dp\right] \qquad (1.2)$$

Здесь θ — угол наклона вектора скорости к оси x, ρ_0 — некоторая постоянная с размерностью плотности; скорость v определяется интегралом Бернулли

$$\frac{v^2}{2} + \frac{k}{k-1}p^{\frac{k-1}{k}}\vartheta(\psi) = i_0 \qquad (1.3)$$

где теплосодержание торможения $i_0 = \mathrm{const}$.

Введем функцию $\overline{\psi} = \psi/a_*$ и безразмерные величины

$$\overline{v} = \frac{v}{a_*}, \qquad \overline{\rho} = \frac{\rho}{\rho_0}, \qquad \overline{p} = \frac{p}{\rho_0 a_*^2}, \qquad \overline{\vartheta(\psi)} = (\rho_0 a_*^2)^{\frac{k-1}{k}}\frac{\vartheta(\psi)}{i_0} \qquad (1.4)$$

где a_* — критическая скорость звука. В дальнейшем черточки для простоты опускаются. Тогда при подстановке введенных таким образом величин в (1.1) и (1.2) последние сохраняют свой вид, только ρ_0 в (1.2) исчезает. Формула (1.3) и уравнение адиабаты запишутся в виде

$$v(p,\psi)=\left[\frac{k+1}{k-1}\left(1-\frac{k}{k-1}p^{\frac{k-1}{k}}\vartheta(\psi)\right)\right]^{\frac{1}{2}},\qquad \vartheta(\psi)=2\frac{k-1}{k+1}p^{\frac{1}{k}}/\rho \tag{1.5}$$

Предполагается, как и в работе [4], что функция $\vartheta(\psi)$ может быть представлена в виде

$$\vartheta(\psi)=\vartheta_0(1+\vartheta_1(\psi)) \tag{1.6}$$

где ϑ_0 — главная постоянная ее часть, а $\vartheta_1(\psi)$ — малая переменная величина, квадратом которой можно пренебречь по сравнению с единицей. Если принять ρ_0 равным плотности в точке торможения на линии тока $\psi=\psi_0$, где $\vartheta_1(\psi_0)=0$, то величина ϑ_0 определится из (1.5) по условиям в этой точке: $\rho=1$, $p=(k+1)/2k$. Для воздуха $k=1.4$ и $\vartheta_0=0.2986$.

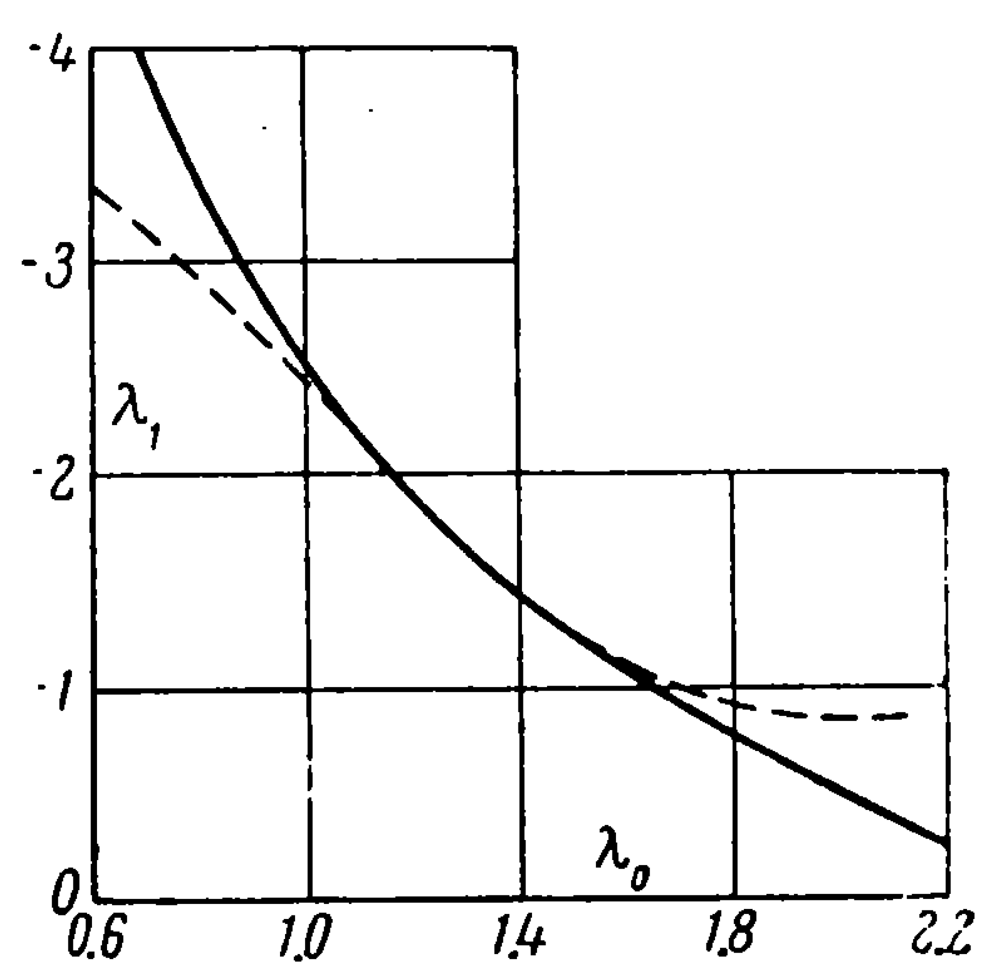
Разложим функцию $v(p,\psi)$ (1.5) в ряд по степеням малого параметра $\vartheta_1(\psi)$ и ограничимся лишь двумя членами. Тогда

$$v(p,\psi)=\lambda_0(p)+\lambda_1(p)\vartheta_1(\psi) \tag{1.7}$$

где

$$\lambda_0(p)=\left[\frac{k+1}{k-1}\left(1-\frac{k}{k-1}p^{\frac{k-1}{k}}\vartheta_0\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\lambda_1(p)=\frac{\lambda_0(p)}{2}\left[1-\frac{k+1}{k-1}\frac{1}{\lambda_0^2(p)}\right] \tag{1.8}$$



Фиг. 1

Предположим далее, что величина $(1/v)(\partial^2 v/\partial p^2)$ не зависит от ψ. Для этого должно быть ([2], стр. 318)

$$\frac{\lambda_0''(p)}{\lambda_0(p)}=\frac{\lambda_1''(p)}{\lambda_1(p)}=\frac{1}{v}\frac{\partial^2 v}{\partial p^2} \tag{1.9}$$

Здесь штрихи означают операцию дифференцирования. Из (1.9) следует

$$\lambda_1(p)=\lambda_0(p)\left[m_1+m\int\frac{dp}{[\lambda_0(p)]^2}\right] \tag{1.10}$$

где m и m_1 — постоянные интегрирования, а интеграл при $k=1.4$ есть

$$\int\frac{dp}{[\lambda_0(p)]^2}=-\left(\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}+t+\frac{1}{2}\ln\frac{1-t}{1+t}\right),\qquad t=1\left(-\frac{k-1}{k+1}\lambda_0^2(p)\right)^{\frac{1}{2}}$$

Распоряжаясь выбором постоянных m и m_1, заменим теперь функцию $\lambda_1(p)$ (1.8) приближенно функцией (1.10) с точностью до пересечения в двух точках или касания в какой-либо точке, что при $0.7<\lambda_0<2.2$ дает хорошую аппроксимацию на больших диапазонах λ_0. Для $\lambda_0=1.309$, если $m=-6.241$ и $m_1=-0.3868$, получаем при этом касание второго порядка. В этом случае на фиг. 1 сплошной линией показана точная зависимость $\lambda_1(\lambda_0)$ (1.8) и пунктирной — приближенная по формуле (1.10).

§ 2. Сведение уравнения вихревого движения к уравнению потенциального потока. Введем новую функцию ψ^* формулой

$$\lambda_0(p)\psi^* = \int_0^{\psi} v(p, \psi)d\psi \tag{2.1}$$

Дифференцируя это равенство по p и θ, получим

$$\lambda_0 \frac{\partial\psi^*}{\partial p} + \lambda_0'\psi^* = v\frac{\partial\psi}{\partial p} + \int_0^{\psi} \frac{\partial v}{\partial p} d\psi \tag{2.2}$$

$$\lambda_0 \frac{\partial\psi^*}{\partial\theta} = v\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{2.3}$$

$$\lambda_0 \frac{\partial^2\psi^*}{\partial p^2} + 2\lambda_0'\frac{\partial\psi^*}{\partial p} = v\frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} + 2\frac{\partial v}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{\partial v}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)^2 \tag{2.4}$$

$$\lambda_0 \frac{\partial^2\psi^*}{\partial\theta^2} = v\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial v}{\partial\psi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2 \tag{2.5}$$

Вычитая из (2.4) равенство (2.5), умноженное почленно на крайние отношения (1.9), получим выражение, в правой части которого будет стоять оператор (1.1). Тогда левая часть даст нам линейное уравнение для функции ψ^*

$$\lambda_0(p)\frac{\partial^2\psi^*}{\partial p^2} - \lambda_0''(p)\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\theta^2} + 2\lambda_0'(p)\frac{\partial\psi^*}{\partial p} = 0 \tag{2.6}$$

которое заменяет квазилинейное уравнение (1.1). Очевидно, что (2.6) совпадает с уравнением потенциального течения, для которого $\lambda_0(p)$ — скорость и ψ^* — функция тока.

Для преобразования формулы (1.2) введем функцию

$$U(\psi) = \int_0^{\psi}\left(\lambda_0\frac{\partial v}{\partial p} - \lambda_0'v\right)d\psi = m\int_0^{\psi}\vartheta_1(\psi)\,d\psi = m\chi(\psi) \tag{2.7}$$

Из (2.2) и (2.7) следует

$$\lambda_0\frac{\partial\psi^*}{\partial p} - \frac{1}{\lambda_0}U(\psi) = v\frac{\partial\psi}{\partial p} \tag{2.8}$$

В (1.2) подставляем производные от v по p из (2.7) и (1.9), а затем при помощи (2.8) и (2.3) исключаем произведения $v(\partial\psi/\partial p)$ и $v(\partial\psi/\partial\theta)$.

Тогда (1.2) приведется к выражению

$$dz = dz^* + dz_1 \tag{2.9}$$

где dz^* — формула для потенциального движения:

$$dz^* = -e^{i\theta}\left[\left(\lambda_0\frac{\partial\psi^*}{\partial p} + i\lambda_0'\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta}\right)d\theta + \left(\lambda_0''\frac{\partial\psi^*}{\partial\theta} + i\lambda_0'\frac{\partial\psi^*}{\partial p}\right)dp\right] \tag{2.10}$$

а

$$z_1 = -ie^{i\theta}\lambda_0^{-1}(p)\,m\chi(\psi) \tag{2.11}$$

Таким образом, интегрирование уравнений вихревого движения сведено к аналогичной задаче для потенциального течения.

Согласно свойствам неявных функций связь между функциями тока ψ и ψ^* (2.1) будет взаимно однозначной. Кроме того, вдоль линий $p=\mathrm{const}$ происходит одновременно либо возрастание, либо убывание этих функций, ибо из (2.1) $\partial\psi^*/\partial\psi > 0$. Из (2.1) и (2.9) следует, что линии тока вихревого движения, на которых $\chi(\psi)=0$ $(z_1=0)$, совпадают с соответствующими линиями тока потенциального течения. В частности, совпадают линии $\psi=0$ и $\psi^*=0$.

Итак, каждому вихревому движению газа может быть поставлено в соответствие единственное потенциальное течение и наоборот. Отсюда решение краевой задачи без скачков уплотнения для вихревого движения можно заменить решением в той же области p, θ потенциальной задачи с граничными условиями, определяемыми через заданные условия для ψ из (2.1). Найдя решение для потенциального течения, обратным переходом по (2.1) получаем решение вихревой задачи. Очевидно, теоремы существования и единственности решения, когда они доказаны для потенциальных течений, переносятся и на рассматриваемые вихревые.

§ 3. Приближенное интегрирование уравнений вихревого сверхзвукового движения газа. Рассматривая только сверхзвуковое движение, перейдем в уравнении (2.6) к характеристическим переменным

$$2\xi=\sigma-\theta, \quad 2\eta=\sigma+\theta, \qquad \sigma=-\int_{p_*}^{p}\mu(p)\,dp, \qquad \mu=\sqrt{\frac{\lambda_0''(p)}{\lambda_0(p)}} \tag{3.1}$$

где критическое давление p_*, очевидно, одинаково для вихревого (при любом ψ) и потенциального течений, так как оно определяется из условия равенства нулю отношений (1.9) ([2], стр. 305).

Уравнение (2.6) принимает известный вид [9]:

$$\frac{\partial^2\psi^*}{\partial\xi\,\partial\eta}+\frac{1}{2}\frac{d\ln\sqrt{K_1}}{d\sigma}\left(\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}\right)=0 \qquad \left(\sqrt{K_1}=\sqrt{-K}=\lambda_0^2\mu\right) \tag{3.2}$$

Здесь K — функция Чаплыгина. Эта формула вместе с (3.1) связывает между собой $\sqrt{K_1}$, λ_0, μ, p как функции σ. Для адиабатического движения согласно (1.8), учитывая значение величины ϑ_0, имеем известные формулы

$$\sigma=\int_1^{\lambda_0}\sqrt{\frac{\lambda_0^2-1}{1-\lambda_0^2/\nu}}\,\frac{d\lambda_0}{\lambda_0}, \qquad \sqrt{K_1}=\sqrt{\frac{\lambda_0^2-1}{(1-\lambda_0^2/\nu)^\nu}} \qquad \left(\nu=\frac{k+1}{k-1}\right) \tag{3.3}$$

С. А. Христиановичем [9] была предложена аппроксимация (3.4)

$$\sqrt{K_1}=a_0^2(\sigma+c_0)^2, \quad \lambda_0=\frac{a_0(\sigma+c_0)}{N\sin(\sigma+\varepsilon)}, \quad \mu=\frac{\sqrt{K_1}}{\lambda_0^2}, \quad p=\frac{1}{N^2}(\operatorname{ctg}(\sigma+\varepsilon)+n)$$

которая при постоянных $a_0^2=18.5$, $c_0=0.185$, $N=2.398$, $\varepsilon=0.3347$, $n=-0.3161$ дает хорошее приближение в окрестности точки $\sigma=0.197\approx 0.2$. Общее решение в этом случае имеет вид:

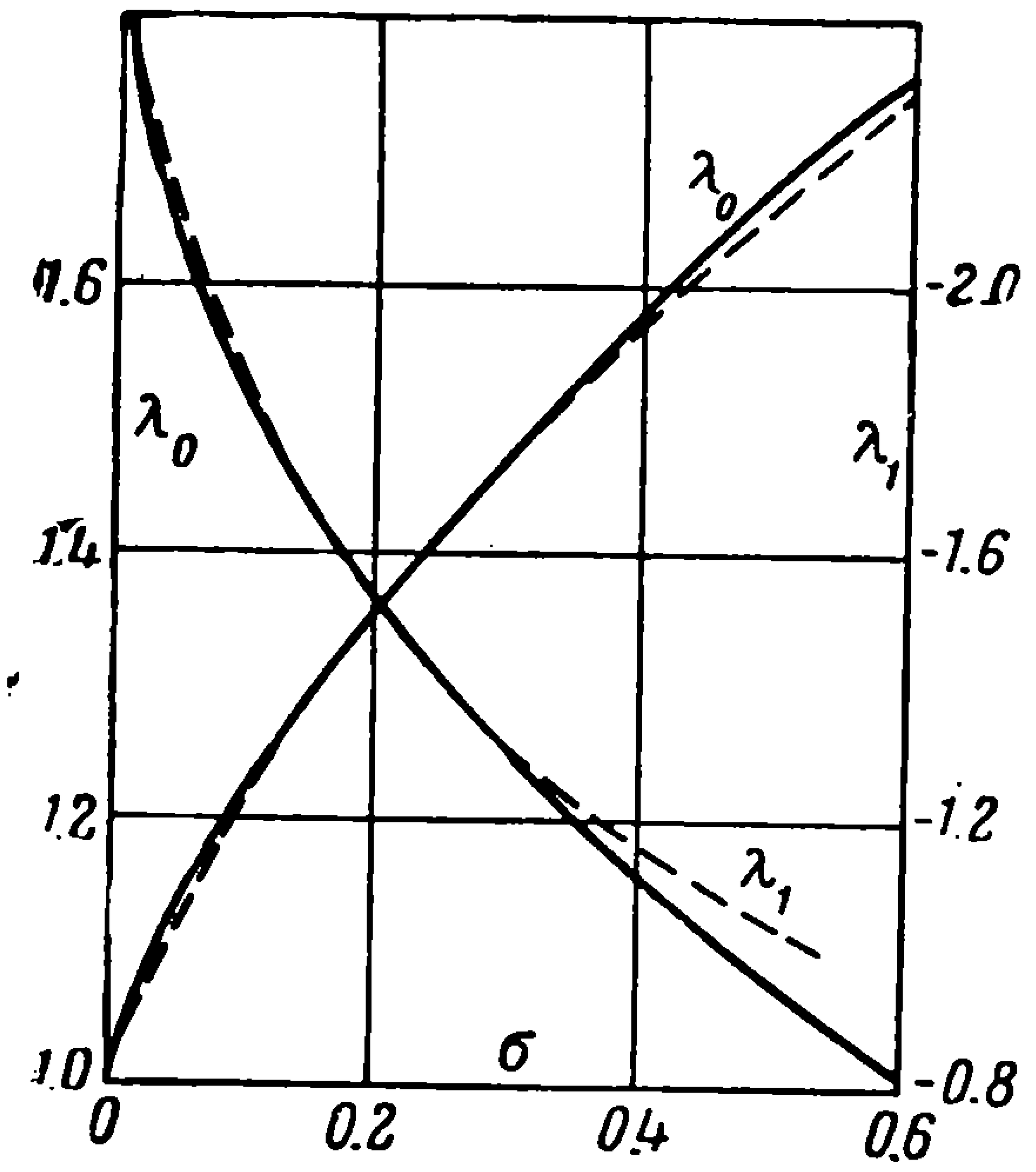
$$(\xi+\eta+c_0)\psi^*=\Phi_1(\xi)+\Phi_2(\eta) \tag{3.5}$$

где $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\eta)$ — произвольные функции.

Рассмотрим теперь вихревое движение, соответствующее данному потенциальному. Из (1.10), (3.1) и (3.4) получим

$$\lambda_1=\lambda_0(\sigma)\left[m_1-m\int\frac{d\sigma}{\sqrt{K_1}}\right]=\frac{a_1(\sigma+c_1)}{N\sin(\sigma+\varepsilon)} \qquad \left(a_1=a_0m_1,\ c_1=c_0+\frac{m}{a_0^2m_1}\right) \tag{3.6}$$

Полагая $a_1 = 0.03868$, $c_1 = -48.74$, аппроксимируем функцию λ_1 (1.8) функцией (3.6) с точностью до касания в той же точке $\sigma = 0.197$. На фиг. 2 дано сравнение точных зависимостей λ_0 и λ_1 от σ (сплошные линии) с приближенными по формулам (3.4) и (3.6).



Фиг. 2

Из (2.1), (3.4)—(3.6) получаем приближенное общее решение уравнения вихревого движения

$$(\xi + \eta + c_0)\psi + a(\xi + \eta + c_1)\chi(\psi) = \\ = \Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta) \qquad (3.7)$$

где $a = a_1/a_0$, а $\chi(\psi)$ определена в (2.7). Из (2.7) ясно, что при всяком конечном $\psi\,\chi'(\psi)$ мала вместе с $\vartheta_1(\psi)$. Тогда, если заменить аргумент малой функции $\chi(\psi)$ близкой величиной ψ^* (3.5), то из (3.7) получим в случае необходимости явное выражение $\psi = \psi(\xi, \eta)$.

Формула перехода к физической плоскости нами получена в виде (2.9). Представим dz^* (2.10) в характеристических координатах:

$$dz^* = \mu e^{i\theta}\left[\left(-\lambda_0 + i\frac{d\lambda_0}{d\sigma}\right)\frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}d\xi + \left(\lambda_0 + i\frac{d\lambda_0}{d\sigma}\right)\frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}d\eta\right] \qquad (3.8)$$

Подставляя сюда приближенные выражения μ, λ_0 и частных производных функции ψ^* из (3.5) и вычисляя квадратуры, получим

$$z^* = ia_0\left\{a_0 e^{i(\eta-\xi)}\lambda_0^{-1}(\xi+\eta)[\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta)] - \right. \\ \left. - N\left[\int e^{-i(2\xi+\varepsilon)}\Phi_1'(\xi)\,d\xi + \int e^{i(2\eta+\varepsilon)}\Phi_2'(\eta)\,d\eta\right]\right\} \qquad (3.9)$$

Далее

$$z_1 = -ie^{i(\eta-\xi)}\lambda_0^{-1}(\xi+\eta)\,m\chi(\psi), \qquad m = a_0 a_1(c_1 - c_0) \qquad (3.10)$$

и

$$z = z^* + z_1 \qquad (3.11)$$

Таким образом, нами получены приближенное общее решение для вихревого сверхзвукового течения в плоскости ξ, η, зависящее от трех произвольных функций $\Phi_1(\xi)$, $\Phi_2(\eta)$ и $\chi(\psi)$, и формула перехода к физической плоскости. Совершенно аналогично можно найти и приближенные общие решения, соответствующие другим аппроксимациям функции Чаплыгина как в дозвуковом, так и в сверхзвуковом случаях.

§ 4. Краевые задачи для течений без скачков уплотнения. Для таких течений, как известно, можно ставить четыре основные краевые задачи: Коши, Гурса, о течении со свободной поверхностью и об обтекании твердой стенки. Функция $\chi(\psi)$, характеризующая распределение вихрей, должна быть при этом задана. При наличии простого по форме общего решения (3.7) все эти задачи можно решать, и не вводя потенциального течения, как рекомендовано в § 2, а непосредственно. Трудности будут одни и те же, ибо функции $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\eta)$ одинаковы для обоих течений.

В качестве примера рассмотрим обтекание твердой стенки, заданной уравнениями $x = X(\theta)$ и $y = Y(\theta)$, если на пересекающей ее характеристике $\xi = \xi_0 = \text{const}$ заданы $\psi = \psi_2(\eta)$ и $\chi(\psi)$.

Принимаем, как обычно, стенку за линию $\psi = 0$. Тогда на ней $\chi(\psi) = 0$ и

$$\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\omega) = 0 \tag{4.1}$$

где $\eta = \omega(\xi)$ — уравнение твердой стенки в плоскости ξ, η. Из (3.7) по условию на характеристике $\xi = \xi_0$ получим

$$\Phi_2(\eta) = (\xi_0 + \eta + c_0)\psi_2(\eta) + a(\xi_0 + \eta + c_1)\chi[\psi_2(\eta)] - \Phi_1(\xi_0) \tag{4.2}$$

Функция $\Phi_1(\xi)$ определяется из (4.1), если известно $\omega(\xi)$. Дифференциальное уравнение для нахождения $\omega(\xi)$ легко получается из (3.9), так как $\chi(\psi) = 0$, при условии (4.1) дифференцированием полным образом по ξ и разделением действительной и мнимой частей. В симметричном виде это есть

$$\begin{gathered}[X'(\omega - \xi)\cos(\omega - \xi) + Y'(\omega - \xi)\sin(\omega - \xi)][\omega'(\xi) - 1] - \\ - 2Na_0 \sin(\xi + \omega + \varepsilon)\Phi_2'(\omega)\omega'(\xi) = 0\end{gathered} \tag{4.3}$$

Также просто решаются и все остальные задачи.

§ 5. Условия на скачках уплотнения. Для решения задач о течениях со скачками уплотнения рассмотрим условия, которые должны быть на них выполнены. Это прежде всего условия динамической совместности, имеющие для установившегося движения вид:

$$-\rho_1 v_{1n}[v_n] = [p], \qquad [v_\tau] = 0, \qquad [\rho v_n] = 0, \qquad [i_0] = 0 \tag{5.1}$$

где символ [ ] означает разрыв, индекс 1 относится к параметрам до скачка, v_τ и v_n — проекции скорости на касательную к ударной волне и нормаль к ней, проведенную в сторону движения газа. Если β — угол наклона ударной волны к оси x, то $v_\tau = v\cos(\beta - \theta)$, $v_n = v\sin(\beta - \theta)$.

Приведем условия (5.1) к безразмерной форме. В качестве ρ_0 берем плотность торможения на некоторой линии тока $\psi = \psi_0$ за фронтом волны и считаем, что i_0 и a_* одинаковы для потоков до и после скачка уплотнения. Тем самым четвертое условие будет выполнено, а три первых сохранят свой вид.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением течений при равномерном набегающем потоке в направлении оси x, т. е. $\theta_1 = 0$. Обозначая $\operatorname{tg}\beta = \Gamma$, из (5.1) после несложных преобразований найдем

$$\frac{\rho_1 v_1^2 \Gamma \sin\theta}{\Gamma\sin\theta + \cos\theta} = [p], \quad v_1 = v(\Gamma\sin\theta + \cos\theta), \quad \rho_1 v_1 \Gamma = \rho v(\Gamma\cos\theta - \sin\theta) \tag{5.2}$$

Мы рассматриваем здесь только такие ударные волны, при переходе через которые поток остается сверхзвуковым, а функция $\vartheta(\psi)$ в интересующей нас области изменяется мало. Тогда, представляя скорость $v(p, \psi)$ в виде (1.7), из первого и второго условий (5.2) получим

$$\frac{1}{\Gamma} = \left(\frac{\rho_1 v_1^2}{[p]} - 1\right)\operatorname{tg}\theta \tag{5.3}$$

$$\chi'(\psi) = \frac{1}{\lambda_1}\left\{\frac{v_1}{\cos\theta}\left(1 - \frac{[p]}{\rho_1 v_1^2}\right) - \lambda_0\right\} \tag{5.4}$$

В формулах (5.2) — (5.4) будем рассматривать λ_0, λ_1, p функциями σ (3.1). Тогда в третьем условии (5.2) $1/\rho = \mu v\,(\partial v/\partial\sigma)$ согласно интегралу Бернулли, и исключая оттуда Γ и $\chi'(\psi)$, получим квадратное уравнение относительно $\cos\theta$, которое дает

$$\cos\theta = \frac{m\,[p]}{2v_1\lambda_1} + \left[\left(\frac{m\,[p]}{2v_1\lambda_1}\right)^2 + \left(1 - \frac{[p]}{\rho_1 v_1^2}\right)\left(\frac{\mu\,[p]}{\lambda_1}\,\frac{d\lambda_1}{d\sigma} + 1\right)\right]^{1/2} = H(\sigma) \qquad (5.5)$$

где λ_1 выражается формулой (1.10).

Перед корнем оставлен только знак плюс, что соответствует сверхзвуковому течению за ударной волной; при $[p] = 0$, $\cos\theta = 1$, $\theta = \theta_1 = 0$. Соотношение (5.5) представляет собой связь между σ и θ на скачке уплотнения. Очевидно, тогда $\Gamma = \Gamma(\sigma)$ и $\chi'(\psi) = f(\sigma)$.

Из (3.1) и (5.5) имеем

$$2\xi = \sigma - \arccos H(\sigma), \qquad 2\eta = \sigma + \arccos H(\sigma) \qquad (5.6)$$

что можно рассматривать как параметрические уравнения ударной волны в характеристической плоскости, исключение σ из которых дает $\eta = g(\xi)$ или $\xi = h(\eta)$. Все функции на ударной волне можно выразить через один из параметров σ, ξ или η.

Из формулы (1.2) при условии (1.9) после перехода к характеристическим переменным получим

$$\begin{aligned} dx &= \mu\left[-\left(v\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial\sigma}\sin\theta\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,d\xi + \left(v\cos\theta - \frac{\partial v}{\partial\sigma}\sin\theta\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\,d\eta\right] \\ dy &= \mu\left[\left(-v\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial\sigma}\cos\theta\right)\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,d\xi + \left(v\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial\sigma}\cos\theta\right)\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\,d\eta\right] \end{aligned} \qquad (5.7)$$

Будем считать здесь ξ и η связанными соотношениями (5.6). Тогда (5.7) суть параметрические уравнения ударной волны в физической плоскости. Так как на волне $dy/dx = \Gamma$, то из (5.7) и (5.2) нетрудно получить равенство

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,d\xi - \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\,d\eta\right) + P(\xi,\eta)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\,d\eta\right) = 0 \qquad \left(P(\xi,\eta) = \frac{v_1\sin\theta}{v\mu\,[p]}\right) \qquad (5.8)$$

К нему добавим еще очевидное равенство

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\,d\xi + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\,d\eta = d\psi \qquad (5.9)$$

На ударной волне $\psi = \psi^\circ(\sigma) = \psi_1^\circ(\xi) = \psi_2^\circ(\eta)$, $\chi'(\psi) = f(\sigma) = f_1(\xi)$.

При решении краевых задач при помощи общего решения (3.7) входящие в (5.3) — (5.8) функции естественно брать в приближенном виде по (3.4) и (3.6). Это дает удовлетворительные результаты до тех пор, пока $[p] = p(\sigma) - p_1$ не становится настолько малым, что приближенное выражение разности дает значительную ошибку (около 10%), хотя ошибка в определении самого $p(\sigma)$ может быть небольшой. В случае необходимости это затруднение можно обойти, строя аппроксимацию в точке σ, соответствующей $p = p_1$.

§ 6. Краевые задачи для течений со скачками уплотнения. В этих задачах функция $\chi(\psi)$ в приближенном общем решении (3.7) заранее не известна и должна определяться вместе с $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\eta)$ из краевых условий и условий на ударной волне.

Рассмотрим две задачи об определении движения газа в области, ограниченной ударной волной и двумя пересекающимися характеристиками противоположных семейств. Для простоты полагаем, что на линии тока, проходящей через точку O пересечения ударной волны с одной из характеристик, $\psi = \psi_0 = 0$. Параметры равномерного потока перед волной известны.

Задача 1. Пусть форма ударной волны задана уравнениями $x = x_\beta(\Gamma)$ и $y = y_\beta(\Gamma)$.

Для решения задачи нужно знать значения безразмерных параметров p_1 и ρ_1, которые зависят от величины плотности торможения ρ_0 за скачком на линии тока $\psi_0 = 0$. Ее находим из условия $[i_0] = 0$, т. е. $\rho_0/\rho_{01} = p_0/p_{01}$, так как при известном β_0 в точке O правая часть равенства может быть подсчитана точно (см. [2], стр. 349). В частности, если в точке O ударная волна касается характеристики, то $\rho_0 = \rho_{01}$. Значения σ_0 и θ_0 в точке O найдем из (5.3) и (5.5) при $\Gamma = \Gamma_0$.

Так как $\Gamma = \Gamma(\sigma)$, то уравнения ударной волны можно записать как $x = x^\circ(\sigma)$ и $y = y^\circ(\sigma)$. Кроме того, на ней имеем, очевидно, $\psi = \rho_1 v_1 (y^\circ - y_0)$, где y_0 — координата точки O. Присоединяя сюда (5.4) и интегрируя его, получим

$$\psi = \psi^\circ(\sigma) = \rho_1 v_1 (y^\circ - y_0); \qquad \chi = \int_{\sigma_0}^{\sigma} f(\sigma)\, \psi^{\circ\prime}(\sigma)\, d\sigma \tag{6.1}$$

Эти равенства дают параметрическое представление функции $\chi(\psi)$ вдоль ударной волны. Этого достаточно, чтобы найти решение в части области, занимаемой линиями тока, пересекающими волну, как, например, в задаче об определении формы профиля. Для нахождения решения в другой части области там должна быть задана функция $\chi(\psi)$.

Из (5.8) и (5.9) имеем

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(1 - P(\xi, \eta))\, \psi_1^{c\prime}(\xi), \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{1}{2}(1 + P(\xi, \eta))\, \psi_2^{c\prime}(\eta) \tag{6.2}$$

Таким образом, ψ со своими частными производными и $\chi(\psi)$ найдены на ударной волне и задача сведена к задаче Коши.

Из общего решения (3.7) следует

$$\begin{aligned} \Phi_1'(\xi) &= \psi + a\chi(\psi) + [(\xi + \eta + c_0) + a(\xi + \eta + c_1)\,\chi'(\psi)]\, \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \\ \Phi_2'(\eta) &= \psi + a\chi(\psi) + [(\xi + \eta + c_0) + a(\xi + \eta + c_1)\,\chi'(\psi)]\, \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{6.3}$$

Выражая правую часть в первой формуле через ξ, а во второй через η и вычисляя квадратуры, найдем функции $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\eta)$. Постоянные интегрирования находятся, как обычно, из условий в точке O.

Задача 2. Пусть форма ударной волны неизвестна, но заданы параметры течения на одной из характеристик, например $\eta = \eta_0$, не пересекаемой линиями тока, проходящими через отрезок волны, т. е. заданы $\psi = \psi_1(\xi)$ и $\chi(\psi)$.

Из общего решения (3.7) при $\eta = \eta_0$ найдем

$$\Phi_1(\xi) = (\xi + \eta_0 + c_0)\,\psi_1(\xi) + a(\xi + \eta_0 + c_1)\,\chi(\psi_1) - \Phi_2(\eta_0) \tag{6.4}$$

Исключая из (5.8) и (5.9) $\partial\psi/\partial\eta$ и заменяя $\partial\psi/\partial\xi$ согласно (6.3), получим уравнение

$$Q(\xi)\frac{d\psi_1^\circ}{d\xi} + \psi_1^\circ + a\chi(\psi) - \Phi_1'(\xi) = 0 \tag{6.5}$$

где

$$Q(\xi) = \frac{\xi + g(\xi) + c_0}{2}\frac{r}{\lambda_0}[1 - P(\xi, g(\xi))]$$

Добавляя сюда (5.4) в виде

$$\frac{d\chi}{d\xi} = f_1(\xi)\frac{d\psi_1^\circ}{d\xi} \tag{6.6}$$

получим систему линейных обыкновенных уравнений для определения $\psi_1^\circ(\xi)$ и χ. Ее решение есть

$$\psi = \psi_1^\circ(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi}\frac{R(\xi)}{Q(\xi)}d\xi, \qquad \chi = \int_{\xi_0}^{\xi}\frac{f_1(\xi)R(\xi)}{Q(\xi)}d\xi \tag{6.7}$$

где ξ_0 — значение ξ в точке O, а

$$R(\xi) = \Phi_1'(\xi_0)\exp\left(-\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{af_1+1}{Q}d\xi\right) -$$
$$-\exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{af_1+1}{Q}d\xi\right)\int_{\xi_0}^{\xi}\Phi_1''(\xi)\exp\left(\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{af_1+1}{Q}d\xi\right)d\xi$$

Функция $\chi(\psi)$, следовательно, определена параметрически. Тогда из (3.7), взятого на ударной волне, найдем

$$\Phi_2(\eta) = (h(\eta) + \eta + c_0)\psi_2^\circ(\eta) + a(h(\eta) + \eta + c_1)\chi(\psi_2^\circ) - \Phi_1[h(\eta)] \tag{6.8}$$

При подстановке $\Phi_1(\xi)$ и $\Phi_2(\eta)$ в общее решение постоянная $\Phi_2(\eta_0)$ уничтожается. Таким образом, решения обеих рассмотренных задач сводятся к вычислению квадратур.

Зная решения вихревых задач без скачков уплотнения и только что рассмотренных задач со скачками, можно исследовать наиболее важные сверхзвуковые течения газа с мало изменяющейся энтропийной функцией, включая обтекание профилей и т. п.

Поступила 6 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Завьялов Ю. С. Об одном классе плоско-параллельных установившихся вихревых движений газа. ДАН СССР, 1957, т. 116, № 3.
2. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. гл. VIII, ГИТТЛ, 1950.
3. Руднев Ю. В. О некоторых плоско-параллельных установившихся движениях газа. Сб. статей «Теоретическая гидромеханика» под ред. Л. И. Седова, № 4, Оборонгиз, 1949.
4. Калишевич И. З. Приближенное интегрирование уравнения плоского вихревого сверхзвукового движения газа. ДАН СССР, 1954, т. 99, № 1.
5. Калишевич И. З. Решение краевых задач для сверхзвуковых движений газа без скачков уплотнения ДАН СССР, 1955, т. 102, № 6.
6. Тарасова Н. З. Решение краевых задач со скачками уплотнения для плоского вихревого движения сверхзвукового потока газа. Уч. зап. Ленинград. ун-та, 1957, № 217, сер. математ. вып. 31.
7. Валландер С. В. Нелинейные уравнения в частных производных второго порядка с двумя независимыми переменными, сводящиеся к линейным. Вест. Ленинград. ун-та, 1954, № 5.
8. Овсянников Л. В. О линеаризации уравнения с частными производными второго порядка. ДАН СССР, 1955, т. 102. № 2.
9. Христианович С. А. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвукового движения газа. ПММ, 1947, т. XI, вып. 2.