

## ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ ГИПЕРЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ОКОЛО ТОНКИХ ТЕЛ ПРИ БОЛЬШИХ УГЛАХ АТАКИ

В. В. Сычев

(Москва)

Рассматриваются пространственные гиперзвуковые течения около тел, поперечные размеры которых существенно меньше их длины. Использование малости параметра, характеризующего относительную толщину тела, позволяет приближенно представить задачу обтекания таких тел в форме, обобщающей подобие гиперзвуковых течений с малыми возмущениями на случай произвольного угла атаки.

Получены приближенные формулы для расчета аэродинамических характеристик тонких тел при больших углах атаки, содержащие в качестве неизвестных лишь некоторые постоянные, зависящие от формы поперечного сечения тела.

Один из приближенных методов расчета гиперзвуковых течений, как известно состоит в рассмотрении потоков около тонких тел, углы наклона, поверхности которых к направлению невозмущенного потока повсюду малы. Поле скоростей около тонкого тела можно рассматривать как поле малых возмущений вблизи его поверхности. Угол атаки тела при этом, очевидно, также должен быть мал. Хотя дифференциальные уравнения теории малых возмущений гиперзвукового потока и остаются нелинейными, так что не могут быть решены в общем виде, в рамках этой теории удастся найти некоторые общие свойства гиперзвуковых течений. Важнейшими из них являются аналогия с неустановившимися движениями газа (закон плоских сечений) [1,2,3] и закон подобия для течений около аффинноподобных тел [4], изложение которых можно найти в книге [5].

При увеличении угла атаки возмущения, вносимые в поток даже очень тонким телом, перестают быть малыми и теория малых возмущений становится неприменимой. Однако как показывается ниже, и в этом случае предположение о малой относительной толщине тела позволяет сделать ряд общих выводов о свойствах пространственных гиперзвуковых потоков, обтекающих такие тела при больших углах атаки. Эти результаты можно рассматривать как обобщение закона плоских сечений и закона подобия теории малых возмущений на случай произвольного угла атаки. При этом на форму тела приходится наложить еще одно дополнительное ограничение: рассматривать тела, все поперечные размеры которых много меньше их длины. Например, для возможности применения результатов настоящей работы к расчету аэродинамических характеристик крыльев при гиперзвуковых скоростях мы должны предположить, что наряду с малой относительной толщиной они имеют весьма малое удлинение.

При рассмотрении гиперзвуковых течений с конечными возмущениями поля скоростей и ударными волнами большой интенсивности становится важным учет реальных свойств газа. Обобщение полученных результатов на случай термодинамически равновесного течения реального газа дается в конце работы.

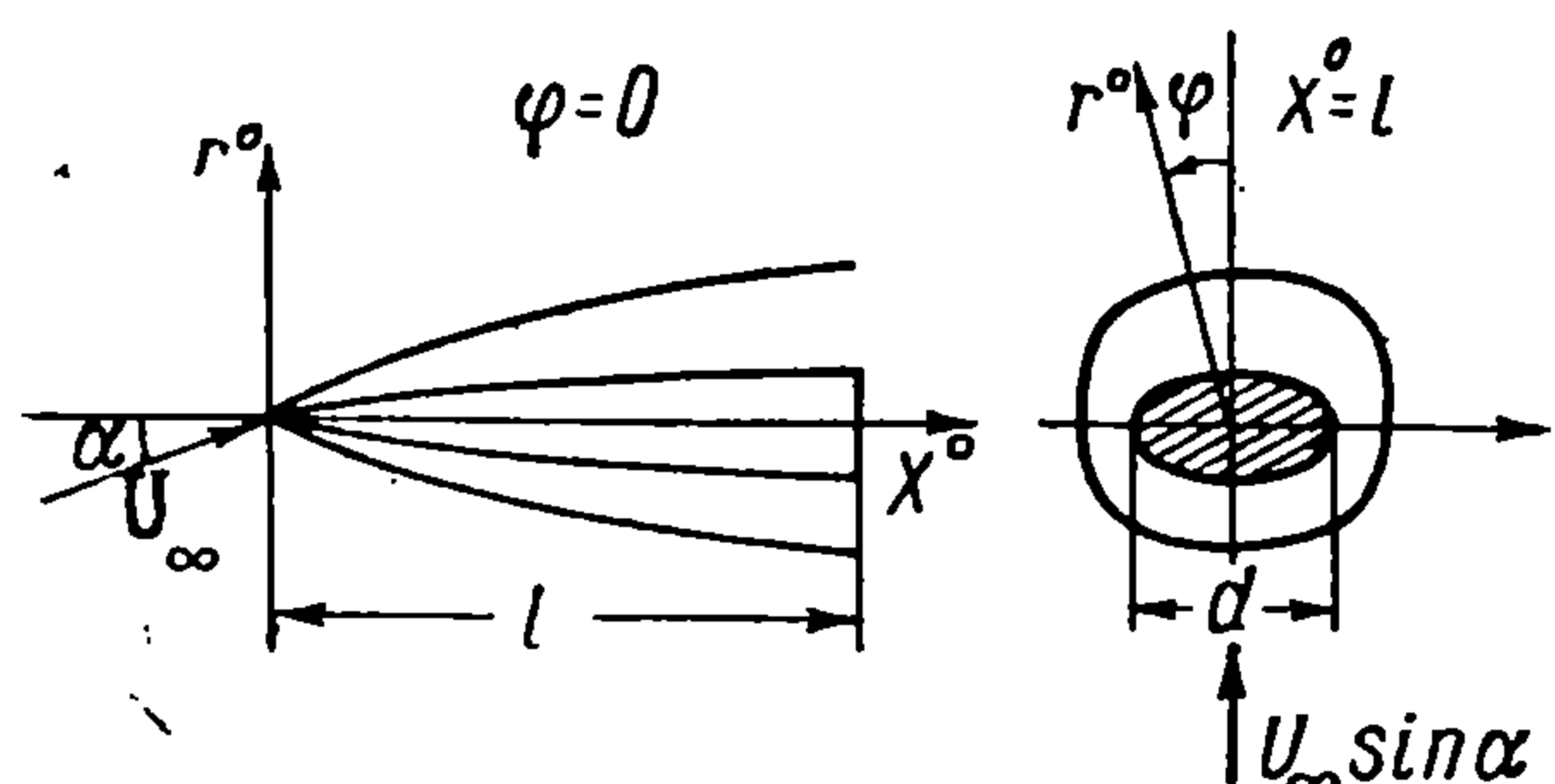
**1. Постановка задачи.** Рассмотрим течение около тонкого или удлиненного тела, помещенного в равномерный сверхзвуковой поток под углом атаки  $\alpha$ . Пусть наибольший поперечный размер этого тела  $d$ , а его длина  $l$ . В качестве исходного предположения примем, что

$$\delta = \frac{d}{l} \ll 1 \quad (1.1)$$

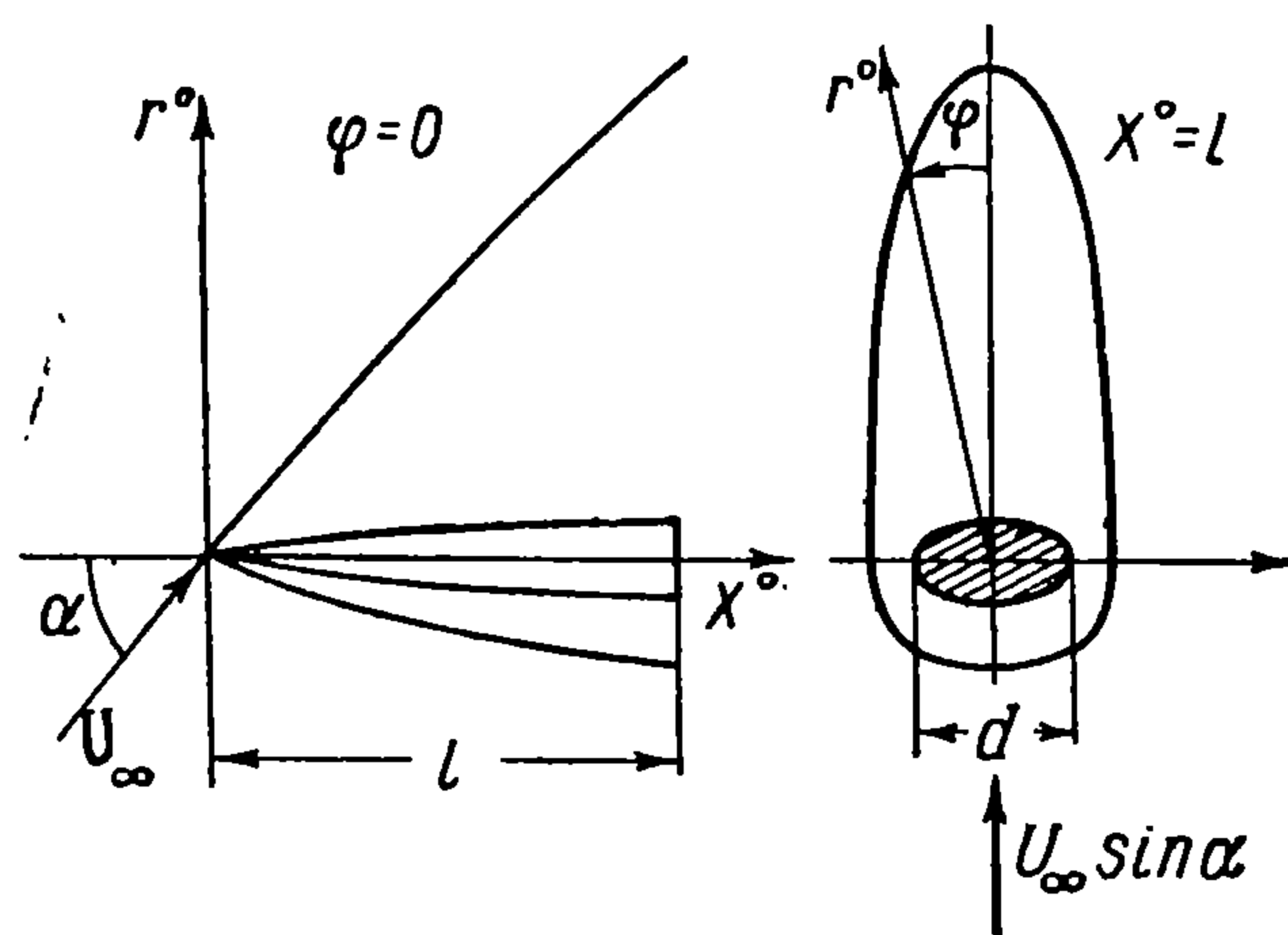
Число  $M_\infty$  невозмущенного потока будем предполагать существенно большим единицы, так что имеет место условие

$$M_\infty \delta \gg 1 \quad (1.2)$$

Если угол атаки мал ( $\alpha \lesssim \delta$ ), то все поле течения между ударной волной и поверхностью тела будет располагаться в узкой области, поперечные размеры которой порядка поперечных размеров тела (фиг. 1 а). При больших углах атаки ( $\alpha \gg \delta$ ) поле возмущений будет, вообще говоря, простирается на конечные расстояния от поверхности тела



Фиг. 1а



Фиг. 1б

(фиг. 1б). Однако легко видеть, что это относится лишь к той его части, которая находится «над» телом (с «подветренной» стороны). Поле давлений в этой области является слабым, а влияние ее на остальную часть течения отсутствует в силу гиперзвукового характера поперечного потока ( $M_\infty \sin \alpha \gg 1$ ). В то же время уплотненная часть потока (давления в которой намного превышают статическое давление в невозмущенном потоке) примыкает к поверхности тела, и ее поперечные размеры по-прежнему порядка поперечных размеров тела.

Таким образом, и в случае больших углов атаки задача обтекания тонкого тела приближенно сводится к исследованию течения вблизи его поверхности. Это обстоятельство приводит к возможности ее приближенного аналитического исследования.

**2. Уравнения и граничные условия.** Выберем цилиндрическую систему координат  $x^0, r^0, \varphi^0$ , ось  $x^0$  которой направим вдоль тела, так чтобы углы наклона его поверхности к этой оси были малы. Вектор скорости невозмущенного потока  $U_\infty$  будем считать расположенным (фиг. 1) в плоскости  $\varphi = 0, \pi$ .

Составляющие вектора скорости рассматриваемого течения  $V$  в этой системе координат обозначим соответственно через  $u^0, v^0, w^0$ , давление и плотность — через  $p^0$  и  $\rho^0$ . Введем безразмерные переменные

$$x = \frac{x^0}{l}, \quad r = \frac{r^0}{d}, \quad \varphi = \varphi^0 \quad (2.1)$$

и безразмерные искомые функции

$$u = \frac{u^0}{U_\infty \cos \alpha}, \quad v = \frac{v^0}{U_\infty \sin \alpha}, \quad w = \frac{w^0}{U_\infty \sin \alpha}$$

$$p = \frac{p^0}{\rho_\infty U_\infty^2 \sin^2 \alpha}, \quad \rho = \frac{\rho^0}{\rho_\infty} \quad (2.2)$$

Индекс  $\infty$  всюду относится к условиям в невозмущенном потоке.

Система дифференциальных уравнений газовой динамики в этих переменных принимает вид:

$$\begin{aligned} \delta \operatorname{ctg} \alpha u \frac{\partial (\operatorname{ctg} \alpha u)}{\partial x} + v \frac{\partial (\operatorname{ctg} \alpha u)}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial (\operatorname{ctg} \alpha u)}{\partial \varphi} &= -\delta \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \delta \operatorname{ctg} \alpha u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \delta \operatorname{ctg} \alpha u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{vw}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \delta \operatorname{ctg} \alpha u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \rho \left[ \delta \frac{\partial (\operatorname{ctg} \alpha u)}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{r} \right] &= 0 \\ \delta \operatorname{ctg} \alpha u \frac{\partial S^\circ}{\partial x} + v \frac{\partial S^\circ}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial S^\circ}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $S^\circ$  — удельная энтропия газа, которую мы будем рассматривать как функцию давления и плотности. Для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями

$$S^\circ = S_\infty \ln \left( \frac{1}{\gamma} M_\infty^2 \sin^2 \alpha \frac{p}{\rho \gamma} \right) \quad (2.4)$$

где  $S_\infty$  — удельная энтропия в невозмущенном потоке,  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей газа. Рассмотрим граничные условия задачи.

Пусть  $r = r_1(x, \varphi)$  — уравнение поверхности тела,  $r = R(x, \varphi)$  — уравнение поверхности ударной волны. Обозначим через  $\mathbf{n}_1$  и  $\mathbf{n}_2$  единичные векторы нормалей к этим поверхностям. В соответствии с (2.1) имеем

$$\mathbf{n}_1 = \mu_1 \left\{ -\delta \frac{\partial r_1}{\partial x}, 1, -\frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} \right\} \quad (2.5)$$

Условие обтекания поверхности тела имеет вид:

$$\mathbf{V} \mathbf{n}_1 = 0, \quad \text{или} \quad v - w \frac{1}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} = \delta \operatorname{ctg} \alpha u \frac{\partial r_1}{\partial x} \quad (2.6)$$

Для единичного вектора нормали  $\mathbf{n}_2$  к поверхности ударной волны имеем

$$\mathbf{n}_2 = \mu_2 \left\{ -\delta \frac{\partial R}{\partial x}, 1, -\frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right\}, \quad \mu_2 = \left[ 1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 + \delta^2 \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.7)$$

Два взаимно-ортогональных касательных вектора на этой поверхности можно определить как

$$\mathbf{t}_{21} = \left\{ 0, \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi}, 1 \right\}, \quad \mathbf{t}_{22} = \left\{ -1 - \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2, -\delta \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\delta}{R} \frac{\partial R}{\partial x} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right\} \quad (2.8)$$

Уравнения сохранения массы, импульса и энергии, связывающие переменные по обе стороны поверхности разрыва, имеют вид:

$$\begin{aligned} \rho^\circ \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_2 &= \rho_\infty \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n}_2, & \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_{21} &= \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{t}_{21}, & \mathbf{V} \cdot \mathbf{t}_{22} &= \mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{t}_{22} \\ p^\circ + \rho^\circ (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_2)^2 &= p_\infty + \rho_\infty (\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n}_2)^2, & \frac{1}{2} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}_2)^2 + h^\circ &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_\infty \cdot \mathbf{n}_2)^2 + h_\infty \end{aligned} \quad (2.9)$$

Здесь  $h^\circ$  — удельная энтальпия газа, рассматриваемая как функция давления и плотности. Для совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями

$$h^\circ = h_\infty \gamma M_\infty^2 \sin^2 \alpha \frac{p}{\rho} \quad (2.10)$$

где  $h_\infty$  — удельная энтальпия в невозмущенном потоке.

Подставляя в (2.9) соотношение (2.10), безразмерные искомые функции (2.2), выражение для вектора скорости невозмущенного потока

$$\mathbf{U}_\infty = U_\infty (\cos \alpha, \sin \alpha \cos \varphi, -\sin \alpha \sin \varphi) \quad (2.11)$$

и выражения для векторов (2.7) и (2.8), можно после некоторых преобразований записать систему граничных условий на поверхности ударной волны в виде

$$\operatorname{ctg} \alpha u = \operatorname{ctg} \alpha + \delta (\cos \varphi - v) \frac{\partial R}{\partial x}, (v - \cos \varphi) \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + w + \sin \varphi = 0 \quad (2.12)$$

$$-\delta \operatorname{ctg} \alpha u \frac{\partial R}{\partial x} + v - w \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left( -\delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial R}{\partial x} + \cos \varphi + \sin \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right) + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \alpha} \frac{1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 + \delta^2 \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2}{-\delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial R}{\partial x} + \cos \varphi + \sin \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi}} \quad (2.13)$$

$$p = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{\left( -\delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial R}{\partial x} + \cos \varphi + \sin \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2}{1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 + \delta^2 \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \alpha} \quad (2.14)$$

$$\rho = \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \alpha} \frac{1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2 + \delta^2 \left( \frac{\partial R}{\partial x} \right)^2}{\left( -\delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial R}{\partial x} + \cos \varphi + \sin \varphi \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2} \right]^{-1} \quad (2.15)$$

**3. Вывод приближенных соотношений.** Полученные в предыдущем разделе дифференциальные уравнения и граничные условия представляют точную постановку задачи обтекания. Для упрощения этих соотношений можно воспользоваться малостью параметра, характеризующего относительную толщину тела. В соответствии с проведенной постановкой задачи все безразмерные независимые переменные искомые функции и производные можно, очевидно, считать величинами порядка единицы. Рассмотрение первого из уравнений системы (2.3) вместе с граничным условием (2.12) на поверхности ударной волны позволяет заключить, что во всем поле течения

$$\operatorname{ctg} \alpha u = \operatorname{ctg} \alpha + o(\delta) \quad (3.1)$$

Тогда, отбрасывая величины второго порядка малости в дифференциальных уравнениях (2.3) и учитывая (2.4), можно записать приближенную систему уравнений для искомых функций  $v, w, p, \rho$  в виде<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ \delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{vw}{r} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \\ \delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \varphi} + \rho \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{r} \right) &= 0 \\ \delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho \gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{p}{\rho \gamma} \right) + \frac{w}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho \gamma} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

<sup>1</sup> Составляющая скорости  $u$ , если это необходимо, может быть определена при помощи уравнения Бернулли.

Граничное условие (2.6) на поверхности тела  $r = r_1(x, \varphi)$  принимает вид:

$$v - \frac{w}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial \varphi} = \delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial r_1}{\partial x} \quad (3.3)$$

Граничные условия на поверхности ударной волны  $r = R(x, \varphi)$  после упрощений принимают вид:

$$\begin{aligned} & (v - \cos \varphi) \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + w + \sin \varphi = 0 \\ & -\delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial R}{\partial x} + v - \frac{w}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \left( -\delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial R}{\partial x} + \cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right) + \\ & \quad + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \alpha} \frac{1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2}{-\delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial R}{\partial x} + \cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi}} \\ & \rho = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{\left( -\delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial R}{\partial x} + \cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2}{1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2} - \frac{1}{\gamma} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \alpha} \\ & \rho = \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \alpha} \frac{1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2}{\left( -\delta \operatorname{ctg} \alpha \frac{\partial R}{\partial x} + \cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2} \right]^{-1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Интегрирование (3.2) при граничных условиях (3.3) и (3.4) дает приближенное решение поставленной выше задачи об обтекании тонкого тела под произвольным углом атаки. Заметим, что, поскольку во всех этих соотношениях отношение отброшенных членов к оставленным имеет порядок  $\delta^2$ , рассматриваемое приближение должно обеспечивать высокую точность результата (подобно тому, как это имеет место в теории малых возмущений гиперзвукового потока).

**4. Подобие течений.** При замене независимой переменной  $x$  на переменную времени

$$t = \frac{x l}{U_\infty \cos \alpha} \quad (4.1)$$

приближенные соотношения предыдущего раздела переходят в дифференциальные уравнения и граничные условия, определяющие неустановившееся движение газа в плоскости  $x = \text{const}$ . Легко видеть, что это неустановившееся движение обусловлено действием перемещающегося и расширяющегося цилиндрического поршня. Форма поршня определяется при этом формой поперечного сечения тела, закон его расширения — законом распределения площадей поперечных сечений по длине тела, а скорость поступательного движения в направлении, перпендикулярном оси, — углом атаки. Этой аналогией устанавливается обобщенный закон плоских сечений, согласно которому возмущения, вносимые тонким телом, движущимся с гиперзвуковой скоростью под произвольным углом атаки, в основном сводятся к смещению частиц газа в плоскостях, перпендикулярных оси тела.

Теперь заметим, что соотношения (3.2) — (3.4) содержат лишь два параметра:

$$k_1 = \delta \operatorname{ctg} \alpha, \quad k_2 = M_\infty \sin \alpha \quad (4.2)$$

Это доказывает справедливость закона подобия, согласно которому течения около тел с одинаковым законом распределения площадей и форм поперечных сечений (аффинноподобных тел) будут подобны, т. е. все безразмерные функции ( $v, w, p, \rho$ ) в соответствующих точках полей ( $x, r, \varphi$ ) равны, если параметры подобия  $k_1$  и  $k_2$  для всех случаев имеют одни и те же значения.

Используя полученный закон подобия, мы можем, собирая результаты, написать формулу для коэффициента давления на поверхности тела в виде

$$C_p = 2 \sin^2 \alpha \left\{ p \left[ x, T(x, \varphi), \varphi, k_1, k_2 \right] - \frac{1}{\gamma k_2^2} \right\} \quad (4.3)$$

Интегрируя по поверхности тела, легко найдем выражения: для коэффициента нормальной силы

$$C_n = \frac{N}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 l d} = \sin^2 \alpha C_n^*(k_1, k_2) \quad (4.4)$$

для коэффициента осевой силы

$$C_t = \frac{T}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 l d} = \delta \sin^2 \alpha C_t^*(k_1, k_2) \quad (4.5)$$

для коэффициента продольного момента

$$C_m = \frac{M}{\frac{1}{2} \rho_\infty U_\infty^2 l^2 d} = \sin^2 \alpha C_m^*(k_1, k_2) \quad (4.6)$$

Здесь величины  $C_n^*$ ,  $C_t^*$ ,  $C_m^*$ , рассматриваемые как функции параметров подобия, для аффинноподобных тел одинаковы.

Легко видеть, что уравнения и граничные условия предыдущего раздела вместе с только что сформулированными результатами при малых углах атаки ( $\alpha \sim \delta$ ) совпадают с известными соотношениями и результатами теории малых возмущений пространственного гиперзвукового потока [6]. В этом смысле они могут рассматриваться как обобщение этой теории на случай произвольного угла атаки.

**5. Аэродинамические характеристики тонких тел при больших углах атаки.** При больших углах атаки ( $\alpha \gg \delta$ ) в граничных условиях (3.4) наряду с членами порядка  $\delta^2$  должны быть также отброшены члены, содержащие множителем  $1/M_\infty^2 \sin^2 \alpha$ , которые в силу исходного предположения (1.2) имеют тот же или еще более высокий порядок малости. В этом случае решение вообще не будет зависеть от числа  $M_\infty$ . Это указывает на то, что аэродинамические характеристики тонких тел при больших углах атаки гораздо раньше, чем при малых  $\alpha$ , достигают своего гиперзвукового предела, соответствующего числу  $M_\infty \rightarrow \infty$ .

Единственный остающийся параметр подобия  $k_1$  становится при  $\alpha \gg \delta$  малым. Это обстоятельство может быть использовано для приближенного интегрирования системы (3.4).

Воспользуемся этой возможностью для определения аэродинамических характеристик тонких тел, форма поперечного сечения которых постоянна по длине.

Уравнение поверхности любого такого тела, очевидно, может быть записано в виде

$$r = r_1(x, \varphi) = f(x) g(\varphi) \quad (5.1)$$

Тогда граничное условие (3.3) принимает вид:

$$v - w \frac{g'(\varphi)}{g(\varphi)} = k_1 f'(x) g(\varphi) \quad (5.2)$$

а граничные условия (3.4) на поверхности ударной волны  $r = R(x, \varphi)$  могут быть записаны в виде

$$v = \cos \varphi - \frac{2}{\gamma + 1} \frac{-k_1 \frac{\partial R}{\partial x} + \cos \varphi + \sin \varphi \frac{1}{S} \frac{\partial R}{\partial \varphi}}{1 + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2}$$

$$w = -\sin \varphi + (\cos \varphi - v) \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \quad (5.3)$$

$$p = \frac{2}{\gamma + 1} \frac{\left( -k_1 \frac{\partial R}{\partial x} + \cos \varphi + \sin \varphi \frac{1}{S} \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2}{1 + \frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial R}{\partial \varphi} \right)^2}, \quad \rho = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \quad (5.4)$$

Пользуясь малостью параметра  $k_1$ , можно с принятой степенью приближения представить решение системы (3.2) в виде

$$v = v_0 + k_1 v_1, \quad w = w_0 + k_1 w_1, \quad p = p_0 + k_1 p_1, \quad \rho = \rho_0 + k_1 \rho_1 \quad (5.5)$$

Уравнение поверхности ударной волны также представим в виде

$$R(x, \varphi) = R_0(x, \varphi) + k_1 R_1(x, \varphi) \quad (5.6)$$

Если теперь подставить (5.5), (5.6) в дифференциальные уравнения (3.2) и граничные условия (5.2), (5.3), (5.4), то легко получить для главных членов (5.5) систему соотношений, эквивалентную точной постановке задачи о поперечном обтекании цилиндра при числе  $M_\infty \rightarrow \infty$ .

Таким образом,

$$R_0(x, \varphi) = f(x) \sigma_0(\varphi) \quad (5.7)$$

$$v_0 = v_0(y, \varphi), \quad w_0 = w_0(y, \varphi), \quad p_0 = p_0(y, \varphi), \quad \rho_0 = \rho_0(y, \varphi) \quad \left( y = \frac{r}{f(x)} \right) \quad (5.8)$$

Линейная система дифференциальных уравнений, получающаяся для добавочных членов (5.5) вместе с соответствующими граничными условиями, как нетрудно проверить, будет удовлетворяться решением вида

$$R_1(x, \varphi) = f(x) f'(x) \sigma_1(\varphi) \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} v_1 &= f'(x) v_1(y, \varphi), & p_1 &= f'(x) p_1(y, \varphi) \\ w_1 &= f'(x) w_1(y, \varphi), & \rho_1 &= f'(x) \rho_1(y, \varphi) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Собирая результаты, получаем приближенное выражение

$$C_p = 2 \sin^2 \alpha \{ p_0 [g(\varphi), \varphi] + \delta \operatorname{ctg} \alpha f'(x) p_1 [g(\varphi), \varphi] \} \quad (5.11)$$

Тогда для определенных выше коэффициентов аэродинамических сил и продольного момента находим

$$C_n = 2 \sin^2 \alpha \left[ A \int_0^1 f(x) dx + B \delta \operatorname{ctg} \alpha f^2(1) \right]$$

$$C_t = 2 \delta \sin^2 \alpha \left[ C f^2(1) + D \delta \operatorname{ctg} \alpha \int_0^1 f(x) f'^2(x) dx \right] \quad (5.12)$$

$$C_m = 2 \sin^2 \alpha \left[ A \int_0^1 f(x) x dx + 2B \delta \operatorname{ctg} \alpha \int_0^1 f(x) f'(x) x dx \right]$$

в которых постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  зависят лишь от формы поперечного сечения тела. Таким образом, например, для расчета аэродинамических характеристик тонких тел вращения любой формы достаточно однажды определить эти четыре постоянные. Это может быть сделано либо путем точного (численного) интегрирования полученных выше уравнений, либо путем обработки материалов экспериментальных исследований одного тонкого тела вращения (любой формы) при большой сверхзвуковой скорости и большом угле атаки. Область применимости формул (5.12) ограничена диапазоном углов атаки  $\delta \ll \alpha < 1/2\pi$ .

**6. Учет реальных свойств газов.** Гиперзвуковое обтекание тел, особенно при больших углах атаки, сопровождается образованием сильных ударных волн. При прохождении через фронт такой ударной волны могут происходить возбуждения дополнительных степеней свободы молекул, процессы диссоциации и ионизации газа. Учет этих эффектов в предположении местного термодинамического равновесия во всем поле течения принципиальных трудностей не представляет. Мы можем рассматривать удельную энтропию  $S^\circ$  и удельную энтальпию газа  $h^\circ$  как функции давления и плотности, а также термодинамического состояния и химического состава газа в невозмущенном потоке, характеризуемых значениями  $p_\infty$ ,  $\rho_\infty$  и концентрациями компонент  $C_{i\infty}$  [7].

Тогда вместо соотношений (2.4) и (2.10) имеют место соотношения

$$S^\circ = S_\infty S(p^\circ, \rho^\circ; p_\infty, \rho_\infty, C_{i\infty}) = S_\infty S(p \rho_\infty a_\infty^2 M_\infty^2 \sin^2 \alpha, \rho \rho_\infty; p_\infty, \rho_\infty, C_{i\infty}) \quad (6.1)$$

$$h^\circ = h_\infty h(p^\circ, \rho^\circ; p_\infty, \rho_\infty, C_{i\infty}) = h_\infty h(p \rho_\infty a_\infty^2 M_\infty^2 \sin^2 \alpha, \rho \rho_\infty; p_\infty, \rho_\infty, C_{i\infty}) \quad (6.2)$$

которые мы можем, очевидно, представить в более простом виде:

$$S^\circ = S_\infty S(k_2^2 p, \rho; p_\infty, \rho_\infty, C_{i\infty}) \quad (6.3)$$

$$h^\circ = h_\infty h(k_2^2 p, \rho; p_\infty, \rho_\infty, C_{i\infty}) \quad (6.4)$$

Отсюда следует возможность обобщения полученных ранее результатов о подобии гиперзвуковых потоков совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями на общий случай термодинамически равновесных течений. Для подобия течений около семейства аффинноподобных тел в этом случае, помимо постоянства параметров подобия  $k_1$  и  $k_2$ , должно быть выполнено также условие постоянства химического состава и термодинамического состояния газа в невозмущенном потоке.

Поступила 14 XI 1959

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Н а у е s W. D. On hypersonic similitude. Quart. of Appl. Math., vol. 5, No. 1, April, 1947.
2. Б а м - З е л и к о в и ч Г. М., Б у н и м о в и ч А. И., М и х а й л о в а М. П. Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями. Сб. статей № 4 «Теоретич. гидромеханика». Оборонгиз, М., 1949.
3. И л ь ю ш и н А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. XX, вып. 6.
4. T s i e n Н. S. Similarity laws of hypersonic flows. J. Math. and Phys., October, 1946, vol. XXV, No. 3.
5. Ч е р н ы й Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, М., 1959.
6. D у к е Van M. D. Application of hypersonic small disturbance theory. J. of the Aero. Sci., vol. 21, No. 3, March, 1954.
7. С т у п о ч е н к о Е. В. и др. Термодинамические свойства воздуха. В сб. «Физическая газодинамика». Изд-во АН СССР, М., 1959.