Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ВАРИАЦИОННЫХ ПРИНЦИПОВ МЕХАНИКИ В ЗАДАЧАХ КОЛЕБАНИЙ

Г. Ю. Джанелидзе, А. И. Лурье

(Ленинград)

Вариационные принципы механики в период своего возникновения были сформулированы как требования минимальности или максимальности тех или иных функционалов, определенных интегралами.

Вопрос о характере экстремума этих интегралов или даже об его наличии несуществен для вывода уравнений движения механических систем, который проводится путем приравнивания нулю первой вариации функционала. Поэтому неудивительно, что наряду с действительно вариационными принципами механики, такими, как принцип Гамильтона для консервативной системы, подчиненной голономным связям, были установлены и интегральные принципы, сформулированные при помощи интегралов от выражений, содержащих вариации, но не допускающих по своей структуре приведения к задаче вариационного исчисления; к их числу, например, относится принцип Гамильтона — Остроградского для неконсервативных систем.

В результате вопрос о характере экстремума в действительно вариационных принципах отошел на задний план и установление того факта, что в принципах Гамильтона — Остроградского и Мопертюи речь идет о минимуме лишь для достаточно малых промежутков времени, не затронуло основных практических приложений вариационных принципов.

В настоящее время соответствующие теоремы, относящиеся к теории кинетических фокусов [1], почти не упоминаются ни в учебной, ни в научной литературе по механике.

Можно, однако, указать проблемы, в которых использование минимальных свойств действия по Гамильтону без учета результатов теории кинетических фокусов приводит к ошибочным высказываниям.

К их числу относятся, например, некоторые задачи теории колебаний, сводящиеся к определению собственных значений и собственных функций.

В книге [2] и статье [3] сделана естественная попытка установления экстремальных свойств частот и форм в задачах о колебаниях механических систем на основе экстремальных свойств действия по Гамильтону.

Пренебрежение теорией кинетических фокусов привело К. Бицено и Р. Граммеля [2] к необходимости искажения формулировки принципа (введение $L = \Pi - T$ вместо $L = T - \Pi$), а Т. Пёшля [3] к противоречиям в рассуждениях (замена минимума на максимум), возникающим после исправления указанной им самим ошибки [4].

Ниже дается рассмотрение вопроса о возможности использования вариационных и интегральных принципов для определения частот и форм колебаний упругих систем и показывается, что принцип Гамильтона — Остроградского при видоизменении формулировки позволяет привести задачу к разысканию стационарных значений некоторого функционала, но не допускает суждений о характере его экстремума.

Последние должны делаться на основании самостоятельного исследования, не связанного с вариационными и интегральными принципами механики.

1. Рассматривается материальная система, находящаяся под действием консервативных сил; предполагается, что связи стационарны и голономны. Через q_s и p_s обозначаются обобщенные координаты и импульсы; H — выраженная через эти переменные функция Гамильтона. При переходе к бесконечно близкому движению, в котором координаты и импульсы будут $q_s + x_s$ и $p_s + u_s$, ее приращение ΔH равно

$$\Delta H = \delta H + \delta^2 H + \ldots = \sum_{s=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_s} x_s + \frac{\partial H}{\partial p_s} u_s\right) + \\ + \Omega (x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_n) + \ldots \tag{1.1}$$

Здесь Ω обозначает однородную квадратичную форму:

$$\Omega = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial q_k} x_s x_k + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p_k} x_s u_k + \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} u_s u_k\right) \tag{1,2}$$

Входящая в ее состав квадратичная форма

$$\delta^2 T' = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_s \partial p_k} u_s u_k \tag{1.3}$$

является союзной с квадратичной формой

$$\delta^2 T = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_s \partial \dot{q}_k} \dot{x}_s \dot{x}_k \tag{1.4}$$

где T — кинетическая энергия системы. Поэтому форма (1.3) — знакоопределенная положительная. Система линейных уравнений в вариациях для канонической системы уравнений движения

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.5}$$

может быть также записана в канонической форме:

$$\dot{x}_s = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial p_s} x_k + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_s} u_k\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial u_s}$$
$$\dot{u}_s = -\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_k \partial q_s} x_k + \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial q_s} u_k\right) = -\frac{\partial \Omega}{\partial x_s} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{1.6}$$

Если предположить, что известен интеграл Коши системы (1.5)

$$q_s = q_s (t - t_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n), \quad p_s = p_s (t - t_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) \tag{1.7}$$

где α_k и β_k — начальные значения координат и импульсов, то функции времени

$$\xi_s^{(m)} = \frac{\partial q_s}{\partial \alpha_m}, \quad \eta_s^{(m)} = \frac{\partial q_s}{\partial \beta_m}, \quad \zeta_s^{(m)} = \frac{\partial p_s}{\partial \alpha_m}, \quad \vartheta_s^{(m)} = \frac{\partial p_s}{\partial \beta_m} \tag{1.8}$$
$$(s, m = 1, 2, \ldots, n)$$

дают, как известно, систему частных решений уравнений в вариациях (1.6). Их линейная независимость является следствием равенства

$$D\left(\frac{q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n}{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n}\right) = 1 \tag{1.9}$$

выражающего неизменность элемента объема фазового пространства (теорема Лиувилля).

Поскольку соотношения (1.7) представляют интеграл Коши системы (1.5), то имеют место равенства

$$\xi_s^{(m)}(t_0) = \vartheta_s^{(m)}(t_0) = \delta_{sm}, \qquad \eta_s^{(m)}(t_0) = \zeta_s^{(m)}(t_0) = 0 \tag{1.10}$$

где δ_{sm} — символы Кронекера. Поэтому интеграл Коши системы уравнений в вариациях (1.6) будет

$$\begin{aligned} x_s(t) &= \sum_{m=1}^{n} [x_m(t_0)\xi_s^{(m)}(t) + u_m(t_0)\eta_s^{(m)}(t)] \\ u_s(t) &= \sum_{m=1}^{n} [x_m(t_0)\zeta_s^{(m)}(t) + u_m(t_0)\vartheta_s^{(m)}(t)] \end{aligned} \tag{1.11}$$

2. Движение системы, определяемое равенствами (1.7), будем называть ее прямым путем C_0; через $q_s + \delta q_s$, $p_s + \delta p_s$ обозначим значения обобщенных координат и импульсов на окольных путях; предполагается, что последние пересекают прямой путь в моменты t_0 и t_1; тогда

$$\delta q_s(t_0) = 0, \qquad \delta q_s(t_1) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.1}$$

Выражение кинетического потенциала L на окольном пути записывается в виде

$$L = \sum_{s=1}^{n} (p_s + \delta p_s)(\dot{q}_s + \delta\dot{q}_s) - H(q_s + \delta q_s, \; p_s + \delta p_s) = L_0 + \delta L + \delta^2 L + \ldots \tag{2.2}$$

причем L_0 — значение L на прямом пути. Вторая вариация $\delta^2 L$, если сохранить обозначение (1.1), будет

$$\begin{aligned} \delta^2 L &= \sum_{s=1}^{n} \delta\dot{q}_s \delta p_s - \Omega(\delta q_1, \ldots, \delta q_n, \delta p_1, \ldots, \delta p_n) = \\ &= \sum_{s=1}^{n} \left[\delta\dot{q}_s\delta p_s - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\delta q_s}\delta q_s + \frac{\partial\Omega}{\partial\delta p_s}\delta p_s\right)\right] = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\left[\delta p_s\left(\delta\dot{q}_s - \frac{\partial\Omega}{\partial\delta p_s}\right) - \right. \\ &\qquad \left. - \delta q_s\left(\delta\dot{p}_s + \frac{\partial\Omega}{\partial\delta q_s}\right)\right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n}\delta q_s\delta p_s \end{aligned} \tag{2.3}$$

Известно, что первая вариация δS действия по Гамильтону

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt \tag{2.4}$$

для окольного пути, удовлетворяющего условию (2.1), равна нулю. Поэтому вторую вариацию $\delta^2 S$, основываясь на (2.3) и (2.1), можно записать в виде

$$\delta^2 S = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\sum_{s=1}^{n}\left[\delta p_s\left(\delta\dot{q}_s - \frac{\partial\Omega}{\partial\delta p_s}\right) - \delta q_s\left(\delta\dot{p}_s + \frac{\partial\Omega}{\partial\delta q_s}\right)\right]dt \tag{2.5}$$

Она обратится в нуль, если δq_s и δp_s будут решениями системы дифференциальных уравнений

$$\delta\dot{q}_s = \frac{\partial\Omega}{\partial\delta p_s}, \qquad \delta\dot{p}_s = -\frac{\partial\Omega}{\partial\delta q_s} \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.6}$$

Но это те же дифференциальные уравнения (1.6), которые определяют движения по прямым путям, бесконечно близким к прямому пути C_0. Поэтому из первой группы условий (2.1) и равенств (1.11) имеем

$$\delta q_s = \sum_{m=1}^{n} u_m(t_0)\,\eta_s^{(m)}(t), \qquad \delta p_s = \sum_{m=1}^{n} u_m(t_0)\,\vartheta_s^{(m)}(t) \tag{2.7}$$

Вторая группа условий (2.1) приводит к системе линейных однородных уравнений для определения постоянных $u_m(t_0)$:

$$\sum_{m=1}^{n} u_m(t_0)\,\eta_s^{(m)}(t_1) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{2.8}$$

Таким образом, в рассмотрение должен быть введен определитель

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)}(t) & \ldots & \eta_1^{(n)}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \eta_n^{(1)}(t) & \ldots & \eta_n^{(n)}(t) \end{vmatrix} \tag{2.9}$$

Из (1.10) следует, что $\Delta(t_0) = 0$. Пусть при возрастании t найдется такое значение t_1^*, при котором снова $\Delta(t)$ станет нулем:

$$\Delta(t_1^*) = 0 \tag{2.10}$$

Тогда система уравнений (2.8) будет иметь нетривиальное решение. Существует пучок путей, исходящих из начального положения $q_s(t_0)$ на прямом пути C_0 и пересекающих последний в положении $q_s(t_1^*)$. На всех этих путях, которые надо считать прямыми, действия по Гамильтону, вычисленные с точностью до членов второго порядка малости включительно, равны друг другу (так как $\delta^2 S = 0$). Положения $q_s(t_0)$ и $q_s(t_1^*)$ представляют соответственные кинетические фокусы единовременных путей [1]. Предполагается, что t_1^* — первое значение $t > t_0$, обращающее определитель (2.9) в нуль, так что

$$\Delta(t) \neq 0 \qquad (t_0 < t < t_1^*) \tag{2.11}$$

Это условие вместе с условием положительной знакоопределенности квадратичной формы (1.3)

$$\delta^2 T' = \delta^2 T > 0 \tag{2.12}$$

гарантирует положительность второй вариации $\delta^2 S$ для любого окольного пути, выходящего из начального положения $q_s(t_0)$. Поэтому при условиях (2.11) и (2.12) действие по Гамильтону будет минимумом на прямом пути C_0. Для доказательства $\delta^2 L$ выражают через вариации обобщенных координат и обобщенных скоростей и рассматривают интеграл

$$\delta^2 S = \int_{t_0}^{t_1} \delta^2 L\,dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta^2 L + \frac{d}{dt} \sum_{s=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_{sk}\,\delta q_s\,\delta q_k\right] dt \tag{2.13}$$

где $t_1 < t_1^*$. Тогда оказывается возможным при указанных условиях так определить непрерывные функции $\lambda_{sk}(t)$, чтобы квадратичная форма под знаком интеграла (2.13) оказалась положительной знакоопределенной. Для $n = 2$ это доказательство приведено в [5] и [6], общий случай рассмотрен в [7].

На прямом пути C_0, когда условие (2.11) не соблюдено, т. е. когда конечное положение $q_s(t_1)$ достигается после прохождения кинетического фокуса $q_s(t_1^*)$, действие по Гамильтону не будет минимально, так как оказывается возможным построить окольные пути, на которых действие меньше [8].

3. Простейшим является пример малых колебаний консервативной системы около положения равновесия. Записывая выражения кинетической и потенциальной энергии в главных координатах

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \dot{q}_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} p_k^2, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \omega_k^2 q_k^2$$

где ω_k — частоты главных колебаний, имеем

$$q_s = \alpha_s \cos\omega_s t + \frac{\beta_s}{\omega_s}\sin\omega_s t, \qquad p_s = -\omega_s\alpha_s\sin\omega_s t + \beta_s\cos\omega_s t \tag{3.1}$$

По (2.9) получаем

$$\Delta(t) = \frac{1}{\omega_1\omega_2\ldots\omega_n}\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t\ldots\sin\omega_n t \tag{3.2}$$

и ближайший кинетический фокус достигается в момент времени

$$t_1^* = \pi/\omega_n \tag{3.3}$$

где ω_n — наибольшая частота. Положение этого фокуса определяется обобщенными координатами

$$q_s(t_1^*) = \alpha_s\cos\frac{\pi\omega_s}{\omega_n} + \frac{\beta_s}{\omega_s}\sin\frac{\pi\omega_s}{\omega_n} \quad (s = 1, \ldots, n-1), \qquad q_n(t_1^*) = -\alpha_n \tag{3.4}$$

Действие по Гамильтону (2.4) будет минимальным на прямом пути (3.1) лишь при $0 < t_1 < t_1^*$. Промежуток времени t_1^* оказывается равным полупериоду главного колебания наибольшей частоты. Поэтому для распределенных упругих систем вариационный принцип Гамильтона сохраняет значение как утверждение стационарности, но отнюдь не минимальности действия по Гамильтону.

4. Сначала разберем обычную схему обоснования при помощи принципа Гамильтона — Остроградского приближенных методов определения частот и форм свободных колебаний упругих систем [2].

Ограничимся рассмотрением системы, имеющей конечное число степеней свободы. В этом случае кинетическая энергия и потенциальная энергия представляются квадратичными формами с постоянными коэффициентами

$$T = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{sk}\dot{q}_s\dot{q}_k, \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} c_{sk}q_s q_k \tag{4.1}$$

В качестве прямого пути зададим движение

$$q_s = C_s\sin\omega t \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.2}$$

причем будем полагать, что варьируются коэффициенты C_s, а величину ω будем считать заданной.

Так как вариации должны исчезать в начальный и конечный моменты времени t_0 и t_1, то надо выбрать два момента, когда $\delta q_s = \delta C_s \sin \omega t$ обращается в нуль, т. е., например, положить $t_0 = 0$ и $t_1 = 2\pi/\omega$.

Тогда на основании принципа Гамильтона — Остроградского

$$\delta S = \delta \int\limits_0^{2\pi/\omega} (T - \Pi)\, dt = 0 \tag{4.3}$$

В силу очевидных соотношений

$$\int\limits_0^{2\pi/\omega} \sin^2 \omega t\, dt = \int\limits_0^{2\pi/\omega} \cos^2 \omega t\, dt = \frac{\pi}{\omega}$$

находим

$$\delta S = \frac{\pi}{\omega}\, \delta (\omega^2 \Gamma - U) = 0 \tag{4.4}$$

где Γ и U — квадратичные формы, получающиеся из T и Π при замене их аргументов $\dot{q}_s$ и q_s на C_s.

Иногда [3,4] также утверждается, что на основании принципа Гамильтона — Остроградского величина $\omega^2 \Gamma - U$ должна иметь минимальное значение.

В этом рассуждении имеются следующие неясности и противоречия: 1) величина ω считается заданной и не варьируется и затем делаются выводы об экстремальных свойствах ω; 2) интегрирование по времени производится без учета прохождения на прямом пути ряда кинетических фокусов, что делает невозможным заключение о наличии минимума.

Для систем с распределенными постоянными, которые обладают сколь угодно высокими собственными частотами, аналогичное рассуждение, как указывалось выше, тем более неприменимо.

Таким образом, из принципа Гамильтона — Остроградского нельзя получить обоснование соотношения (4.4) как вариационного принципа для частот и форм.

Покажем, что интегральный принцип, выражаемый соотношением

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \delta L dt = 0 \tag{4.5}$$

и вытекающий непосредственно из общего уравнения динамики, позволяет обосновать выражение (4.4) как вариационный принцип для собственных значений. При фиксированных значениях t_0 и t_1 форма записи (4.5), конечно, эквивалентна форме (4.3). Если же t_0 и t_1 зависят от варьируемых величин, то

$$\delta S = \int\limits_{t_0}^{t_1} \delta L dt + (L)_{t=t_1} \delta t_1 - (L)_{t=t_0} \delta t_0 \tag{4.6}$$

где δt_0 и δt_1 — вариации пределов интегрирования. Тогда (4.5) принимает вид [8,9]:

$$\delta S + (L)_{t=t_0} \delta t_0 - (L)_{t=t_1} \delta t_1 = 0 \tag{4.7}$$

Зададим теперь окольный путь в форме

$$q_s'(t) = C_s' \sin (\omega' t + \alpha') \tag{4.8}$$

причем будем предполагать, что величины C_s', ω' и α' бесконечно мало отличаются от величин C_s, ω и α, соответствующих прямому пути

$$q_s(t) = C_s \sin(\omega t + \alpha) \tag{4.9}$$

Тогда

$$q_s'(t) = q_s(t) + \delta C_s \sin(\omega t + \alpha) + \delta\alpha C_s \cos(\omega t + \alpha) + C_s t\, \delta\omega \cos(\omega t + \alpha) + \ldots \tag{4.10}$$

Положим теперь, что пределы интегрирования отстоят на один период, т. е. $t_1 = t_0 + 2\pi/\omega$ и

$$\delta t_1 = \delta t_0 - \frac{2\pi}{\omega^2}\delta\omega \tag{4.11}$$

Подставляя в (4.5) значение

$$\delta L = \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial L}{\partial q_s}\delta q_s + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\delta \dot{q}_s\right)$$

и производя интегрирование по частям, имеем (4.12)

$$\sum_{s=1}^{n}\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right]\delta q_s\, dt + \sum_{s=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)_{t=t_1}\delta q_s(t_1) - \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\right)_{t=t_0}\delta q_s(t_0)\right] = 0$$

Если, как в нашем случае, $\partial L/\partial \dot{q}_s$ — периодическая функция, то для получения из (4.12) уравнений движения можно ограничиться выполнением условия

$$\delta q_s(t_1) - \delta q_s(t_0) = 0 \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{4.13}$$

не обращая раздельно в нуль вариации на концах.

В силу периодичности L интегральный принцип (4.7) представляется в форме

$$\delta S + (L)_{t=t_0}\frac{2\pi}{\omega^2}\delta\omega = 0 \tag{4.14}$$

Из (4.10) имеем

$$\delta q_s(t_1) = \delta C_s \sin(\omega t_0 + \alpha) + C_s\delta\alpha \cos(\omega t_0 + \alpha) + C_s t_1 \delta\omega \cos(\omega t_0 + \alpha)$$
$$\delta q_s(t_0) = \delta C_s \sin(\omega t_0 + \alpha) + C_s\delta\alpha \cos(\omega t_0 + \alpha) + C_s t_0 \delta\omega \cos(\omega t_0 + \alpha)$$

и поскольку $t_1 - t_0 \neq 0$, то для выполнения условий (4.13) на окольных путях надо принять

$$\omega t_0 + \alpha = \frac{1}{2}\pi \tag{4.15}$$

Выражение L при подстановке в него значений (4.9) обобщенных координат примет вид:

$$L = \omega^2\Gamma\cos^2(\omega t + \alpha) - U\sin^2(\omega t + \alpha) \tag{4.16}$$

где Γ и U имеют те же значения, что и в формуле (4.4). Тогда

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \frac{\pi}{\omega}(\omega^2\Gamma - U) \tag{4.17}$$

и далее

$$\delta S = \pi\left(\Gamma + \frac{U}{\omega^2}\right)\delta\omega + \frac{\pi}{\omega}(\omega^2\delta\Gamma - \delta U) \tag{4.18}$$

Замечая еще, что по (4.14) и (4.15)

$$(L)_{t=t_0}\frac{2\pi}{\omega^2}\,\delta\omega = -U\frac{2\pi}{\omega^2}\,\delta\omega \tag{4.19}$$

запишем теперь соотношение (4.18) в виде

$$\left(\Gamma - \frac{U}{\omega^2}\right)\delta\omega + \frac{1}{\omega}\left(\omega^2\delta\Gamma - \delta U\right) = 0 \tag{4.20}$$

Для прямого пути по закону сохранения энергии максимальное значение кинетической энергии $\omega^2\Gamma$ равно максимальному значению потенциальной энергии U:

$$\omega^2\Gamma = U \tag{4.21}$$

так что соотношение (4.20) оказывается возможным представить в виде

$$\omega^2\delta\Gamma - \delta U = 0 \tag{4.22}$$

Поэтому, если ввести в рассмотрение величину

$$R = \frac{1}{\pi}\,\omega S = \omega^2\Gamma - U \tag{4.23}$$

то ее вариация $\delta' R$, вычисленная при фиксированном ω, будет равна нулю:

$$\delta' R = \omega^2\delta\Gamma - \delta U = 0 \tag{4.24}$$

Заметим, что (4.24) является условием стационарности функционала $-U$ при наличии дополнительного требования $\Gamma = 1$; тогда ω^2 играет роль множителя Лагранжа. Такой подход к функционалу (4.23), характерный для задач об определении собственных значений, позволяет понять причину исчезновения члена с $\delta\omega$ в предшествующих выкладках.

Условие (4.24) может быть использовано для получения уравнений, позволяющих приближенно определить частоты и формы колебаний; однако для суждения об экстремальных свойствах частот и форм требуется привлечение дополнительных соображений, не связанных с вариационными и интегральными принципами механики.

Поступила 20 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Бобылев Д. К. О начале Гамильтона или Остроградского и о начале наименьшего действия Лагранжа. Приложение к т. LXI Записок Академии наук, 1889.
2. Бицено К., Граммель Р. Техническая динамика, 1950, ГТТИ, т. I, стр. 122 и 249—251.
3. Pöschl Th. Über die angenäherte Berechnung der Schwingzahlen von Rahmenträgern. Ing. Archiv, 1930, Bd. I, H. 4, S. 469—480.
4. Pöschl Th. Berichtigung. Ing. Archiv, 1931, Bd. II, S. 245.
5. Гюнтер Н. М. Курс вариационного исчисления. М., Гостехтеоретиздат, 1941.
6. Гурса Э. Курс математического анализа. ОНТИ, 1934, т. III, ч. 2, стр. 248—252.
7. Jordan C. Cours d'analyse de l'École Polytechnique, t. III, pp. 504—522. Paris, Gauthier-Villars, 1887.
8. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика, стр. 281—283 и 275—277. ОНТИ, 1937.
9. Лойцянский Л. Г., Лурье А. И. Курс теоретической механики, Гостехиздат, 1955, т. 2.