Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

УДАРНАЯ ВОЛНА ОТ СЛАБО ИСКРИВЛЕННОГО ПОРШНЯ

Р. М. Зайдель

(Москва)

Предложен способ решения ранее рассмотренной задачи в [1]. Этот способ не требует построения «конических решений» и позволяет решать другие задачи, которые приводят к гиперболической системе уравнений с краевыми условиями на подвижных границах.

§ 1. Постановка задачи. Пусть в невозмущенной среде газа плоскость YZ совпадает с поверхностью поршня; поршень в момент $t=0$ начал двигаться вдоль оси X с постоянной скоростью U; по газу пойдет ударная волна со скоростью D. В начальном состоянии плотность газа ρ_0, скорость звука c_0, за фронтом волны соответственно ρ, c. Газ считаем идеальным с показателем изэнтропы γ. Скорость волны относительно поршня обозначим через V, так что $D=U+V$. Введем параметр $\delta = 1/M_0^2$, где $M_0 = D/c_0$. Тогда, как известно,

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{h}{1+(h-1)\delta}, \qquad V = \frac{D}{\sigma}, \qquad \beta^2 = \frac{V^2}{c^2} = \frac{1+(h-1)\delta}{(h+1)-\delta}, \qquad h = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

Имея решение невозмущенной задачи, рассмотрим в линейном приближении распространение ударной волны от слабо искривленного поршня. Не уменьшая общности, будем считать, что поверхность поршня искривлена в одном направлении и имеет форму $\varepsilon(Y)$. Пользуемся системой координат, в которой поршень покоится. В области $0<X<Vt$ имеем следующие линеаризованные уравнения для возмущений давления p' и компонент скорости v_x' и v_y':

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \rho c^2\left(\frac{\partial v_x'}{\partial X} + \frac{\partial v_y'}{\partial Y}\right) = 0, \qquad \frac{\partial v_x'}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial X} = 0, \qquad \frac{\partial v_y'}{\partial t} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial Y} = 0 \qquad (1.1)$$

Возмущения плотности ρ' исключены при помощи условия адиабатичности

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t}$$

Краевым условием на стенке (в линейном приближении при $X=0$) будет обращение в нуль нормальной компоненты скорости: $v_x'=0$. Согласно второму из уравнений (1.1) при этом также $\partial p'/\partial X = 0$. Условия на фронте ударной волны заимствуем из работы [2]. Отметим, что для идеального газа величина

$$-j^2\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]_H = \delta < 1$$

В принятых обозначениях имеем

$$v_y' = -U\frac{\partial \xi}{\partial Y}, \quad v_x' = \frac{1+\delta}{2\rho_0 D}p', \quad \frac{\partial \xi}{\partial_t} = \frac{1-\delta}{2\rho_0 U}p' \quad \text{при } X = Vt \tag{1.2}$$

Через $\xi(Y, t)$ обозначено смещение фронта ударной волны от плоскости $X = Vt$. Для того чтобы исключить из краевых условий $\xi(Y, t)$, продифференцируем по времени первое из равенств (1.2)

$$\frac{dv_y'}{dt} = \frac{\partial v_y'}{\partial t} + V\frac{\partial v_y'}{\partial_X} = -U\frac{\partial^2 \xi}{\partial_Y \partial t}$$

При помощи (1.1) и (1.2) получаем

$$V\frac{\partial v_y'}{\partial X} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1-\delta}{2\rho_0}\right)\frac{\partial p'}{\partial Y} \qquad \text{при } X = Vt$$

Начальные условия вытекают из того, что фронт ударной волны при $t = 0$ совпадает с поверхностью поршня, на которой всегда $v_x' = 0$. Согласно (1.2) при $t = 0$ будет $p' = 0$. Касательная компонента скорости v_y' в начальный момент отлична от нуля и равна $v_y'(0) = -U d\varepsilon / dY$.

Пусть $\varepsilon(Y) = \Delta \exp(ikY)$, где Δ и k — постоянные, причем $k\Delta \ll 1$ (малое возмущение). Тогда зависимость всех величин от координаты Y определяется множителем $\exp(ikY)$. Вводим обозначения

$$p' / \rho c = w, \qquad v_x' = u, \qquad v_y' = -iv$$

Произведем также замену

$$kX = x, \qquad kct = y$$

Тогда задача сводится к решению системы

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + v = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} - w = 0 \tag{1.3}$$

с краевыми условиями

$$u = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial_x} = 0 \ \text{при } x = 0; \qquad u = Aw, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = Bw \ \text{при } x = \beta y \ (\beta < 1) \tag{1.4}$$

где

$$A = \frac{1+\delta}{2\beta}, \qquad B = \frac{1}{\beta}\left[\frac{1-\delta}{2}\frac{\rho}{\rho_0} - 1\right]$$

и начальным условием

$$u = w = 0, \qquad v = v_0 \quad \text{при } x = y = 0 \qquad (v_0 = Uk\Delta) \tag{1.5}$$

Отметим, что функция $w(x, y)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w = 0 \tag{1.6}$$

§ 2. **Решение краевой задачи**. Вводим новые переменные r и θ по формулам

$$y = r\,\mathrm{ch}\,\theta, \qquad x = r\,\mathrm{sh}\,\theta, \qquad r = \sqrt{y^2 - x^2}, \qquad \mathrm{th}\,\theta = \frac{x}{y} \tag{2.1}$$

Первое из уравнений (1.3) умножим на $\mathrm{ch}\,\theta$ и сложим со вторым, умноженным на $\mathrm{sh}\,\theta$; затем $\mathrm{ch}\,\theta$ и $\mathrm{sh}\,\theta$ поменяем местами. В результате получим систему

$$\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + v\,\mathrm{ch}\,\theta = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + v\,\mathrm{sh}\,\theta = 0$$

$$\mathrm{ch}\,\theta\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{\mathrm{sh}\,\theta}{r} - w = 0 \tag{2.2}$$

Уравнение (1.6) преобразуется к виду

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+w=0 \tag{2.3}$$

Линии $x=0$ соответствует $\theta=0$, линии $x=\beta y$ соответствует $\theta=\theta_0$, где $\operatorname{th}\theta_0=\beta$. В третьем уравнении системы (2.2) положим $\theta=\theta_0$ и прибавим к нему умноженное на $\operatorname{th}\theta_0$ соотношение $\partial v/\partial x=Bw$, также верное при $\theta=\theta_0$. Началу координат $x=y=0$ соответствует $r=0$. В результате краевые и начальные условия примут вид

$$u=0,\qquad \frac{\partial w}{\partial\theta}=0,\qquad \text{при } \theta=0 \tag{2.4}$$

$$u=Aw,\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=(B\operatorname{sh}\theta_0+\operatorname{ch}\theta_0)\,w\qquad \text{при } \theta=\theta_0 \tag{2.5}$$

$$u=w=0,\qquad v=v_0\qquad \text{при } r=0 \tag{2.6}$$

Воспользуемся теперь преобразованием Лапласа по переменной r по формуле

$$f_1(p,\theta)=\int_0^\infty e^{-pr}f(r,\theta)\,dr$$

Получим

$$\frac{\partial}{\partial p}(pw_1)-\frac{\partial u_1}{\partial\theta}+\operatorname{ch}\theta\frac{\partial v_1}{\partial p}=0,\qquad \frac{\partial}{\partial p}(pu_1)-\frac{\partial w_1}{\partial\theta}+\operatorname{sh}\theta\frac{\partial v_1}{\partial p}=0$$

$$\operatorname{ch}\theta\frac{\partial}{\partial p}(pv_1)+\operatorname{sh}\theta\frac{\partial v_1}{\partial\theta}-\frac{\partial w_1}{\partial p}=0 \tag{2.7}$$

$$(p^2+1)\frac{\partial^2 w_1}{\partial p^2}+3p\frac{\partial w_1}{\partial p}+w_1-\frac{\partial^2 w_1}{\partial\theta^2}=0 \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} &u_1=0, && \frac{\partial w_1}{\partial\theta}=0 && \text{при } \theta=0\\ &u_1=Aw_1, && pv_1-v_0=(B\operatorname{sh}\theta_0+\operatorname{ch}\theta_0)\,w_1 && \text{при } \theta=\theta_0\end{aligned} \tag{2.9}$$

Кроме того, как следует из теории преобразования Лапласа, для всех функций-изображений должно выполняться условие

$$f_1(p,\theta)\to 0\qquad \text{при } \operatorname{Re}p\to+\infty \tag{2.10}$$

Сделаем подстановку

$$p=\operatorname{sh}q,\qquad w_1(p,\theta)=w_2(q,\theta)/\operatorname{ch}q$$

Тогда для функции $w_2(q,\theta)$ вместо (2.8) получим

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial q^2}-\frac{\partial^2 w_2}{\partial\theta^2}=0$$

Общее решение этого волнового уравнения имеет вид

$$w_2(q,\theta)=F(q+\theta)+\Phi(q-\theta)$$

где F и Φ — произвольные функции. Как видно из (2.9), $\partial w_2/\partial\theta=0$ при $\theta=0$, поэтому $\Phi(q)=F(q)$ и

$$w_2(q,\theta)=F(q+\theta)+F(q-\theta) \tag{2.11}$$

Второе из уравнений (2.7) запишем так:

$$\frac{\partial}{\partial q}\{pu_1-[F(q+\theta)-F(q-\theta)]+\operatorname{sh}\theta v_1\}=0$$

Отсюда

$$pu_1 - [F(q+\theta) - F(q-\theta)] + \operatorname{sh}\theta v_1 = \varphi(\theta) \tag{2.12}$$

где $\varphi(\theta)$ — произвольная функция. Известно [3], что

$$f(r=0) = f(0) = \lim p f_1(p, \theta) \quad \text{при } p \to \infty$$

Следовательно

$$w(0) = \lim_{p\to\infty} p w_1(p, \theta) = 0, \qquad \lim_{q\to\infty} \operatorname{th} q w_2(q, \theta) = 2F(\infty) = 0$$

$$u(0) = \lim_{p\to\infty} p u_1 = 0, \qquad \lim_{q\to\infty} p u_1 = 0 \tag{2.13}$$

Согласно (2.10) имеем также $\lim v_1 = 0$ при $p \to \infty$ и $\lim v_1 = 0$ при $q \to \infty$. В равенстве (2.12) перейдем к пределу $\operatorname{Re} q \to \infty$. Тогда левая часть обращается в нуль при любом θ, т. е. $\varphi(\theta) \equiv 0$ и

$$pu_1 - [F(q+\theta) - F(q-\theta)] + \operatorname{sh}\theta v_1 = 0$$

Положим здесь $\theta = \theta_0$. Используя (2.9), найдем, что $F(q)$ удовлетворяет уравнению в конечных разностях

$$\operatorname{sh} 2q [F(q+\theta_0) - F(q-\theta_0)] - (a \operatorname{ch} 2q + b)[F(q+\theta_0) + F(q-\theta_0)] = \\ = 2v_0 \operatorname{sh}\theta_0 \operatorname{ch} q$$

где

$$a = A = \frac{1+\delta}{2\beta} > 1, \qquad b = 2\operatorname{sh}\theta_0 (B \operatorname{sh}\theta_0 + \operatorname{ch}\theta_0) - A = \frac{1-\delta}{2\beta} \tag{2.14}$$

Как известно [4], общее решение линейного неоднородного уравнения в конечных разностях есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения уравнения с правой частью. Общее решение однородного уравнения содержит в виде множителя периодическую функцию. Для уравнения (2.14) этот период равен $2\theta_0$. Единственность решения уравнения (2.14) обеспечивается тем, что $F(q) \to 0$ при $\operatorname{Re} q \to \infty$ согласно (2.13). Однородное уравнение, соответствующее (2.14), при достаточно больших $\operatorname{Re} q$ принимает вид

$$F(q+\theta_0) = -\frac{a+1}{a-1} F(q-\theta_0)$$

т. е. с увеличением $\operatorname{Re} q$ функция $F(q)$ неограниченно растет. Поэтому условию (2.13) можно удовлетворить, только положив равным нулю произвольный периодический множитель. Частное решение, исчезающее при $\operatorname{Re} q \to \infty$, ищем в виде ряда

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-(2n+1) q} \tag{2.15}$$

Подставим это выражение в (2.14). Приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, для определения величин $B_n = 2A_n \operatorname{ch}(2n+1)\theta_0$ получим соотношения

$$B_0 = -2v_0 \frac{\operatorname{sh}\theta_0}{a + \operatorname{th}\theta_0}, \qquad B_1 = B_0 \frac{(a-2b) + \operatorname{th}\theta_0}{a + \operatorname{th} 3\theta_0} \tag{2.16}$$

$$[a - \operatorname{th}(2n-1)\theta_0] B_{n-1} + 2bB_n + [a + \operatorname{th}(2n+3)\theta_0] B_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Согласно (2.11) имеем

$$w_2(q, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{ch}(2n+1)\theta}{\operatorname{ch}(2n+1)\theta_0} e^{-(2n+1) q} \tag{2.17}$$

Для доказательства сходимости полученного решения в уравнении (2.16) рассмотрим такие n, для которых $2n\theta_0 \gg 1$. Тогда вместо (2.16) получим

$$(a-1)B_{n-1} + 2bB_n + (a+1)B_{n+1} = 0 \tag{2.18}$$

Решение этого разностного уравнения с постоянными коэффициентами имеет вид $B_n = \mu^n$. Величина μ находится из квадратного уравнения

$$(a+1)\mu^2 + 2b\mu + (a-1) = 0 \tag{2.19}$$

корни которого отрицательны и по модулю меньше единицы. Согласно теореме Пуанкаре [4] при $\operatorname{Re} q \geqslant 0$ будет сходиться ряд

$$w_2(q, \theta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-(2n+1)q} \tag{2.20}$$

а с ним и ряд (2.17) при любых $\theta \leqslant \theta_0$.

Возвращаясь теперь к переменной p, учтем, что если $p = \operatorname{sh} q$, то $\operatorname{ch} q = \sqrt{p^2+1}$ и $e^{-q} = \sqrt{p^2+1} - p$; получим

$$w_1(p, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{ch}(2n+1)\theta}{\operatorname{ch}(2n+1)\theta_0} \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^{2n+1}}{\sqrt{p^2+1}}$$

Используя известную формулу [3] для изображения функций Бесселя

$$J_n(r) \doteq \frac{(\sqrt{p^2+1}-p)^n}{\sqrt{p^2+1}}$$

получим

$$w(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{ch}(2n+1)\theta}{\operatorname{ch}(2n+1)\theta_0} J_{2n+1}(r) \tag{2.21}$$

Переход к старым переменным X, ct осуществляется по формулам

$$r = kct\sqrt{1-\tau^2}, \qquad \tau = \frac{X}{ct} \tag{2.22}$$

$$\operatorname{ch}(2n+1)\theta = \frac{1}{2}\left[(1+\tau)^{2n+1} + (1-\tau)^{2n+1}\right](1-\tau^2)^{-(n+1/2)}$$

Давление на фронте ударной волны дается рядом

$$w(r, \theta_0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n J_{2n+1}(s), \qquad s = kct\sqrt{1-\beta^2} \tag{2.23}$$

Подставим (2.23) во второе из равенств (2.5) и проинтегрируем:

$$v(r, \theta_0) = v_0 + (B\operatorname{sh}\theta_0 + \operatorname{ch}\theta_0)\sum_{n=0}^{\infty} B_n \int_0^s J_{2n+1}(x)\,dx$$

Известно, что при любом n интеграл в правой части при $s \to \infty$ равен единице. Отметим также соотношение, которое получается из (2.14) и (2.20) при $q = 0$

$$w_2(0, \theta_0) = Q = \sum_{n=0}^{\infty} B_n = -\frac{2v_0 \operatorname{sh}\theta_0}{a+b} = -\frac{v_0}{B\operatorname{sh}\theta_0 + \operatorname{ch}\theta_0} \tag{2.24}$$

Учитывая, что величины $v(r, \theta_0)$ и $\xi(s)$ пропорциональны одна другой, получим для формы фронта ударной волны следующее выражение:

$$\frac{v(r,\theta_0)}{v_0}=\frac{\xi(s)}{\Delta}=1-\frac{1}{Q}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\int_0^s J_{2n+1}(x)\,dx=\frac{1}{Q}\sum_{n=0}^{\infty}B_n\int_s^{\infty}J_{2n+1}(x)\,dx \quad (2.25)$$

Отсюда видно, что $\xi(s)\to 0$ при $s\to\infty$.

Последний результат можно представить в виде, не содержащем интегралов

$$\frac{\xi(s)}{\Delta}=J_0(s)-\frac{1}{Q}\sum_{n=1}^{\infty}D_nJ_{2n}(s) \quad (2.26)$$

где

$$D_n=\frac{1}{a+b}\{[a+\mathrm{th}(2n+1)\theta_0]B_n-[a-\mathrm{th}(2n-1)\theta_0]B_{n-1}\} \quad (2.27)$$

§ 3. Некоторые предельные случаи. Для получения асимптотических формул при $r\gg 1$ используем формулу

$$J_{2n+1}(r)\sim(-1)^n\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\left[\sin\left(r-\tfrac{1}{4}\pi\right)+\frac{4(2n+1)^2-1}{8r}\cos\left(r-\tfrac{1}{4}\pi\right)\right] \quad (3.1)$$

и соотношение

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_n=0 \quad (3.2)$$

которое получается из (2.14) при $q={}^1/_2 i\pi$ и $a\neq b$.

При помощи (3.1) и (2.21) получаем

$$w(r,\theta)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi r}}\sin\left(r-\frac{1}{4}\pi\right)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_n\frac{\mathrm{ch}(2n+1)\theta}{\mathrm{ch}(2n+1)\theta_0}+$$
$$+\frac{\cos(r-{}^1/_4\pi)}{4\sqrt{2\pi r^3}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nB_n\frac{\mathrm{ch}(2n+1)\theta}{\mathrm{ch}(2n+1)\theta_0}[4(2n+1)^2-1] \quad (3.3)$$

На фронте ударной волны в силу (3.2) первая сумма обращается в нуль, так что остается

$$w(r,\theta_0)\sim N\frac{\cos(s-{}^1/_4\pi)}{\sqrt{2\pi s^3}} \qquad \left(N=4\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n+1)B_n\right) \quad (3.4)$$

В случае сильной ударной волны ($c_0=0$ либо $U\to\infty$) $\delta=0$ и $a=b$. Один из корней уравнения (2.19) обращается в (-1), так что ряд (3.4) расходится. Отсюда заключаем, что асимптотическое поведение решения будет существенно другим, а именно, затухание будет более медленным. В этом случае уравнение (2.14) принимает вид

$$\mathrm{sh}\,q\,[F(q+\theta_0)-F(q-\theta_0)]-a\,\mathrm{ch}\,q\,[F(q+\theta_0)+F(q-\theta_0)]=v_0\,\mathrm{sh}\,\theta_0 \quad (3.5)$$

Решение по-прежнему ищем в форме (2.15), а для B_n вместо (2.16) получаем соотношения

$$B_0=-\frac{2v_0\,\mathrm{sh}\,\theta_0}{a+\mathrm{th}\,\theta_0},\quad [a-\mathrm{th}(2n-1)\theta_0]B_{n-1}+[a+\mathrm{th}(2n+1)\theta_0]B_n=0$$
$$(n=1,2,3,\ldots) \quad (3.6)$$

Сходимость ряда (2.20) с такими коэффициентами очевидна. Так как $B_n / B_{n-1} < 0$ для всех n, то в отличие от (3.2) имеем

$$iw_2\left(\tfrac{1}{2} i\pi,\, \theta_0\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n = \tfrac{1}{2} M \neq 0 \qquad (3.7)$$

При помощи (3.3) получим при $\delta = 0$ такую формулу:

$$w(r, \theta_0) = M \frac{\sin\left(s - {}^1/_4\, \pi\right)}{\sqrt{2\pi s}} \qquad (3.8)$$

Получим теперь формулу, обобщающую (3.4) и (3.8) на случай малых, но конечных δ. При помощи интегрального представления для функций Бесселя

$$J_{2n+1}(r) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im}\left[\int_0^{{}^1/_2 i\pi} e^{-(2n+1)q} \operatorname{sh}(r \operatorname{sh} q)\, dq\right]$$

вместо (2.23) получим

$$w(r, \theta_0) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Im}\left[\int_0^{{}^1/_2 i\pi} w_2(q, \theta_0) \operatorname{sh}(s \operatorname{sh} q)\, dq\right] \qquad (3.9)$$

Далее из (2.14) следует

$$w_2(q, \theta_0) = \frac{2 \operatorname{ch} q}{\operatorname{sh} 2q + a \operatorname{ch} 2q + b} \{2 \operatorname{sh} q\, F(q + \theta_0) - v_0 \operatorname{sh} \theta_0\} \qquad (3.10)$$

Очевидно, что при $q \to {}^1/_2 i\pi$ и $\delta \to 0$ знаменатель в (3.10) обращается в нуль, поэтому основной вклад в интеграл (3.9) при $s \gg 1$ дает точка $q = {}^1/_2 i\pi$, а выражение в фигурных скобках в последней формуле можно заменить его значением при $q = {}^1/_2 i\pi$ и $\delta = 0$

$$2iF\left(\tfrac{1}{2} i\pi + \theta_0\right) - v_0 \operatorname{sh} \theta_0 = i\left[F\left(\tfrac{1}{2} i\pi + \theta_0\right) - F\left(\tfrac{1}{2} i\pi - \theta_0\right)\right] - v_0 \operatorname{sh} \theta_0 +$$
$$+ i\left[F\left(\tfrac{1}{2} i\pi + \theta_0\right) + F\left(\tfrac{1}{2} i\pi - \theta_0\right)\right] = \tfrac{1}{2} M \qquad (3.11)$$

Первых два слагаемых дают нуль в силу соотношения

$$i\left[F\left(\tfrac{1}{2} i\pi + \theta_0\right) - F\left(\tfrac{1}{2} i\pi - \theta_0\right)\right] = v_0 \operatorname{sh} \theta_0$$

которое следует из (3.5) при $q = {}^1/_2 i\pi$. Заметим, что в формуле (3.4) коэффициент N будет равен

$$N = i \frac{\partial^2}{\partial q^2} w_2(q, \theta_0) \qquad \text{при } q = \tfrac{1}{2} i\pi$$

После двукратного дифференцирования из равенства (3.10) имеем

$$N = -\frac{4M}{(h+1)\delta^2} \qquad (\text{для } \delta \ll 1) \qquad (3.12)$$

Таким образом, ряд (3.5) расходится как δ^{-2}. При помощи (3.9) и (3.10) получим, что при $s \gg 1$ и $\delta \ll 1$

$$w(r, \theta_0) \approx \frac{2M}{\pi} \int_0^{{}^1/_2 \pi} \frac{\sin(s \sin\varphi) \cos\varphi \sin 2\varphi}{(a \cos 2\varphi + b)^2 + (\sin 2\varphi)^2}\, d\varphi$$

Сделаем замену $\sin\varphi = x$. Основной вклад в интеграл дает окрестность точки $x = 1$, поэтому, заменив нижний предел интегрирования на

$-\infty$ там, где возможно, положим $x=1$

$$w(r,\theta_0)\sim M\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{\sin(sx)\sqrt{1-x}\,dx}{(a-b)^2+8(1-x)}\tag{3.13}$$

Положив $\alpha={}^1/_8(h+1)s\delta^2$, $1-x={}^1/_8(h+1)z\delta^2$, придем к искомой формуле

$$w(r,\theta_0)\sim\frac{M\sqrt{h+1}\,\delta}{4\pi}\,\mathrm{Im}\,\{\psi(\alpha)\exp[i\,(s-\tfrac{1}{4}\pi)]\}$$

$$\psi(\alpha)=\exp(\tfrac{1}{4}i\pi)\int\limits_0^{\infty}e^{-i\alpha z}\frac{\sqrt{z}\,dz}{z+1}\tag{3.14}$$

Заметим, что функцию $\psi(\alpha)$ можно представить также в виде

$$\psi(\alpha)=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\left[1-\sqrt{\pi\alpha}\,e^{i\alpha}\left(e^{1/_4 i\pi}-\frac{2i}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{\alpha}}e^{-i\eta^2}d\eta\right)\right]\tag{3.15}$$

Если в (3.13) величина s фиксирована, а $\delta\to0$, то $\alpha\to0$ и формула (3.13) переходит в (3.8). Если же δ мало, но фиксировано, а $s\to\infty$, то $\alpha\to\infty$ и приходим к (3.4) с учетом (3.12).

Асимптотическое поведение функции $\Delta^{-1}\xi(s)$ устанавливается подстановкой (3.4) и (3.8) во вторую из формул (2.5):

$$\frac{\xi(s)}{\Delta}\sim\frac{N}{v_0}\,\frac{1}{2\beta\,\mathrm{sh}\,\theta_0}\,\frac{\sin(s-{}^1/_4\pi)}{\sqrt{2\pi s^3}}\qquad\text{при }\delta\neq0$$
$$\frac{\xi(s)}{\Delta}\sim-\frac{M}{v_0}\,\frac{1}{2\sqrt{h(h+1)}}\,\frac{\cos(s-{}^1/_4\pi)}{\sqrt{2\pi s}}\qquad\text{при }\delta=0\tag{3.16}$$

Заметим, что для сильной ударной волны ($\delta=0$) в силу (3.6) формула (2.27) приводится к виду $aD_n=[a+\mathrm{th}\,(2n+1)\,\theta_0]\,B_n$.

Формулу (3.13) при $s\gg1$ можно записать в виде

$$w(r,\theta_0)\sim-M\frac{4\sqrt{2}}{\pi}\frac{\partial}{\partial s}\left[\int\limits_{-\infty}^{1}\frac{\cos(sx)\sqrt{1-x}\,dx}{(a-b)^2+8(1-x)}\right]\tag{3.17}$$

Аналогично выводу (3.15) получим

$$w(r,\theta_0)\sim-\frac{M\sqrt{h+1}\,\delta}{4\pi}\frac{\partial}{\partial s}\,\mathrm{Re}\,\{\exp[i\,(s-\tfrac{1}{4}\pi)]\,\psi(\alpha)\}$$

Подставляя в (2.5), придем к формуле

$$\frac{\xi(s)}{\Delta}\sim-\frac{M}{v_0}\,\frac{\delta}{8\pi\sqrt{h}}\,\mathrm{Re}\,\{\exp[i\,(s-\tfrac{1}{4}\pi)]\psi(\alpha)\}\tag{3.18}$$

Используя обозначения табулированных интегралов Френеля

$$S(z)=\int\limits_0^z\sin t^2\,dt,\qquad C(z)=\int\limits_0^z\cos t^2dt$$

запишем (3.18) в виде

$$\frac{\xi(s)}{\Delta}\sim-\frac{M}{v_0}\,\frac{1}{2\sqrt{h(h+1)}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\,\{\cos(s-\tfrac{1}{4}\pi)-\sqrt{\pi\alpha}\cos(s+\alpha)+$$
$$+2\sqrt{\alpha}\,[S(\sqrt{\alpha})\cos(s+\alpha-\tfrac{1}{4}\pi)-C(\sqrt{\alpha})\sin(s+\alpha-\tfrac{1}{4}\pi)]\}\tag{3.19}$$

Рассмотрим случай слабых ударных волн ($\delta \to 1$). При этом $\operatorname{th} \theta_0 = \beta \to 1$, так что $\theta_0 \to \infty$. Из коэффициентов A_n в (2.15) остается только $A_0 = -{}^1/_2 v_0$. Тогда (2.21) дает

$$w(r, \theta) = v_0 J_1(r) \operatorname{ch} \theta$$

Отсюда получаем следующую формулу для возмущения давления p', отнесенного к его невозмущенному значению p

$$\frac{p'}{p} = -\frac{2(h+1)}{h}(M_0 - 1) k\Delta \exp(ikY) \frac{J_1 [k ct \sqrt{1-\tau^2}]}{\sqrt{1-\tau^2}} \quad \left(\tau = \frac{X}{ct}\right) \quad (3.20)$$

Поведение $\xi(s)$ при $\delta \to 1$ легко определяется, если учесть, что $F(q + \theta_0) \to 0$ при $\theta_0 \to \infty$. Так как $a \to 1$, $b \to 0$, то из (2.14) находим

$$w_2(q, \theta_0) \approx F(q - \theta_0) = -2v_0 \operatorname{sh} \theta_0 e^{-2q} \operatorname{ch} q$$

Следовательно,

$$w_1(p, \theta_0) = -2v_0 \operatorname{sh} \theta_0 (\sqrt{p^2+1} - p)^2$$

и, пользуясь таблицей оригиналов и изображений [3], находим

$$w(r, \theta_0) = -4v_0 \operatorname{sh} \theta_0 \frac{J_2(r)}{r}$$

Подставляя это в (2.5) при $\theta_0 \gg 1$, получим

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -2v_0 \frac{J_2(r)}{r} \quad \text{или} \quad v(r, \theta_0) = v_0 \left[1 - 2\int_0^s \frac{J_2(x)}{x} dx\right]$$

Используя известные формулы

$$\frac{J_2(r)}{r} = -\frac{d}{dr}\left[\frac{J_1(r)}{r}\right], \qquad \int_0^\infty \frac{J_2(x)}{x} dx = \frac{1}{2}$$

окончательно получим

$$\frac{v(r, \theta_0)}{v_0} = \frac{\xi(s)}{\Delta} = 2\frac{J_1(s)}{s} \quad \text{при } \delta \to 1$$

что совпадает с соответствующей формулой работы [1].

Поступила 30 VIII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Freeman N. C. Theory of Stability of the Plane Shock Waves. Proc. Roy. Soc. A228, p. 341, 1955.
2. Дьяков С. П. Об устойчивости ударных волн. ЖЭТФ, т. 27, вып. 3 (9), стр. 288, 1954.
3. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. ГТТИ, М.— Л., 1951.
4. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. ГТТИ, М.—Л., 1952.