

## О ДВИЖЕНИИ ПОРШНЯ В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ

Н. Н. Кочина, Н. С. Мельникова

(Москва)

Решение задачи о расширении поршня с постоянной скоростью в идеальном газе было дано Л. И. Седовым [1,2] и Дж. Тейлором [3]. Если скорость поршня постоянна, то движение газа автомодельно при учете противодействия ( $p_1 \neq 0$ ); если радиус поршня изменяется со временем по степенному закону, то движение будет автомодельно только без учета противодействия. Автомодельные движения газа, вытесняемого движущимся по степенному закону поршнем, рассматривались в работах [4-8]. Решение неавтомодельной ( $p_1 \neq 0$ ) линеаризированной задачи о расширении поршня со скоростью

$$v_n = ct^m \left[ 1 + \frac{(m-1)}{2(2m-1)} \left( \frac{\gamma p_1 \lambda_*}{\rho_1 c} \right)^2 At^{-2m} \right]$$

дано в работе [9].

В настоящей статье рассматривается неавтомодельная задача ( $p_1 \neq 0$ ) о движении газа, вызванном поршнем, движущимся со скоростью  $v_n = ct^m$ . Эти движения можно представлять происходящими от точечного взрыва с расходящейся ударной волной или от периферийного взрыва со сходящейся ударной волной с учетом вытеснения газа продуктами взрыва. При этом предполагается, что движение продуктов взрыва моделируется расширением поршня по степенному закону.

1. Рассмотрим неустановившееся движение газа, вызванное плоским цилиндрическим или сферическим поршнем, движущимся по произвольному закону. В начальный момент времени газ покоится, плотность его  $\rho_1$  и давление  $p_1$  постоянны. Возьмем в качестве независимых переменных и искомых функций безразмерные величины

$$\lambda = \frac{r}{r_2}, \quad q = \frac{a_1^2}{c^2}, \quad f(\lambda, q) = \frac{v}{v_2}, \quad R(\lambda, q) = \frac{p}{p_2}, \quad P(\lambda, q) = \frac{p}{p_2}$$

где  $a_1$  — скорость звука в невозмущенном газе,  $r_2$  — радиус ударной волны,  $c$  — скорость ударной волны,  $v_2$ ,  $\rho_2$ ,  $p_2$  — соответственно скорость, плотность и давление за фронтом ударной волны. В этих переменных уравнения возмущенного движения газа имеют вид:

$$\left[ \frac{2(1-q)f}{\gamma+1} - \lambda \right] (1-q) \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{[2\gamma - (\gamma-1)q][\gamma-1+2q]}{2\gamma(\gamma+1)} \frac{1}{R} \frac{\partial P}{\partial \lambda} + \\ + \left[ (1-q) \frac{\partial f}{\partial \lambda} - \frac{(1+q)}{2q} f \right] \frac{dq}{ds} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{2(1-q)}{\gamma+1} \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \left[ \frac{2(1-q)}{\gamma+1} f - \lambda \right] \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{2}{\gamma-1+2q} \right] \frac{dq}{ds} + \\ + \frac{2(\gamma-1)(1-q)}{\gamma+1} \frac{f}{\lambda} = 0 \quad (1.2)$$

$$\left[ \frac{2(1-q)}{\gamma+1} f - \lambda \right] \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial \lambda} - \gamma \left[ \frac{2(1-q)}{\gamma+1} f - \lambda \right] \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \\ + \left[ \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial q} - \frac{\gamma}{R} \frac{\partial R}{\partial q} - \frac{2\gamma(\gamma-1)(1-q)^2}{(\gamma-1+2q)[2\gamma - (\gamma-1)q]q} \right] \frac{dq}{ds} = 0 \quad (1.3)$$

Здесь  $\gamma$  — показатель адиабаты,

$$s = \ln kr_2 \quad (k = \text{const}, [k] = L^{-1}) \quad (1.4)$$

Значения  $\nu = 1, 2, 3$  соответствуют плоским, цилиндрическим и сферическим волнам.

Пусть имеют место следующие зависимости безразмерной координаты поршня и безразмерной скорости поршня от  $q$ :

$$\lambda_n = \xi(q), \quad f_n[\lambda_n, q] = \eta(q) \quad (1.5)$$

Занишем условие того, что скорость частиц газа, прилегающих к поршню, равна скорости поршня:

$$\frac{d\xi}{dq} + \xi \frac{ds}{dq} = \frac{2}{\gamma + 1} (1 - q) \eta \frac{ds}{dq} \quad (1.6)$$

Если известна одна из трех функций  $\xi(q)$ ,  $\eta(q)$  или  $s(q)$ , то для нахождения двух других нужно воспользоваться уравнениями (1.5) и (1.6). Если задан закон расширения поршня  $r_n = \varphi(t)$  в функции времени, уравнение (1.6) примет вид

$$v_n = \frac{dr_n}{dt} = \varphi'(t) \quad (1.7)$$

Используя формулы (1.5) и (1.7), а также выражения скорости ударной волны и скорости частиц за ней через  $q$  получим

$$\xi(q) = \left( r_2(t_0) + a_1 \int_{t_0}^t q^{-\frac{1}{2}} dt \right)^{-1} \varphi(t), \quad \eta(q) = \left( \frac{2}{\gamma + 1} a_1 q^{-\frac{1}{2}} (1 - q) \right)^{-1} \varphi'(t)$$

Если задана одна из четырех функций  $q(t)$ ,  $\eta(q)$ ,  $\xi(q)$ ,  $\varphi(t)$ , то из уравнений (1.5) и (1.8) найдем остальные; следует отметить, что постановка задачи накладывает некоторые ограничения на эти функции.

Решение задачи о поршне, движущемся в идеальном газе по закону (1.5), сводится к интегрированию нелинейной системы уравнений в частных производных (1.1)–(1.3) в некоторой области плоскости  $\lambda, q$  (причем  $0 \leq q \leq 1$ ) со следующими условиями: на ударной волне

$$f(1, q) = R(1, q) = P(1, q) = 1 \quad \text{при } \lambda = 1 \quad (1.9)$$

условием (1.6) на поверхности поршня, где  $\lambda = \xi(q)$  и некоторыми начальными условиями при  $q = 0$ .

2. Пусть поршень движется по степенному закону

$$v_n = ct^m \quad (2.1)$$

Будем рассматривать движения, близкие к автомодельным, функции  $s$  и  $r_2$  представим в виде

$$s = \ln(A_0 q)^{\frac{1}{\nu_1}} + \frac{A}{\nu_1} q + O(q^2), \quad r_2 = \frac{1}{k} (A_0 q)^{\frac{1}{\nu_1}} \left[ 1 + \frac{A}{\nu_1} q \right] + O(q^2) \quad (2.2)$$

где

$$\nu_1 = -\frac{2m}{m+1}, \quad A_0 = \frac{1}{\gamma} \left( \frac{(m+1)^m}{\lambda_*} \right)^{\frac{2}{m+1}}, \quad k = \left[ c \left( \frac{\rho_1}{p_1} \right)^{\frac{m+1}{2}} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (2.3)$$

$\lambda_*$  — безразмерная координата поршня, найденная при решении соответствующей автомодельной задачи. Через  $A$  обозначена неизвестная пока константа, определяющаяся из расчета.

Пользуясь формулами (1.4) и (2.2), найдем зависимость

$$t = \left[ \frac{\lambda_*}{c} \left( \frac{\gamma P_1}{\rho_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{m}} q^{-\frac{1}{2m}} \left[ 1 + \frac{(1-m)}{2m(2m-1)} Aq \right] \quad (2.4)$$

Выражения для функций (1.5) в силу (2.1) — (2.4) примут вид:

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \xi(q) = \lambda_* + aq & \left( a = \frac{(m+1)\lambda_*A}{2(2m-1)} \right) \\ f_n &= \eta(q) = \frac{\gamma+1}{2} \lambda_* \left\{ 1 + \left[ 1 - \frac{(m-1)}{2(2m-1)} A \right] q \right\} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Начальные условия при  $q = 0$  запишутся в виде

$$f(\lambda, 0) = f_0(\lambda), \quad R(\lambda, 0) = R_0(\lambda), \quad P(\lambda, 0) = P_0(\lambda) \quad (2.6)$$

где  $f_0(\lambda)$ ,  $R_0(\lambda)$ ,  $P_0(\lambda)$  — функции, соответствующие автомодельному движению [4–8]. Введем вместо  $\lambda$  и  $q$  переменные  $x$  и  $q$ , причем

$$x = \frac{\lambda - \lambda_* - aq}{1 - \lambda_* - aq} \quad (2.7)$$

Будем искать функции  $f(x, q)$ ,  $R(x, q)$  и  $P(x, q)$  в виде

$$\begin{aligned} f(x, q) &= f_0(x) + qf_1(x) + \dots \\ R(x, q) &= R_0(x) + qR_1(x) + \dots, \quad P(x, q) = P_0(x) + qP_1(x) + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Не учитывая членов порядка  $q^2$  и выше, для нахождения функций  $f_1(x)$ ,  $R_1(x)$ ,  $P_1(x)$  и константы  $A$  получим линейную систему дифференциальных уравнений (штрихами обозначены производные по  $x$ )

$$\begin{aligned} a_1 R_0 f_1' + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} P_1' + a_2 f_1 + a_3 R_1 + b_{11} + A b_{12} &= 0 \\ \frac{2}{\gamma+1} R_0 f_1' + a_4 R_1' + a_4 f_1 + a_5 R_1 + b_{21} + A b_{22} &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$a_1 (R_0 P_1' - \gamma P_0 R_1') + a_6 f_1 - \gamma a_1 R_0' P_1 + a_7 R_1 + b_{31} + A b_{32} = 0$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{\gamma+1} f_0 - \lambda_* - (1 - \lambda_*) x, & a_2 &= \left[ \frac{2}{\gamma+1} f_0' + \frac{\nu_1(1-\lambda_*)}{2} \right] R_0 \\ a_3 &= a_1 f_0' - \frac{\nu_1(1-\lambda_*)}{2} f_0, & a_4 &= \frac{2}{\gamma+1} \left[ \frac{(\nu-1)(1-\lambda_*) R_0}{\lambda_* + x(1-\lambda_*)} + R_0' \right] \\ a_5 &= \nu_1(1-\lambda_*) + \frac{2}{\gamma+1} \left[ f_0' + \frac{(\nu-1)(1-\lambda_*)}{\lambda_* + x(1-\lambda_*)} f_0 \right] \\ a_6 &= \frac{2}{(\gamma+1)} (R_0 P_0' - \gamma P_0 R_0'), & a_7 &= -\nu_1(1-\lambda_*)(\gamma+1) P_0 + a_1 P_0' \\ b_{11} &= \frac{\gamma^2 + 4\gamma - 1}{2\gamma(\gamma+1)} P_0' - \left[ \frac{2}{\gamma+1} f_0' + \nu_1(1-\lambda_*) \right] f_0 R_0 \\ b_{21} &= -\frac{2\nu_1(1-\lambda_*) R_0}{\gamma-1} - [\lambda_* + x(1-\lambda_*)] R_0' \\ b_{31} &= -\frac{2}{\gamma+1} (R_0 P_0' - \gamma P_0 R_0') f_0 + \nu_1(1-\lambda_*) \frac{[4\gamma^2 - (\gamma-1)^2]}{2\gamma(\gamma-1)} P_0 R_0 \\ b_{12} &= \frac{\nu_1(1-\lambda_*)}{2} f_0 R_0 + \frac{(m+1)\lambda_*}{2(2m-1)} \left\{ \frac{\nu_1}{2} f_0 + (\nu_1+1)(x-1)f_0' \right\} R_0 \\ b_{22} &= \frac{(m+1)\lambda_*}{2(2m-1)} \left\{ (\nu_1+1)(x-1) R_0' - \frac{2(\nu-1)R_0 f_0}{(\gamma+1)[\lambda_* + x(1-\lambda_*)]^2} \right\} \\ b_{32} &= \nu_1(1-\lambda_*) P_0 R_0 + \frac{(m+1)\lambda_*}{2(2m-1)} \{ \nu_1 P_0 R_0 + (\nu_1+1)(x-1)(R_0 P_0' - \gamma P_0 R_0') \} \end{aligned} \quad (2.10)$$

Коэффициенты этой системы — известные функции от  $x$ , выраженные через  $f_0(x)$ ,  $R_0(x)$ ,  $P_0(x)$  и  $x$ ; функции  $f_0(x)$ ,  $R_0(x)$  и  $P_0(x)$  известны из решения автомодельной задачи. Условия на ударной волне имеют вид:

$$f_1(1) = R_1(1) = P_1(1) = 0 \quad (2.11)$$

(так как для автомодельных функций имеем  $f_0(1) = R_0(1) = P_0(1) = 1$ ).

Соотношения (2.5) — (2.8) вместе с условием на поршне для решения автомодельной задачи  $f_0 = \frac{1}{2}(\gamma + 1)\lambda_*$  дадут граничное условие в точках поверхности поршня

$$f_1(0) = \frac{(\gamma + 1)\lambda_*}{2} \left[ 1 - \frac{(m-1)A}{2(2m-1)} \right] \quad (2.12)$$

Таким образом, задача сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений (2.9) в интервале  $0 < x < 1$  с граничными условиями (2.11) и (2.12). Из вида уравнений и граничных условий ясно, что решение этой задачи можно искать в виде [1]

$$f_1 = f_{11} + Af_{12}, \quad R_1 = R_{11} + AR_{12}, \quad P_1 = P_{11} + AP_{12} \quad (2.13)$$

Подставляя (2.13) в (2.9), получим две системы дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять функции  $f_{1i}$ ,  $R_{1i}$  и  $P_{1i}$  ( $i=1, 2$ ):

$$\begin{aligned} a_1 R_0 f_{1i}' + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} P_{1i}' + a_2 f_{1i} + a_3 R_{1i} + b_{1i} &= 0 \\ \frac{2R_0}{\gamma+1} f_{1i}' + a_1 R_{1i}' + a_4 f_{1i} + a_5 R_{1i} + b_{2i} &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$a_1 (R_0 P_{1i}' - \gamma P_0 R_{1i}') + a_6 f_{1i} - \gamma a_1 R_0' P_{1i} + a_7 R_{1i} + b_{3i} = 0$$

Коэффициенты уравнений (2.14) определяются формулами (2.10).

Граничные условия для  $f_{1i}$ ,  $R_{1i}$ ,  $P_{1i}$  в силу (2.13), (2.11), (2.12) примут вид

$$f_{1i}(1) = R_{1i}(1) = P_{1i}(1) = 0 \quad (2.15)$$

$$f_{11}(0) + Af_{12}(0) = \frac{(\gamma+1)\lambda_*}{2} \left[ 1 - \frac{(m-1)A}{2(2m-1)} \right] \quad (2.16)$$

Условие (2.16) используется для нахождения константы  $A$  после того, как функции  $f_{1i}$ ,  $R_{1i}$ ,  $P_{1i}$  найдены.

3. Отметим, что уравнения (2.9) имеют интеграл адиабатичности, аналогичный полученному в статье [9]:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(\gamma+1)(\nu_1+\nu)} \frac{\nu_1}{\left[ \lambda_* + x(1-\lambda_*) - \frac{2}{\gamma+1} f_0 \right]} \frac{f_1}{\left[ \lambda_* + x(1-\lambda_*) - \frac{2}{\gamma+1} f_0 \right]} - \left( \frac{\nu}{\nu_1+\nu} - \gamma \right) \frac{R_1}{R_0} - \frac{P_1}{P_0} &= \\ = \frac{R_0^\gamma}{P_0} \int_1^x \frac{P_0}{R_0^\gamma \left[ \lambda_* + x(1-\lambda_*) - \frac{2}{\gamma+1} f_0 \right]} F(x) dx & \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь

$$F(x) = F_1(x) + AF_2(x) \quad (3.2)$$

$$F_1(x) = [\lambda_* + x(1-\lambda_*)] \frac{P_0'}{P_0} - \left( \frac{\nu_1}{\nu_1+\nu} - \gamma \right) \frac{b_{21}}{R_0} + \frac{\nu_1(1-\lambda_*)(3\gamma-1)}{2\gamma}$$

$$F_2(x) = -\frac{\nu_1 b_{22}}{(\nu+\nu_1)R_0} - \frac{(m+1)\nu_1\lambda_*}{2(2m-1)} \left[ 1 + \frac{(\nu_1+1)(x-1)(1-\lambda_*)}{a_1} \right] - \nu_1(1-\lambda_*)$$

4. Вблизи поршня, где  $x=0$ , решение автомодельной задачи  $f_0$ ,  $R_0$  и  $P_0$  имеет особенности, поэтому для интегрирования уравнений (2.9) нужно пользоваться асимптотическими формулами.

Будем считать  $m = -\nu/(2 + \nu)$ ; в этом случае в плоскости  $zV$ , где  $z = a^2 t^2 / r^2$ ,  $V = vt/r$ , поле интегральных кривых уравнения (1.4) статьи [8] совпадает с полем интегральных кривых для сильного взрыва [1].

В зависимости от входящих в уравнение (1.4) параметров  $\gamma$  и  $\nu$  возможны три случая [8]:

1) при  $\gamma < 2$  решение автомодельной задачи о поршне совпадает с соответствующим решением задачи о периферийном взрыве [6];

2) при  $\gamma > 2, \nu = 1$  или  $\nu = 2$ , а также при  $2 < \gamma < 7, \nu = 3$  решения [автомодельной задачи о поршне не существует;

3) при  $\gamma > 7, \nu = 3$  решение автомодельной задачи о поршне совпадает с соответствующим решением задачи о сильном взрыве.

Следовательно, решение автомодельной задачи о поршне в случае  $m = -\nu/(2 + \nu)$  ( $\nu_1 = \nu$ ) описывается формулами (11.15) — (11.16), найденными Л. И. Седовым [1], где  $4/(2 + \nu)(\gamma + 1) \leq V \leq 2/(2 + \nu)$ . Если ввести новую независимую переменную

$$u = \frac{2}{2 + \nu} - V \quad (4.1)$$

и воспользоваться решением Л. И. Седова [1], то получим асимптотическое поведение функций  $f_0(u)$ ,  $R_0(u)$ ,  $P_0(u)$  вблизи  $u = 0$ :

$$f_0 = \frac{\gamma + 1}{2} \lambda_*, \quad R_0 = C_1 u^{\frac{2}{\gamma - 2}}, \quad P_0 = C_2 u^{\frac{\gamma}{\gamma - 2}} \quad (4.2)$$

$$C_1 = (\gamma + 1)^{\alpha_3} \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{2 + \nu}{2} \right)^{\alpha_4} \left[ \frac{\nu(\gamma + 1)(2 - \gamma)}{2\gamma - \nu\gamma + 3\nu - 2} \right]^{\alpha_5}, \quad C_2 = \frac{(\gamma + 1)^2 (2 + \nu) \lambda_*^2}{8(\gamma - 1)} C_1$$

где  $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$  — известные функции  $\nu$  и  $\gamma$  [1].

Подставляя выражение для функций  $f_0, R_0, P_0$  и их производных в первые два уравнения (2.14) и используя найденный интеграл адиабатичности (3.1), получим систему двух линейных дифференциальных уравнений для нахождения функций  $f_{1i}(u)$  и  $R_{1i}(u)$  вблизи поршня ( $\lambda = \lambda_*$ ). Интегрируя эту систему, с учетом интеграла (3.1) получим асимптотические представления для функций  $f_{1i}(u)$ ,  $R_{1i}(u)$  и  $P_{1i}(u)$ :

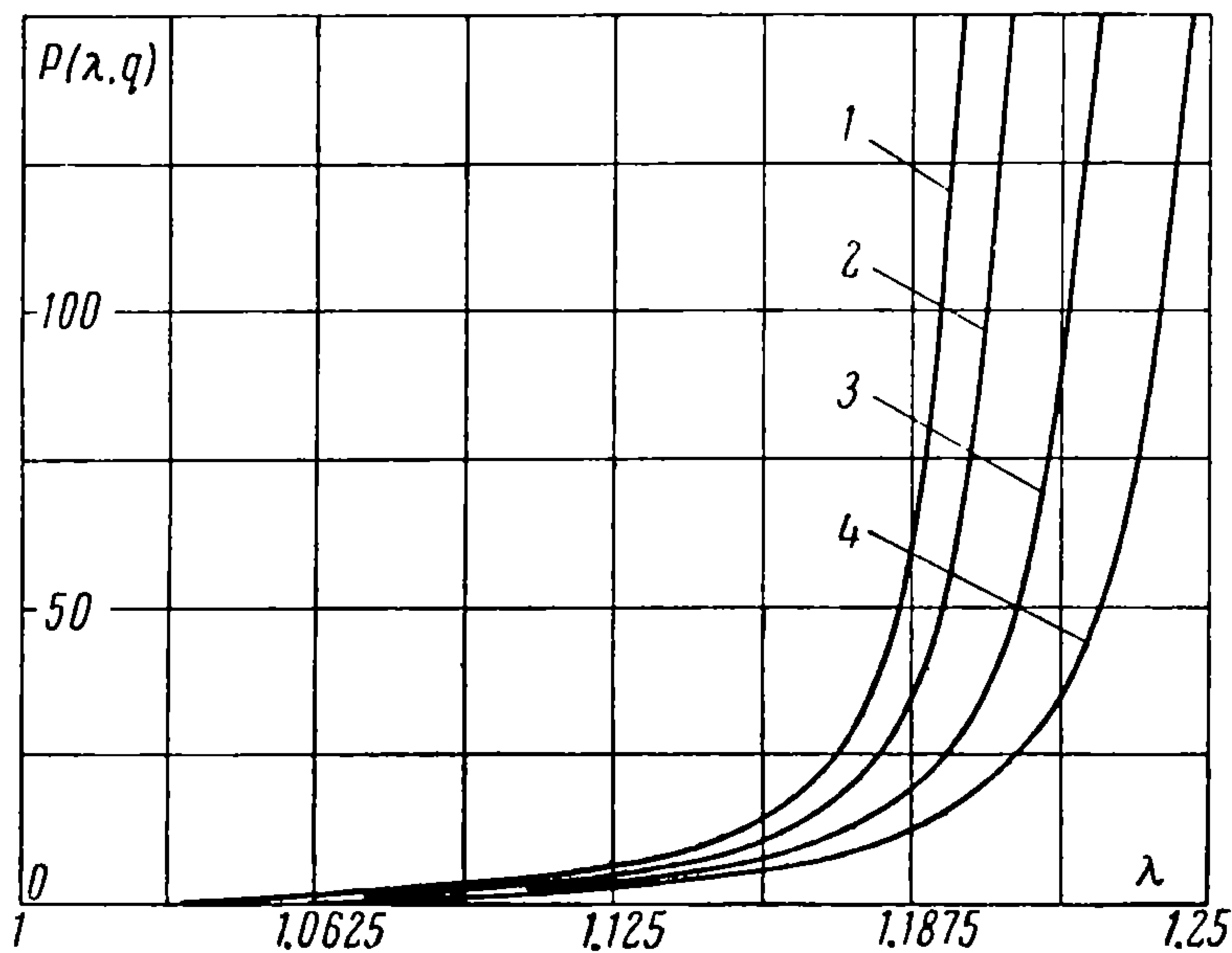
$$f_{1i} = C_{4i} u^{\frac{2}{2 - \gamma}} - \frac{2 + \nu}{4} \frac{(\gamma^2 - 1) \lambda_* C_{3i}}{C_1}, \quad R_{1i} = C_{3i} u^{\frac{4 - \gamma}{\gamma - 2}} + \frac{8}{2 + \nu} \frac{C_1 \gamma Y_{1i}}{(\gamma + 1)^2 \lambda_*^2} u^{\frac{\gamma + 2}{\gamma - 2}}$$

$$P_{1i} = \frac{2 + \nu}{16} \frac{\gamma(\gamma + 1)^2 \lambda_*^2 C_{3i}}{(\gamma - 1)} u^{\frac{2}{\gamma - 2}} + \frac{C_1 \gamma Y_{1i}}{2(\gamma - 1)} u^{\frac{2\gamma}{\gamma - 2}} + \frac{(\gamma + 1) \lambda_* C_1 C_{4i}}{4(\gamma - 1)} \quad (4.3)$$

Здесь

$$Y_{1i} = \int_0^1 \frac{P_0}{R_0^\gamma} \frac{F_i(x) dx}{[\lambda_* + x(1 - \lambda_*) - \frac{2}{\gamma+1} f_0(x)]}, \quad (\gamma < 2) \quad (4.4)$$

Функции  $F_i(x)$  определяются по формулам (3.2),  $C_1$  — по формуле (4.2),  $C_{3i}$ ,  $C_{4i}$  — константы интегрирования.



Фиг. 2

Пользуясь формулой (2.16) и первой из формул (4.3), найдем следующее выражение для константы  $A$ :

$$A = \frac{C_1 + 2(\gamma - 1)C_{31}}{\frac{m-1}{2(2m-1)}C_1 - 2(\gamma - 1)C_{32}} \quad (4.5)$$

На фиг. 1 и 2 для различных  $q$  дано распределение характеристик движения — скорости, плотности и давления в воздухе ( $\gamma = 1.4$ ) между цилиндрическим поршнем и сходящейся ударной волной.

Кривые 1 описывают автомодельное движение ( $q = 0$ ), кривым 2, 3, 4 соответствуют значения  $q = 0,025; 0,050; 0,075$ .

Согласно гипотезе плоских сечений [11] такими же будут распределения характеристик движения при обтекании воздухом с большой, но конечной сверхзвуковой скоростью осесимметричного тела с потоком. При этом форма тела близка к параболической (автомодельная задача для тела параболической формы  $r = cx^{0.5}$  рассмотрена в работе [5]).

Отметим, что задача о расходящейся ударной волне, когда поршень расширяется по степенному закону, рассматривалась в работе [10].

Поступила 27 VIII 1959

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, 1957.
2. Седов Л. И. О некоторых неустановившихся движениях сжимаемой жидкости. ПММ, 1945, т. IX, вып. 4.
3. Taylor G. I. The air wave surrounding an expanding sphere. Proc. Roy. Soc., 1946, A 186, No 100.
4. Крашениникова Н. Л. О неустановившихся движениях газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 8.
5. Гродзовский Г. Л. Автомодельное движение газа при сильном периферийном взрыве. Докл. АН СССР, 1956, т. 111, № 5.
6. Григорян С. С. Задача Коши и задача о поршне для одномерных неустановившихся движений газа (автомодельные движения). ПММ, 1958, т. XXII, вып. 2.
7. Lees Lester and Kubota Toshi. Inviscid Hypersonic Flow over Blunt-Nosed Slender Bodies. JAS, 1957, vol. 24, No 3.
8. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, без учета противодействия. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 4.
9. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем, с учетом противодействия. Докл. АН СССР, 1958, т. 122, № 2.
10. Kubota Toshi. Inviscid Hypersonic Flow over Blunt-Nosed Slender Bodies. Heat Trans. and Fluid Mech. Inst, Calif. Inst., Technolog., Pasadena, Calif., June, 1957.
11. Бам-Зеликович Г. М., Бунимович А. И., Михайлова М. П. Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями. Теоретическая гидромеханика. Сб. статей, 1949, № 4; Изв. АН СССР, ОТН, 1960, № 1.