

О ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НЕСОВЕРШЕННОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА

И. И. Межиров

(Москва)

Рассматривается вывод уравнений турбулентного пограничного слоя несовершенного газа (например, диссоциированного воздуха). Показано, что соотношения, справедливые для совершенного газа и вытекающие только из уравнений движения, неразрывности и энергии, могут быть обобщены на случай несовершенного газа путем формальной замены в них температуры энтальпией. Приведены примеры таких соотношений.

§ 1. Уравнения пограничного слоя. Рассмотрим систему уравнений осредненного плоского турбулентного движения реального газа. Остановимся сначала более подробно на уравнении энергии. Оно получается в результате осреднения по времени уравнения энергии актуального движения, которое удобно записать в данном случае в таком виде¹ (газ предполагается прозрачным):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho I) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u I) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v I) = \frac{1}{J} \frac{\partial p}{\partial t} \quad \left(I = i + \frac{u^2 + v^2}{2J}, \quad i = e + \frac{1}{J} \frac{p}{\rho} \right) \quad (1.1)$$

Здесь x, y — прямоугольные координаты точки, t — время, ρ — плотность, p — давление, I — энтальпия торможения, i — энтальпия, e — внутренняя энергия, J — механический эквивалент тепла.

В уравнении (1.1) для упрощения выкладок опущены члены, обусловленные молекулярной теплопроводностью и вязкостью, так как после осреднения они оказываются малыми по сравнению с соответствующими турбулентными характеристиками. Уравнение (1.1) справедливо для несовершенного газа, т. е. в том случае, когда удельные теплоемкости c_p, c_v зависят от температуры и давления, и уравнение состояния является произвольным. В частности, оно справедливо, например, при равновесной диссоциации воздуха или другой газовой смеси.

Для того чтобы получить уравнение энергии осредненного турбулентного движения, следует представить функции, входящие в (1.1), в виде суммы осредненной и пульсационной составляющих

$$u = \bar{u} + u', \quad v = \bar{v} + v', \quad i = \bar{i} + i'$$

и т. д. и провести осреднение по времени. Производя все необходимые преобразования с использованием осредненного уравнения неразрывности [см. уравнение (1.11)] и пренебрегая пульсационными величинами

¹ Строго говоря, следовало бы рассмотреть уравнение энергии для пространственного течения, так как актуальное движение газа трехмерное, однако в случае плоского осредненного движения это не влияет на конечный результат.

нами выше второго порядка, получим

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial I^\circ}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial I^\circ}{\partial x} + v^\circ \frac{\partial I^\circ}{\partial y} \right) &= \frac{1}{2J} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{p}_{xx} + 2\bar{p} + \bar{p}_{yy}) + \frac{1}{2J} \left[\frac{\partial}{\partial x} (3u^\circ \bar{p}_{xx} + \right. \\ &+ 2v^\circ \bar{\tau}_{xy} + u^\circ \bar{p}_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y} (3v^\circ \bar{p}_{yy} + 2u^\circ \bar{\tau}_{xy} + v^\circ \bar{p}_{xx}) \left. \right] - \frac{\partial \bar{q}_x}{\partial x} - \frac{\partial \bar{q}_y}{\partial y} \quad (1.2) \\ u^\circ &= \frac{\bar{\rho} u}{\bar{\rho}} = \bar{u} \left[1 + \frac{\bar{\rho}' u'}{\bar{\rho} u} \right], & v^\circ &= \frac{\bar{\rho} v}{\bar{\rho}} = \bar{v} \left[1 + \frac{\bar{\rho}' v'}{\bar{\rho} v} \right], \\ i^\circ &= \frac{\bar{\rho} i}{\bar{\rho}} = \bar{i} \left[1 + \frac{\bar{\rho}' i'}{\bar{\rho} i} \right], & I^\circ &= i^\circ + \frac{u^{\circ 2} + v^{\circ 2}}{2J} \\ \bar{p}_{xx} &= -\bar{\rho} \overline{u'^2}, & \bar{\tau}_{xy} &= -\bar{\rho} \overline{u'v'}, & \bar{p}_{yy} &= -\bar{\rho} \overline{v'^2} \quad (\text{турбулентные напряжения}) \\ \bar{q}_x &= \bar{\rho} \overline{u'i'}, & \bar{q}_y &= \bar{\rho} \overline{v'i'} \quad (\text{турбулентные потоки тепла}) \end{aligned}$$

Здесь u° , v° , i° — осредненные компоненты скорости и энтальпия в потоке сжимаемого газа, I° — осредненная энтальпия торможения.

Отметим, что при указанном определении осредненных величин u° , v° , i° пульсации плотности не входят в явном виде в уравнение (1.2). Скорости u° , v° являются отношением соответствующего осредненного расхода к средней плотности, энтальпия i° есть отношение теплосодержания единицы объема к средней плотности.

Важным случаем течения реального газа является течение в пограничном слое. Чтобы получить уравнение энергии пограничного слоя, нужно пренебречь в (1.2) величинами порядка v° по сравнению с величинами порядка u° и производными по x по сравнению с производными по y от величин одного порядка (ось x предполагается направленной вдоль контура тела). Кроме того, в уравнении пограничного слоя следует учесть члены, обусловленные молекулярной вязкостью и теплопроводностью, так как они существенны в непосредственной близости от твердой поверхности, где турбулентные пульсации затухают. Имеем

$$\begin{aligned} \bar{\rho} \left(\frac{\partial I^\circ}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial I^\circ}{\partial x} + v^\circ \frac{\partial I^\circ}{\partial y} \right) &= \left(I^\circ = i^\circ + \frac{u^{\circ 2}}{2J} \right) \\ &= \frac{1}{2J} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{p}_{xx} + 2\bar{p} + \bar{p}_{yy}) + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\mu} u \frac{\partial u}{\partial y} + u^\circ \bar{\tau}_{xy} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{\eta} \frac{\partial T}{\partial y} - \bar{q}_y \right) \quad (1.3) \end{aligned}$$

Здесь T — температура, μ — коэффициент вязкости, η — коэффициент теплопроводности. Турбулентное напряжение $\bar{\tau}_{xy}$ и турбулентный поток тепла \bar{q}_y представим по аналогии с соответствующими молекулярными характеристиками в такой форме:

$$\bar{\tau}_{xy} = \varepsilon \frac{\partial u^\circ}{\partial y}, \quad \bar{q}_y = -\eta_t \frac{\partial T^\circ}{\partial y} \quad \left(T^\circ = \frac{\bar{\rho} T}{\bar{\rho}} = \bar{T} \left[1 + \frac{\bar{\rho}' T'}{\bar{\rho} T} \right] \right)$$

где ε и η_t — соответственно коэффициенты турбулентной вязкости и турбулентной теплопроводности. Выписанные соотношения можно рассматривать как определения величин ε и η_t . В выражении для \bar{q}_y использована осредненная температура T° , так как в случае совершенного газа ($c_p = \text{const}$) именно эта величина фигурирует в левой части уравнения (1.3) вместо энтальпии i° (т. е. при $c_p = \text{const}$ $i^\circ = c_p T^\circ$), и ее можно поэтому рассматривать как обобщение понятия осредненной температуры на случай

сжимаемого газа. Дальнейшее упрощение состоит в замене выражений

$$\overline{\mu i \frac{di}{dy}}, \quad \overline{\eta \frac{\partial T}{\partial y}} \quad \text{на} \quad \mu i^\circ \frac{di^\circ}{dy}, \quad \eta \frac{\partial T^\circ}{\partial y}$$

так как в ламинарном подслое вблизи стенки, где эти члены существенны, отсутствуют турбулентные пульсации и поэтому

$$\overline{\mu i \frac{di}{dy}} = \mu i^\circ \frac{di^\circ}{dy} = \mu i \frac{di}{dy}, \quad \overline{\eta \frac{\partial T}{\partial y}} = \eta \frac{\partial T^\circ}{\partial y} = \eta \frac{\partial T}{\partial y}$$

Следует отметить, однако, что в пограничном слое на некотором расстоянии от стенки всегда располагается «переходная» область, в которой коэффициенты молекулярного и турбулентного трений и теплопроводности имеют одинаковый порядок. В этой области рассматриваемое упрощение несправедливо. Поэтому приведенное ниже уравнение энергии, а также уравнение движения, соответствующие общепринятой форме записи (с использованием этого упрощения), предполагают деление пограничного слоя на две области с различным режимом течения — турбулентное ядро и ламинарный подслой. Имеем

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \left(\frac{\partial I^\circ}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial I^\circ}{\partial x} + v^\circ \frac{\partial I^\circ}{\partial y} \right) = \\ & = \frac{1}{2J} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{p}_{xx} + 2\bar{p} + \bar{p}_{yy}) + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\eta + \eta_t) \frac{\partial T^\circ}{\partial y} \right] + \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

Полагая осредненную энтальпию i° функцией осредненных температуры и давления $i^\circ = i^\circ(T^\circ, \bar{p})$, получаем

$$\frac{\partial i^\circ}{\partial y} = \frac{\partial i^\circ}{\partial T^\circ} \frac{\partial T^\circ}{\partial y} + \frac{\partial i^\circ}{\partial \bar{p}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}$$

Определяя осредненную удельную теплоемкость c_p° соотношением $c_p^\circ = \partial i^\circ(T^\circ, \bar{p}) / \partial T^\circ$ и учитывая, что в пограничном слое $\partial \bar{p} / \partial y = 0$, получим формулу, которая в общем случае справедлива лишь для совершенного газа:

$$\frac{\partial i^\circ}{\partial y} = c_p^\circ \frac{\partial T^\circ}{\partial y} \quad (1.4)$$

Используя (1.4) и вводя молекулярное число Прандтля $P = \mu c_p / \eta$ и число Прандтля турбулентного перемешивания $P_t = \varepsilon c_p^\circ / \eta_t$, получим уравнение энергии для турбулентного пограничного слоя

$$\begin{aligned} & \bar{\rho} \left(\frac{\partial I^\circ}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial I^\circ}{\partial x} + v^\circ \frac{\partial I^\circ}{\partial y} \right) = \frac{1}{2J} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{p}_{xx} + 2\bar{p} + \bar{p}_{yy}) + \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial I^\circ}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{P} - 1 \right) \mu \frac{\partial i^\circ}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{P_t} - 1 \right) \varepsilon \frac{\partial i^\circ}{\partial y} \right] \quad (1.5) \end{aligned}$$

Отметим, что (1.5) отличается от уравнения энергии для совершенного газа лишь тем, что в нем вместо осредненной температуры фигурирует осредненная энтальпия. Уравнение энергии для ламинарного пограничного слоя является частным случаем (1.5). Рассмотрим далее уравнение состояния; при давлениях, достаточно далеких от критического, его можно представить в виде (для актуальных величин):

$$p m = K \rho T \quad (1.6)$$

где m — молекулярный вес газа, K — универсальная газовая постоянная.

Осредняя по времени обе части (1.6), получим

$$\bar{p}m^\circ = K\bar{\rho}T^\circ \quad \left(m^\circ = \frac{\bar{p}m}{\bar{p}} = \bar{m} \left[1 + \frac{\bar{p}'m'}{\bar{p}m} \right] \right) \quad (1.7)$$

Таким образом, при соответствующем определении осредненного молекулярного веса можно добиться того, что уравнение состояния, связывающее осредненные давление, плотность и температуру, входящие в (1.5), сохраняет обычный вид.

Молекулярный вес газовой смеси (например, диссоциирующего воздуха) связан с молекулярными весами отдельных компонентов m_k известной формулой

$$m = \left(\sum \frac{M_k}{m_k} \right)^{-1} \quad (1.8)$$

где M_k — массовая доля k -го компонента в смеси. Осредняя по времени обе части (1.8), получим

$$\bar{m} = \overline{\left(\sum \frac{M_k}{m_k} \right)^{-1}} \quad (1.9)$$

Сравнивая выражение (1.7) для m° с выражением (1.9), видим, что зависимость осредненного молекулярного веса m° от величин m_k в турбулентном потоке отличается от соответствующей зависимости в статических условиях. Ее конкретный вид может быть установлен только при помощи соотношений теории турбулентности, связывающих осредненные величины со средними значениями пульсационных величин, т. е. зависит от характеристик течения. То же самое относится и к связи между осредненной энтальпией i° и температурой T° . При определении значений этих величин в турбулентном пограничном слое диссоциирующего воздуха нельзя, вообще говоря, пользоваться таблицами, составленными в предположении равновесной диссоциации и не учитывающими особенностей движения газа.

Уравнения движения и неразрывности не меняют своего вида при переходе от совершенного газа к несовершенному. Они приводятся ниже:

$$\bar{\rho} \left(\frac{\partial u^\circ}{\partial t} + u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial x} + v^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial y} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left[(\mu + \varepsilon) \frac{\partial u^\circ}{\partial y} \right] \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho}u^\circ) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho}v^\circ) = 0 \quad (1.11)$$

Из сказанного ясно, что система уравнений турбулентного пограничного слоя несовершенного газа является более сложной по сравнению с соответствующей системой при $c_p = \text{const}$ и $m = \text{const}$ и содержит большее число неизвестных.

Сднако соотношения, справедливые для совершенного газа и вытекающие только из уравнений энергии, движения и неразрывности, могут быть легко обобщены на случай несовершенного газа путем формальной замены в них температуры энтальпией. Ниже приводятся примеры таких соотношений.

§ 2. Интегралы уравнения энергии. Связь между теплопередачей и трением. В дальнейшем для упрощения обозначений будем опускать значки осреднения. Индекс w обозначает значение величин на стенке, ∞ — значение величин вне пограничного слоя.

При стационарном осредненном движении $P = P_t = 1$, отсутствии теплообмена между телом и газом

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = \left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_w = \left(\frac{\partial I}{\partial y}\right)_w = 0$$

и произвольном распределении давления по контуру тела получаем на основании (1.5)

$$I = \text{const} = I_\infty \quad (2.1)$$

Температура поверхности тела при этом, вообще говоря, не остается постоянной, хотя $i_w = \text{const}$, а меняется при изменении давления в соответствии с видом зависимости $i(T, p)$. В случае диссоциированного воздуха, который приближенно удовлетворяет условиям рассматриваемой задачи, температура стенки T_w оказывается более низкой по сравнению с теми значениями, которые получаются в предположении, что воздух при любых температурах остается совершенным газом с удельной теплоемкостью $c_p = 0.24$ ккал/кг град. Для иллюстрации на фигуре приведена зависимость энтальпии воздуха

i от его температуры $T^\circ \text{K}$ и давления (p в атм), построенная в предположении равновесной диссоциации [1]. Там же нанесена зависимость $i = c_p T$ для совершенного газа при $c_p = 0.24$ ккал/кг град.

Рассмотрим далее формулу гидродинамической аналогии теплопередачи (аналогии Рейнольдса). В случае стационарного осредненного движения при $p = \text{const}$, $P = P_t = 1$ и $T_w = \text{const}$ из (1.5), (1.10) и граничных условий

$$u = 0 \text{ при } y = 0, \quad u \rightarrow U \text{ при } y \rightarrow \infty$$

получается линейная зависимость между скоростью и энтальпией торможения:

$$\frac{I - I_w}{I_\infty - I_w} = \frac{u}{U} \quad (2.2)$$

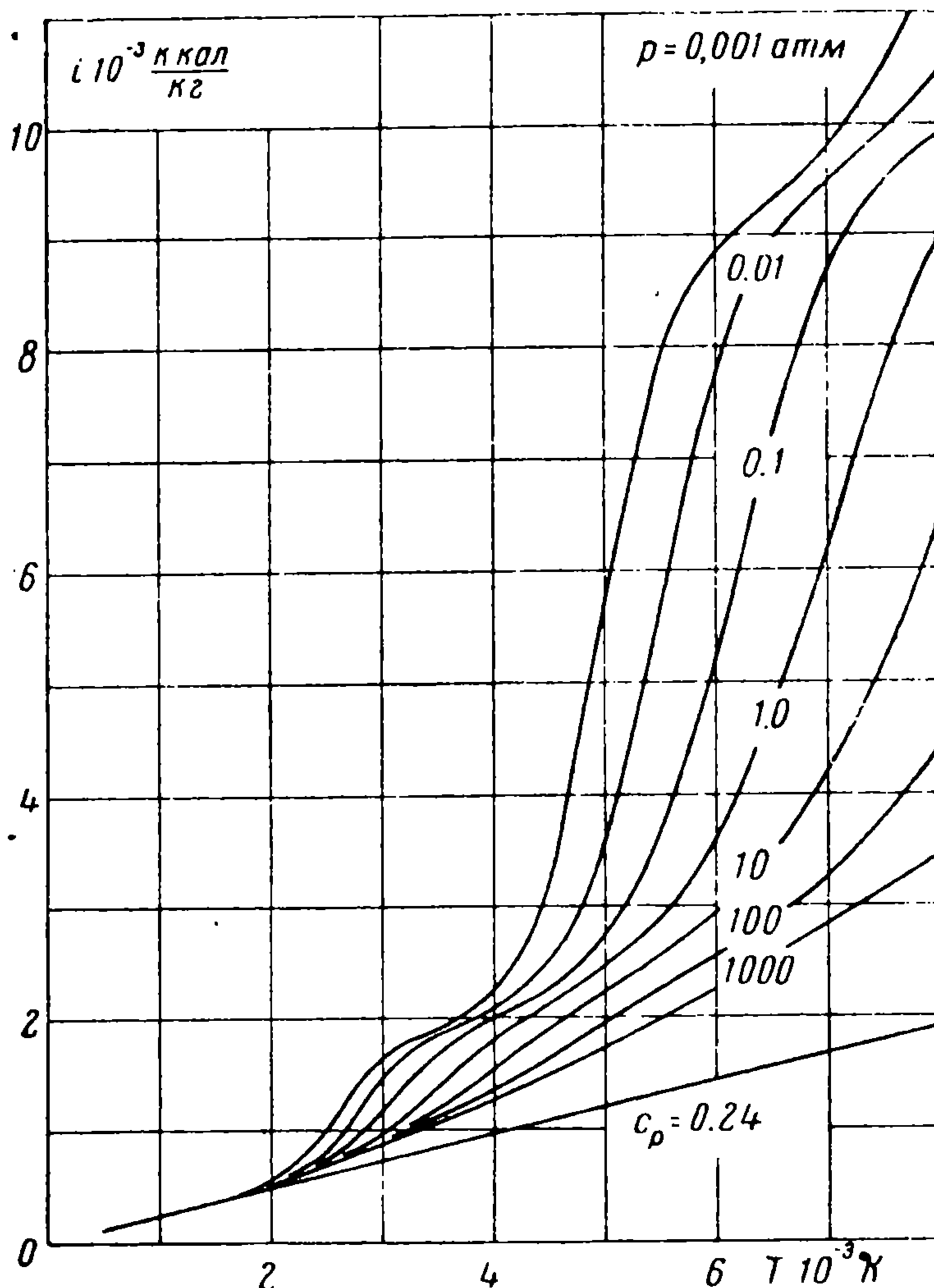
Из формулы (2.2) вытекает известная связь между числом Нуссельта N_w , числом Рейнольдса R_w и коэффициентом трения c_f :

$$N_w = \frac{1}{2} R_w c_f$$

Здесь (L — характерный линейный размер)

$$N_w = \frac{Q_w L}{\eta_w (I_w - I_\infty)}, \quad Q_w = -\eta_w \left(\frac{\partial i}{\partial y}\right)_w, \quad R_w = \frac{\rho_\infty U L}{\mu_w}, \quad c_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty U^2}$$

Вводя в выражение числа Нуссельта поток тепла $\bar{q}_w = -\eta_w (\partial T / \partial y)_w$ при помощи соотношения (1.4) и значения коэффициента теплопровод-



ности и удельной теплоёмкости в невозмущенном потоке η_{∞} и $c_{p\infty}$, получим

$$N_w = N \frac{P_w}{P_{\infty}} \frac{\mu_{\infty}}{\mu_w} \quad \left(N = \frac{q_w c_{p\infty} L}{\eta_{\infty} (I_w - I_{\infty})} \right) \quad (2.3)$$

Число Рейнольдса R_w представим в таком виде:

$$R_w = R \frac{\mu_{\infty}}{\mu_w} \quad \left(R = \frac{\rho_{\infty} U L}{\mu_{\infty}} \right)$$

В данном случае предполагается $P = P_t = 1$, поэтому

$$N = \frac{1}{2} R c_f \quad (2.4)$$

Таким образом, формула аналогии Рейнольдса сохраняет в случае несовершенного газа обычный вид, если число Нуссельта N определяется соотношением (2.3). Аналогичное обобщение допускают также некоторые приближенные зависимости, основанные на использовании только уравнений движения, неразрывности и энергии.

Приближенная связь между температурой торможения и скоростью в стационарном турбулентном пограничном слое пластины при $P \neq P_t \neq 1$, $\rho = \text{const}$ и $T_w = \text{const}$ может быть представлена:

в турбулентном ядре пограничного слоя

$$I - I_{\infty} = \frac{q_w P_t U}{\tau_w} (1 - \bar{u}) - \frac{U^2}{2J} (1 - P_t) [(1 - \bar{u}^2) - A (1 - \bar{u}^4)]$$

в ламинарном подслое

$$I = I_w - \frac{q_w P U}{\tau_w} \bar{u} + \frac{U^2}{2J} (1 - P) (\bar{u}^2 - A \bar{u}^4)$$

Здесь

$$\bar{u} = \frac{u}{U}, \quad A = \int_0^{\infty} \frac{\rho}{\rho_{\infty}} \bar{u} (1 - \bar{u}^2) dy / \int_0^{\infty} \frac{\rho}{\rho_{\infty}} \bar{u} (1 - \bar{u}^4) dy$$

В случае турбулентного пограничного слоя $\bar{u} \approx y^{\frac{1}{n}}$, где $n = 7 \div 8$, вычисления дают $A = 0.59 \div 0.60$. В приведенных формулах слагаемые, пропорциональные \bar{u} , \bar{u}^2 , \bar{u}^3 , представляют собой первые члены разложения функции $I(\bar{u})$ вблизи стенки; коэффициент при \bar{u}^4 выбран так, что профиль энтальпии торможения в целом при $q_w = 0$ удовлетворяет интегральному соотношению энергии

$$\int_0^{\infty} \frac{\rho}{\rho_{\infty}} \bar{u} \left(1 - \frac{I}{I_{\infty}} \right) dy = 0$$

Применение выписанных соотношений на границе ламинарного подслоя приводит к следующей зависимости

$$N = \frac{1}{2} R c_f \left[\frac{P_t}{P} + \bar{u}_{\wedge} \left(1 - \frac{P_t}{P} \right) \right]^{-1} \quad \left(N = \frac{q_w c_{p\infty} L}{\eta_w [I_w - I_{w0}]} \right) \quad (2.5)$$

Здесь I_{w0} — энтальпия газа у стенки при отсутствии теплообмена между стенкой и газом; $\bar{u}_{\wedge} = u_{\wedge} / U$ — отношение скорости на границе ламинарного подслоя к скорости невозмущенного потока; эта величина согласно полуэмпирической теории турбулентности связана с коэффици-

ентом трения:

$$\bar{u}_\wedge = \frac{\alpha}{\sqrt{P}} \sqrt{\frac{c_f}{2} \frac{\rho_\infty}{\rho_w}}$$

причем α — эмпирическая константа ламинарного подслоя (эксперименты, проведенные с несжимаемой жидкостью, дают значение $\alpha = 11.5$).

Величина I_{w0} при $P \neq 1$ и $P_t \neq 1$ не совпадает с энтальпией торможения невозмущенного потока. Это отличие определяется значением «коэффициента восстановления энтальпии»

$$\vartheta \equiv \frac{I_{w0} - i_\infty}{I_\infty - i_\infty} = 1 - \{(1 - P_t)[(1 - \bar{u}_\wedge^2) - A(1 - \bar{u}_\wedge^4)] + (1 - P)(\bar{u}_\wedge^2 - A\bar{u}_\wedge^4)\} \quad (2.6)$$

Отметим, что при $P = P_t \neq 1$ в формулах (2.5) и (2.6) не фигурирует скорость на границе ламинарного подслоя. В этом случае

$$N = \frac{1}{2} Rc_f, \quad \vartheta = 1 - (1 - P)(1 - A) \quad (2.7)$$

Формула (2.7) для N отличается от (2.4) лишь тем, что величина I_{w0} , входящая в число Нуссельта, не равна I_∞ .

Соотношения (2.5) и (2.6) получены в предположении, что числа P и P_t являются константами. В случае диссоциирующего газа (например, воздуха) число Прандтля P зависит от степени диссоциации газа, т. е. от его температуры. Однако в пределах ламинарного подслоя, где существенно значение параметра P , температура изменяется мало. Что касается числа Прандтля турбулентного перемешивания P_t , то оно, как и другие характеристики турбулентности, не зависит, по-видимому, от химической природы газа или жидкости и может поэтому приниматься таким же, как и в случае совершенного газа. Следует отметить, что в настоящее время сведения о числе Прандтля турбулентного перемешивания являются далеко не полными. Прандтль [2] приводит значение для параметра $P_t \approx 0.7$, т. е. в случае воздуха $P \approx P_t$.

Формула (2.5) с учетом различия значений параметра P у стенки (в ламинарном подслое) и в невозмущенном потоке записывается в виде:

$$N = \frac{1}{2} Rc_f \left[\frac{P_t}{P_\infty} + \bar{u}_\wedge \left(\frac{P_w}{P_\infty} - \frac{P_t}{P_\infty} \right) \right]^{-1} \quad (2.8)$$

Из приведенных данных видно, что при рассмотрении вопросов теплообмена между стенкой и потоком несовершенного газа удобнее пользоваться обобщенным числом Нуссельта N [см. (2.5)] вместо обычного

$$N = \frac{q_w L}{\eta_\infty (T_w - T_{w0})}$$

так как при этом некоторые соотношения, вытекающие из уравнений движения, неразрывности и энергии, не меняют своего вида. Понятие коэффициента восстановления температуры при отсутствии теплообмена между телом и газом целесообразно заменить «коэффициентом восстановления энтальпии». Эти обстоятельства следует иметь в виду при обработке экспериментальных данных.

Поступила 6 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Таблицы термодинамических функций воздуха. Изд-во АН СССР, 1957.
2. П р а н д т л ь Л. Гидроаэромеханика. Изд-во иностр. лит-ры, М., 1949.