**Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960**
**Отделение технических наук Академии наук Союза ССР**

# ОБ ОПТИМАЛЬНОМ РЕГУЛИРОВАНИИ ПРИ СЛУЧАЙНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

**Н. Н. Красовский**

(Свердловск)

Рассматривается задача оптимального регулирования при условии минимума ожидаемого времени затухания переходного процесса. Описывается приложение к этой задаче метода функций Ляпунова [1, 2]. Принятая постановка задачи обобщает некоторые проблемы оптимального быстродействия [3, 4] на системы, подверженные случайным возмущениям. Обсуждаются приближенные способы построения оптимального управления.

Автор отмечает, что тему этой работы и методы решения рассматриваемых задач он обсуждал с Н. Г. Четаевым, давшим ряд ценных советов. Особенно подробные замечания высказал Н. Г. Четаев относительно приложения метода функций Ляпунова к задачам исследования систем, подверженных случайным возмущениям.

**§ 1. Постановка задачи.** Рассмотрим систему, описываемую уравнениями

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + c\eta \tag{1.1}$$

где $x$ — $n$-мерный вектор фазовых координат системы, $A$, $B$ — $n \times n$-матрицы, $\eta(t)$ — случайная скалярная функция, $u$ — $n$-мерный вектор управления. При данных начальных условиях $x_0$, $\eta_0$, $t_0$ требуется указать правило выбора управления $u^\circ$, обеспечивающего минимум времени затухания переходного процесса $x(x_0, \eta_0, t_0, t, \eta, u)$ в системе (1.1). В зависимости от характера информации о ходе процесса возможны различные варианты постановки задачи.

Обозначим символом $g(\vartheta)$ реализацию случайной функции $\eta(t)$ при $t_0 \leqslant \vartheta \leqslant t$. Множество всех (почти всех) реализаций $g(\vartheta)$ будем обозначать символом $\Omega(t)$.

*Определение 1.1.* Рассмотрим операторы $u[t, g]$, сопоставляющие (при фиксированном $t \geqslant t_0$) функциям $g(\vartheta)$ векторы $u$. Совокупность $U_t$ операторов $u[t, g]$ $(t_0 \leqslant t < \infty,\ g \in \Omega(t))$ будем называть $t$-управлением.

Вектор-функцию $u(x, \eta, t) = U_x$, сопоставляющую (при фиксированном $t$) векторам $x \in G$ и числам $\eta \in H$ векторы $u$, будем называть $x$-управлением в области $G \times H$.

Обозначим

$$\|y\| = (y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{1/2}, \qquad \|y\|_k = (y_1^2 + \ldots + y_k^2)^{1/2}$$

*Определение 1.2.* Пусть даны число $\varepsilon \geqslant 0$, натуральное число $k \leqslant n$ и начальные условия $x_0$, $\eta_0$, $t_0$. Условимся совокупность $U_t$ ($t$ — управление) называть $\varepsilon$-допустимой по $\{x_1, \ldots, x_k\}$ для начальных условий $x_0$, $\eta_0$, $t_0$, если выполнены условия:

1) норма $\|u\|$ удовлетворяет неравенству

$$\|u[t, g]\| \leqslant 1, \qquad t \in [t_0, \infty), \qquad g \in \Omega \tag{1.2}$$

2) справедливо неравенство

$$T[U_t, k, \varepsilon, x_0, \eta_0, t_0] = \int_{t_0}^{\infty} p[U_t, k, \varepsilon, x_0, \eta_0, t_0, t]\, dt < \infty \tag{1.3}$$

где символ $p[U_t, k, \varepsilon, x_0, \eta_0, t_0, t]$ обозначает вероятность неравенства

$$\|x(x_0, \eta_0, t_0, t, \eta, u)\|_k > \varepsilon \tag{1.4}$$

при $t \geqslant t_0$ вдоль случайного решения $x(t)$ системы (1.1), порожденного случайными функциями $\eta(t)$ и $u(t) = u[t, \eta(\vartheta)]$. Множество $\varepsilon$-допустимых (для данных условий $k$, $\varepsilon$, $x_0$, $\eta_0$, $t_0$) $t$-управлений будем обозначать символом $M_t[k, \varepsilon, x_0, \eta_0, t_0]$.

Смысл определения 1.2 состоит в следующем: $\varepsilon$-допустимое $t$-управление — совокупность $U_t$ операторов $u[t, g]$ — определяет правило выбора управления $u(t)$ на основе информации о реализации $g(\vartheta)$ случайной функции $\eta(t)$ при $t_0 \leqslant \vartheta \leqslant t$, причем это управление обеспечивает затухание переходного процесса по $\|x(t)\|_k$ до величины $\varepsilon \geqslant 0$ с вероятностью, сколь угодно близкой к единице при достаточно больших $t$.

*Определение 1.3.* Пусть даны число $\varepsilon \geqslant 0$, натуральное число $k \leqslant n$, области $G_0$ и $G$ фазового пространства $\{x\}$ и числовое множество $H$. Функцию $U_x$ — $x$-управление в области $G \times H$ будем называть $\varepsilon$-допустимым по $\{x_1, \ldots, x_k\}$ для начальных возмущений $x_0$ из области $G_0$, если выполнены следующие условия:

1) функция $\eta(t)$ может принимать лишь значения из $H$ при всех реализациях $g(\vartheta) \in \Omega(t)$, $t_0 \leqslant t < \infty$;

2) решения системы (1.1) (при $u = u[x, \eta, t]$) с начальными условиями $x_0 \in G_0$ для всех реализаций $\eta = g(\vartheta)$ остаются в области $G$ при $t \geqslant t_0$;

3) норма $\|u\|$ удовлетворяет условию

$$\|u[x, \eta, t]\| \leqslant 1, \qquad x \in G, \qquad \eta \in H, \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.5}$$

4) выполняется неравенство (1.3) (где символ $U_t$ заменен на $U_x$) при всех $x_0 \in G_0$, $\eta_0 \in H$, причем траектория $x(x_0, \eta_0, t_0, t, \eta, u)$ порождается управлением $u(t) = u(x(t), \eta(t), t)$.

Множество $\varepsilon$-допустимых $x$-управлений обозначим символом

$$M_x[k, \varepsilon, G_0, G]$$

*Примечания* 1.1. В тех случаях, когда не может возникнуть недоразумений, будем использовать сокращенные термины и обозначения, отбрасывая дополнительные характеристики (например, допустимое управление вместо $\varepsilon$-допустимое $t$-управление, $T[U]$ вместо $T[U_t, k, \varepsilon, x_0, \eta_0, t_0]$ и т. д.).

1.2. Условия допустимости $U_t$ (или $U_x$) должны включать требование существования решений системы (1.1) при $u(t) = u[t, g]$ или $u = u[x, \eta, t]$ почти для всех реализаций $\eta = g(\vartheta)$. В дальнейшем допускается иногда класс функций $g(\vartheta)$ довольно общей природы (разрывные и $\delta$-функции $g(\vartheta)$). В соответствии с этим будем рассматривать в качестве решений $x(t)$ также функции довольно общей природы, класс которых мы не ограничиваем при общей постановке задачи. Поэтому в определения 1.2, 1.3 требование существования решений не включено и там, где это необходимо, должно проверяться дополнительно, исходя из допускаемого класса решений. По этой же причине доказательства изложены в статье без педантичной строгости в предположении, что рассматривается каждый раз класс функций $\eta(t)$ и $x(t)$, для которых соответствующие выкладки могут быть обоснованы.

1.3. Будем предполагать (там, где не оговорено противное), что для каждой реализации $\eta = g(\vartheta)$ процесс управления прекращается в тот момент $t = t_\varepsilon[g]$, когда точка соответствующей траектории $x(t)$ попадает впервые на поверхность $\|x\|_k = \varepsilon$. Поэтому в дальнейшем можно формально предполагать, что для таких реализаций при $t \geqslant t_\varepsilon[g]$ выполняются равенства $g(t) = 0$, $u(t) = 0$, $x(t) = 0$ и величина $p[t] = p[U, k, \varepsilon, x_0, \eta_0, t_0, t]$ есть монотонно невозрастающая функция времени $t$ при всех $t \geqslant t_0$.

1.4. Определения 1.2 и 1.3 включают также случаи вывода $x(t)$ в $\varepsilon$-окрестность поверхности $l_1x_1 + \ldots + l_nx_n = 0$, если в системе (1.1) сделать замену переменных $\{x_i\} \to \{y_i\}$ (причем $y_1 = l_1x_1 + \ldots + l_nx_n$) и положить в определениях 1.2, 1.3 $k = 1$.

*Определение 1.4.* Допустимое управление $U^\circ$ ($\overset{\circ}{U_t}$ или $\overset{\circ}{U_x}$) назовем оптимальным, если

$$T[U^\circ] = \min(T[U] \quad \text{при } U \in M) \tag{1.6}$$

В этой статье термин «оптимальная задача» понимается как задача определения минимума (1.6). Эта задача относится к классу проблем оптимального регулирования при случайном сигнале на входе системы [5, 6], однако здесь имеются некоторые характерные особенности, связанные с нелинейностью операторов $u[x, \eta, t]$, $u[t, g]$ и с тем обстоятельством, что по существу постановки задача является нестационарной[1].

*Примечания.* 1.5. Задача обобщается очевидным образом на случай минимизации функционала

$$Q[U] = \int_{t_0}^{\infty} p[U, k, \varepsilon, x_0, \eta_0, t_0, t]\, L[x(t), \eta(t)]\, dt$$

1.6. Задачи, аналогичные рассматриваемым в этой статье, можно сформулировать для случая наискорейшего вывода траектории $x(t)$ в $\varepsilon$-окрестность случайного движения $x_i = \eta_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

1.7. Если не оговорено противное, будем рассматривать лишь случайные функции $\eta(t)$, описывающие случайный (марковский) процесс без последействия [7].

**§ 2. Проблема существования оптимального управления.** Докажем существование оптимального управления $U_t^\circ$ для одного частного случая системы (1.1). Пусть дано уравнение

$$x_1^{(n)} + a_1x_1^{(n-1)} + \ldots + a_nx_1 = u_1(t) + \eta(t) \tag{2.1}$$

где функция $\eta(t)$ описывает случайный процесс следующего типа: $\eta(t)$ сохраняет постоянное значение $\eta = \eta_l$ $(l = 1, \ldots, m)$ на каждом полуинтервале $k\tau_0 \leqslant t < (k+1)\tau_0$ ($\tau_0 > 0$ — const, $k = 0, 1, \ldots$), вероятности перехода $\eta_j \to \eta_l$ при $t = k\tau_0$ — постоянные числа $p_{jl}$, кроме того,

$$|\eta_l| \leqslant q < 1 \qquad (l = 1, \ldots, m) \tag{2.2}$$

[1] Следует отметить, что задачи оптимального управления при случайных возмущениях в несколько отличной постановке рассмотрены в статьях [17—18].

Везде в дальнейшем в этой статье, если не оговорено противное, предполагается, что корни $\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ характеристического уравнения

$$|A - \lambda E|_1^n = 0$$

удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{Re}\lambda_i < -\delta \qquad (\delta > 0 - \text{const}) \tag{2.3}$$

Оптимальную задачу для уравнения (2.1) при $k = n$, $\varepsilon = 0$ $(x_i = x_1^{(i-1)},\ i \neq 1)$ и при условиях (2.2) и (2.3) будем называть задачей A.

*Лемма 2.1.* Для задачи A существует допустимое управление $U_t$, каковы бы ни были начальные условия $x_0$, $\eta_0$, $t_0$.

*Примечание* 2.1. В качестве допустимых реализаций $u(t)$ управления $u[t, g]$ будем рассматривать в этом параграфе кусочно-гладкие функции, допускающие лишь разрывы первого рода при изолированных значениях $t$, в качестве допустимых решений $x(t)$— непрерывные функции, удовлетворяющие уравнению (2.1) при всех $t$, отличных от точек разрыва $\eta(t)$ и $u(t)$.

*Доказательство леммы.* Согласно результатам статей [8, 9] для задачи оптимального быстродействия системы (2.1) при условиях (2.3), $\eta(t) = 0$ и ограничении

$$\|u(t)\|_1 \leqslant (1 - q) \qquad (u_i = 0,\ i = 2, \ldots, n) \tag{2.4}$$

существует оптимальное управление $u_1 = u_1^*(t)$, каковы бы ни были начальные условия $x_0$, $t_0$. Это управление — кусочно-постоянная функция $u_1^*(t)$ — приводит траекторию $x(t)$ уравнения (2.1) в точку $x = 0$ $(x_1 = 0,$ $x_i = x_1^{(i-1)} = 0)$ в некоторый момент $t = t_0 + T^*$. Очевидно, операторы

$$\begin{aligned} u[t, g] &= \{u_1^*(t) - g(t), \ldots, 0\} \quad \text{при } t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T^* \\ u[t, g] &= \{-g(t), 0, \ldots, 0\} \quad \text{при } t > T^* + t_0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

образуют допустимое управление $U_t^*$, причем

$$T[U_t^*] = T^* \tag{2.6}$$

*Теорема 2.1.* Для задачи A существует оптимальное управление $U_t^\circ$, каковы бы ни были начальные условия $x_0$, $\eta_0$, $t_0$.

*Доказательство.* Пусть даны начальные условия $x_0$, $\eta_0$, $t_0$, причем без ограничения общности $t_0 \in [0, \tau_0)$. По лемме 2.1 существует допустимое управление $U_t^*$. Рассмотрим последовательность допустимых управлений $U_t^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, для которых выполняется условие

$$U_t^{(1)} = U_t^*, \qquad T[U_t^{(k)}] \geqslant T[U_t^{(k+1)}], \qquad \lim T[U_t^{(k)}] = T^\circ \quad \text{при } k \to \infty \tag{2.7}$$

и не существует допустимого управления $U_t$, для которого

$$T[U_t] < T^\circ \tag{2.8}$$

Покажем, что существует допустимое управление $U_t^\circ$, удовлетворяющее условию

$$T[U_t^\circ] = T^\circ \tag{2.9}$$

Обозначим через $g_l^r(\vartheta)$ $(r = 1, 2, \ldots;\ l = m, \ldots, m^r,\ 0 \leqslant \vartheta < r\tau_0)$ реализации $\eta(t)$, через $p_l^r$ вероятности $g_l^r$. Упорядочим множество $\{g_l^r\}$.

Пусть $g_l^r$ предшествует $g_{l'}^{r'}$, если $r' > r$; при фиксированном $r$ реализации $g_l^r$ упорядочены определенным образом по $l = 1, \ldots, m^r$. Рассмотрим тройки $\{g, u, T\}_l^r$, составленные из чисел

$$T_l^r \qquad ((r-1)\tau_0 \leqslant t_0 + T_l^r \leqslant r\tau_0)$$

и функций

$$g_l^r(t), \qquad u_l^r(t) \qquad (t_0 \leqslant t < t_0 + T_l^r)$$

Будем говорить, что тройка $\{g, u, T\}_l^r$ принадлежит $U_t^{(k)}$, если $u_1(t) = u_1[t, g_l^r] = u_l^r(t)$ и траектория $x(x_0, \eta_0, t_0, t, g_l^r, u[t, g_l^r])$ попадает впервые в точку $x = 0$ при $t = t_0 + T_l^r$. Множество всех троек $\{g, u, T\}_l^r$, принадлежащих $U_t^{(k)}$, обозначим символом $Q_k$.

Множество $Q_k$ не содержит одновременно двух троек $\{g, u, T\}_l^r$ и $\{g, u, T\}_{l'}^{r'}$, где $T' > T$ и $g_l^r(t) = g_{l'}^{r'}(t)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T$. Справедливо равенство

$$\sum_{(k)} p_l^r = 1 \tag{2.10}$$

где сумма взята по всем реализациям $g_l^r$, содержащимся в тройках $\{g, u, T\}_l^r \in Q_k$. Кроме того,

$$T[U_t^{(k)}] \geqslant \sum_{(k)} p_l^r T_l^r \quad \text{или} \quad \lim\Big(\sum_{(k)} p_l^r T_l^r\Big) \leqslant T^\circ \quad \text{при } k \to \infty \tag{2.11}$$

Перейдем теперь к построению $U_t^\circ$. Опираясь на свойства множеств $Q_k$, можно выделить диагональную подпоследовательность (для которой сохраним старые обозначения, считая ее перенумерованной заново), удовлетворяющую следующим условиям.

(1) Имеется подпоследовательность $\{g_l^r\}_k$ такая, что первые $s$ членов этой подпоследовательности содержатся в тройках всех $Q_k$, начиная с $k = s$.

(2) Справедливо равенство

$$\sum_{\{g\}k} p_l^r = 1 \tag{2.12}$$

где сумма вычислена по всем элементам последовательности $\{g_l^r\}_k$, описанной в п. (1). (Возможен случай, когда множество $\{g_l^r\}_k$ конечно и, начиная с некоторого номера $s$, все $Q_k$ содержат конечное число реализаций $g_l^r$. В этом случае дальнейшие рассуждения лишь упрощаются.) Обозначим символами $(u_l^r)_k$ управляющие функции, соответствующие реализациям $g_l^r$ из последовательности $\{g_l^r\}_k$ в управлении $U_t^{(k)}$, символами $(T_l^r)_k$ — числа $T$, входящие в соответствующие тройки из $Q_k$. Используя слабую компактность [10] единичной сферы в пространстве $L_2$ функций $u(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant s\tau_0,\ s = 1, 2, \ldots)$ при фиксированном $s$, ограниченность каждой последовательности $(T_l^r)_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и повторяя рассуждения из работы [4], можно выделить диагональную подпоследовательность $\{Q_k\}$ (для которой снова сохраним старую нумерацию), для которой выполняются условия

$$\lim (T_l^r)_k = (T_l^r)_0 \qquad \text{при } k \to \infty \tag{2.13}$$

и последовательности $(u_l^r)_k$ при $k \to \infty$ сходятся слабо к предельным измеримым функциям $(u_l^r)^*$ на интервалах $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + (T_l^r)_0$. При этом из условий (2.11) и (2.12) следует, что

$$\sum_{\{g\}k} p_l^r (T_l^r)_0 \leqslant T^\circ \tag{2.14}$$

В интегралах, определяющих решение $x(t)$ системы (2.1) по формуле Коши для неоднородных линейных уравнений [11], возможен предельный переход по функциям $(u_l^r)_k$, слабо сходящимся к $(u_l^r)^*$. Поэтому траектории $x(t)$ уравнения (2.1), порожденные функциями $(u_l^r)^*$ при соответствующих реализациях $g_l^r(t)$, приходят в точку $x=0$ при $t=t_0+(T_l^r)_0$.

Это обстоятельство вместе с условиями (2.12) и (2.14) доказывает, что совокупность операторов $u^*[t, g]$, определенных на реализациях $g_l^r$ из подпоследовательности $\{g_l^r\}_k$ (и на отрезках $g_l^r(\vartheta)\,(\vartheta\in[t_0, t]$, $t\leqslant t_0+(T_l^r)_0)$ этих реализаций) и сопоставляющих этим реализациям функции $(u_l^r(t))^*=u_1$ при $t\leqslant t_0+(T_l^r)_0$ и функции $u=-\eta(t)$ при $t>t_0+(T_l^r)_0$ $(u_i=0$ при $i\neq 1)$, определяет управление $U_t^*$, для которого

$$T[U_t^*]=T^\circ \tag{2.15}$$

Управление $U_t^*$ определено лишь в классе измеримых функций $u(t)=u^*[t, g]$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что существует управление $U_t^\circ$, также удовлетворяющее условию (2.15), но уже в классе кусочно-непрерывных функций $u(t)=u^\circ[t, g]$.

Для доказательства этого утверждения следует, опираясь на результаты статьи [9], заменить последовательно на интервалах $t_0\leqslant t\leqslant r\tau_0$ $(r=1, 2, \ldots)$ для каждой реализации $g_l^r(t)$ измеримые функции $(u_l^r(t))^*$ на кусочно-постоянные функции $(u_l^r(t))^\circ$, $|(u_l^r(t))^\circ|\leqslant 1$, дающие при интегрировании по формуле Коши для решений (2.1) на каждом интервале

$$r'\tau_0<t<(r'+1)\tau_0,\quad (r+1)\tau_0<t<t_0+(T_l^r)_0 \quad (r'=0, \ldots, (r-2)) \tag{2.16}$$

тот же результат, что и заменяемые функции. Существование таких кусочно-постоянных функций следует из разрешимости соответствующих $L$-проблем [12] на интервалах (2.16) в кусочно-постоянных функциях $(u_l^r(t))^\circ$, если эти проблемы разрешимы в измеримых ограниченных функциях $(u_l^r(t))^*$ на тех же интервалах. Теорема доказана.

*Примечание* 2.2. Аналогичным образом, опираясь на лемму из работы [13] (стр. 575), можно доказать существование оптимального управления $U_t^\circ$, при котором управляющие функции $u(t)$ принимают лишь два значения: $u=+1$ и $u=-1$.

**§ 3. Необходимые условия оптимальности управления.** В этом параграфе выводятся необходимые условия оптимальности $U_t$ для одной задачи, подобной задаче A. Эта задача «сглажена» введением дополнительной случайной величины $\xi$ с малой дисперсией $\sigma^2$. Условия оптимальности для задачи A можно получить из условий оптимальности для рассматриваемой здесь задачи при $\varepsilon\to 0$ и $\sigma^2\to 0$, однако обоснование этого предельного перехода выходит за рамки настоящей статьи. Заметим, что аналогичный прием введения $\xi$ можно применить для вывода условий оптимальности управления в устойчивой системе и при отсутствии случайного возмущения $\eta(t)$, т. е. для обычной задачи оптимального быстродействия. Рассмотрим уравнение

$$x_1^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x_1 = u(t) + \eta(t) + \xi\delta(t - t_0) \tag{3.1}$$
$$(x_i = x_1^{(i-1)};\ i = 1, \ldots, n)$$

где $\xi$ — случайная независимая величина, распределенная по нормальному закону $\mathrm{M}\{\xi\} = 0$, $\mathrm{M}\{\xi^2\} = \sigma^2$ (здесь и в дальнейшем символ $\mathrm{M}\{\alpha\}$ означает математическое ожидание $\alpha$). Для уравнения (3.1) будем рассматривать следующую оптимальную задачу:

*Задача* В. Требуется определить оптимальное $\varepsilon$-допустимое $t$-управление $U_t^\circ = \{u^\circ[t, g]\}$ по координате $x_1$, при условии, что в процессе регулирования значение случайной величины $\xi$ остается неизвестным и, следовательно, как и в определениях 1.2, 1.4, управление $u^\circ[t, g]$ базируется лишь на информации о реализации $g(\vartheta)$ случайной функции $\eta(t)$ при $\vartheta \leqslant t$ ($\eta(t)$ — функция, описанная в § 2).

В этом параграфе будем предполагать, что для всех реализаций $g$ операторы $u^\circ[t, g]$ определены при всех $t \geqslant t_0$. Перенумеруем последовательно реализации $g(\vartheta)$ на каждом из интервалов

$$r\tau_0 \leqslant t < (r+1)\tau_0 \qquad (r = 0, 1, \ldots) \tag{3.2}$$

следующим образом. Пусть на интервале $0 < \vartheta < \tau_0$ все реализации $\eta = g(\vartheta)$ перенумерованы индексами $l_0 = 1, \ldots, m$ и обозначены символами $g_{l_0}(\vartheta)$, соответствующие вероятности обозначены через $p_{l_0}$. Каждая из реализаций $g_{l_0}(\vartheta)$ порождает на интервале $\tau_0 < \vartheta < 2\tau_0$ $m$-реализаций $\eta = g(\vartheta)$, которые обозначим символами $g_{l_0 l_1}(\vartheta)$ $(l_0 = 1, \ldots, m;\ l_1 = 1, \ldots, m)$. По индукции перенумеруем реализации $g(\vartheta)$ на всех интервалах (3.2). Пусть начальное значение $t_0 \in [0, \tau_0)$ и $\eta_0 = g_{l_0'}(t_0)$, тогда вероятность $p[U_t^\circ, 1, \varepsilon, x_0, \eta_0, t_0, t] = p[t]$ неравенства $|x_1(x_0, \eta_0, t_0, t, \eta, u)| > \varepsilon$ при $t \in (r\tau_0, (r+1)\tau_0)$ в рассматриваемом случае вычисляется по формуле

$$p[t] = \sum_{(l_1 \ldots l_r)} p_{l_0' l_1 \ldots l_r}\left(1 - \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (2\pi)^{-1/2}\gamma(t)^{-1}\left[\exp -(\zeta - \zeta[l_0', l_1 \ldots l_r, t])^2 (2\gamma^2(t))^{-1}\right] d\zeta\right) \tag{3.3}$$

где суммирование производится по всем $l_1, \ldots, l_r$ $(l_j = 1, \ldots, m)$ при фиксированном $l_0'$, а величины $\gamma$ и $\zeta[l_0', l_1, \ldots, l_r, t]$ определяются равенствами

$$\gamma^2(t) = \sigma^2 h_{1n}^2(t - t_0) \tag{3.4}$$

$$\zeta[l_0', l_1 \ldots l_r, t] = \sum_{j=1}^{n} h_{1j}(t - t_0)\, x_{j0} + \tag{3.5}$$
$$+ \sum_{k=1}^{r} \int_{k\tau_0}^{(k+1)\tau_0} h_{1n}(t - \vartheta)\,[u^\circ[\vartheta, g_{l_0' l_1 \ldots l_k}] + g_{l_0' l_1 \ldots l_k}(\vartheta)]\, d\vartheta +$$
$$+ \int_{t_0}^{\tau_0} h_{1n}(t - \vartheta)\,[u^\circ[\vartheta, g_{l_0'}] + g_{l_0'}(\vartheta)]\, d\vartheta +$$
$$+ \int_{r\tau_0}^{t} h_{1n}(t - \vartheta)\,[u^\circ[\vartheta, g_{l_0' l_1 \ldots l_r}] + g_{l_0' l_1 \ldots l_r}(\vartheta)]\, d\vartheta$$

В равенствах (3.4) и (3.5) функции $h_{ij}(t)$ — элементы фундаментальной матрицы решений однородной системы (3.1) $(h_{ij}(t_0) = \delta_{ij})$. Таким образом, оптимальная задача $B$ приводится к минимуму функционала

$$T[u_t^\circ] = \int_{t_0}^{\infty} p[t]\,dt = \min \tag{3.6}$$

где вероятность $p[t]$ определяется равенствами (3.3) — (3.5). Эту задачу можно решить обычными приемами вариационного исчисления. Пусть, в частности, $\delta u[t, g]$ — вариация управлений $u[t, g]$, допустимая условием (1.2), равная нулю на всех реализациях $g(\vartheta)$, кроме отмеченной реализации $g^*(\vartheta)$, на которой она также равна нулю всюду вне некоторого малого интервала $(t_*^* - \alpha, t^* + \alpha)$, лежащего целиком внутри интервала $r\tau_0 < t < (r+1)\tau_0$. При этом будем предполагать, что в описанной выше нумерации отрезок $g^*(\vartheta)$ на интервале $\vartheta \in (r\tau_0, (r+1)\tau_0)$ обозначен символом $g_{l_0' l_1' \ldots l_r'}$. Тогда знак вариации $\delta T$ будет определяться знаком выражения

$$f(t^*)\,\mathrm{sign}\,\delta u_1(t^*) = \tag{3.7}$$

$$= \mathrm{sign}\,\delta u_1(t^*)\Big[\int_{t^*}^{(r+1)\tau_0} p_{l_0', l_1', \ldots, l_r'} F(l_0', l_1', \ldots, l_r', t)\, h_{1n}(t - t^*)\,dt +$$

$$+ \sum_{k=r+1}^{\infty} \int_{k\tau_0}^{(k+1)\tau_0} \sum_{(l_{r+1}, \ldots, l_k)} p_{l_0', l_1', \ldots, l_r', l_{r+1}, \ldots, l_k} F(l_0', \ldots, l_r', l_{r+1}, \ldots, l_k, t)\, h_{1n}(t - t^*)\,dt\Big]$$

где

$$F[l_0', \ldots, l_r', l_{r+1}, \ldots, l_k, t] = \frac{-1}{\sqrt{2\pi\gamma^3(t)}} \times \tag{3.8}$$

$$\times \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\frac{-(\zeta - \zeta[l_0', \ldots, l_r', l_{r+1}, \ldots, l_k, t])^2}{2\gamma^2(t)}\,[\zeta - \zeta[l_0', \ldots, l_r', l_{r+1}, \ldots, l_k, t]]\,d\zeta$$

при $k\tau_0 < t < (k+1)\tau_0$.

Рассмотрим функцию $f(t^*)$, определенную равенством (3.7). Для истолкования этой функции рассмотрим систему (1.1), эквивалентную уравнению (2.1), где, следовательно, $x = \{x_1, \ldots, x_n\} = \{x_1, \ldots, x_1^{(n-1)}\}$:

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & 0 & \ldots & -a_1 \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \end{Vmatrix}$$

По известным свойствам линейных систем [11] функции $h_{1i}(t - t^*)$ $(i = 1, \ldots, n)$ аргумента $t^*$ образуют частное решение системы

$$d\psi / dt^* = -A^*\psi \tag{3.9}$$

сопряженной к системе (1.1) ($A^*$ — транспонированная матрица $A$). Следовательно, функцию $h_{1n}(t - t^*)$ можно рассматривать как скалярное произведение вектора-решения $\{h_{1i}(t - t^*)\}$ на вектор $b$ — первый столбец матрицы $B$. Применяя правила дифференцирования интегралов

(3.7) по параметру $t^*$ и учитывая условия $h_{1i}(0) = 0, h_{11}(0) = 1$ при $i \neq 1$, убеждаемся, что функцию $f(t^*)$ можно рассматривать как скалярное произведение $f(t^*) = (b \cdot \psi(t^*))$, где $\psi(t^*)$ — решение системы

$$\frac{d\psi}{dt} = -A^* \psi + d(t), \qquad d(t) = \{-pF(t), 0, \ldots, 0\} \tag{3.10}$$

При минимуме $T[u_t^\circ]$ вариация должна быть неотрицательной, поэтому можно установить следующий факт.

*Теорема 3.1.* На каждом интервале $k\tau_0 < t < (k+1)\tau_0$ для каждой реализации $g(\vartheta)$ оптимальное управление $u[t, g]$ для задачи $B$ удовлетворяет условию: оператор $u^\circ[t, g]$ является таким, что величина

$$-u_1^\circ[t, g] f[t] = -u_1^\circ[t, g](b \cdot \psi(t)) = \max \tag{3.11}$$

где $\psi(t)$ — решение системы (3.10) (при $t = t^*$).

*Примечания.* 3.1. Условие (3.11) соответствует в рассматриваемом случае принципу максимума [4].

При переходе от одной реализации к другой реализации и при переходе через критические значения $t = k\tau_0$ решения $\psi(t)$ (3.9), определяющие по (3.10) и (3.11) оптимальное управление $u[t, g]$, меняются, однако можно проверить по формулам (3.3) — (3.8), что изменения решений $\psi(t)$ при переходе через точку $t = k\tau_0$ подчиняются правилу скачка: пусть $\psi_{l_0', \ldots, l_k'}(t)$ — определяющее решение на $g_{l_0', \ldots, l_k'}$ при $t$ на интервале $(k\tau_0, (k+1)\tau_0)$ и $\psi_{l_0', \ldots, l_k', l_{k+1}}(t)$ — определяющие решения на $g_{l_0', \ldots, l_k' l_{k+1}}$ при $t$ на интервале $((k+1)\tau_0 (k+2)\tau_0)$; тогда справедливо равенство[1]

$$\lim_{t \to (k+1)\tau_0 - 0} (\psi_{l_0', \ldots, l_k'}(t)) = \sum_{l_{k+1}=1}^{m} P_{l_{k+1}} \lim_{t \to (k+1)\tau_0 + 0} (\psi_{l_0', \ldots, l_k', l_{k+1}}(t)) \tag{3.12}$$

**3.2.** Описанный прием сглаживания оптимальной задачи позволяет применить для вычисления оптимального управления один из известных приближенных методов прямого решения вариационных задач, например метод наискорейшего спуска. Ситуация, имеющая здесь место, аналогична ситуации, возникающей при решении прямыми методами известных оптимальных задач (см., например, [5, 6, 14]). Следует, однако, отметить, что возникающие при минимизации функционала (3.6) вычислительные трудности весьма велики.

Проверка существования допустимого и оптимального управлений и построение оптимального управления в конкретных случаях затруднительны. В следующем параграфе обсуждается возможность приложения к изучаемым задачам метода функций Ляпунова [1, 2, 15]. Приложение этого метода к проблемам регулирования было подготовлено работами Н. Г. Четаева. В частности, задача выбора параметров устойчивой системы с целью обеспечения наилучшего быстродействия была решена для линейных систем Н. Г. Четаевым в работах [2, 15] на базе функций Ляпунова — квадратичных форм. При этом в статье [15] были выведены конкретные оценки, позволяющие оценить время затухания переходного процесса до заданной величины $\varepsilon > 0$ по оценкам собственных чисел квадратичных форм — функции Ляпунова $v$ и ее производной $dv/dt$ — в силу уравнений возмущенного движения.

---

[1] Можно считать, что этот скачок определяется членами вида $\delta$-функций в правой части (3.10), соответствующих матрице перехода $\eta_i \to \eta_j$. В случае непрерывного процесса $\eta(t)$ этому факту соответствует появление также непрерывных членов в правой части (3.10). Следует отметить, что появление члена $d(t)$ в (3.10) вызвано здесь введением величины $\xi$ и при $\sigma^2 \to 0$ функция $d(t) \to 0$ вне малой окрестности точки $x = 0$.

## § 4. Приложение метода функций Ляпунова к оптимальной задаче.

В этом параграфе, следуя идеям прямого метода, описывается обобщение функций Ляпунова, которое позволяет применить эти функции как аппарат для исследования проблем быстродействия регулируемых систем и при наличии случайных возмущений. Приложение второго метода Ляпунова к проблемам быстродействия при отсутствии случайных возмущений описано в статье [9]. Заметим, что поверхности уровня оптимальных функций Ляпунова, рассмотренных в статье [9], являются, очевидно, изохронами в том смысле, как это понятие определено в работе [16]. Автор считает своим долгом отметить, что рассуждения, приведенные в этом параграфе, в некоторых существенных чертах пересекаются с исследованиями Ю. М. Репина, который разработал метод решения оптимальных задач на основе методов теории динамического программирования и вывел общее уравнение в частных производных для минимизируемого функционала.

Введем предварительно ряд определений, соответствующих в нашем случае классическим определениям второго метода Ляпунова [1, 2].

Будем рассматривать функции $v(x, \eta, t)$ координат $x_i\,(i = 1, \ldots, n)$ случайного значения $\eta$ и времени $t$, не предполагая эти функции непрерывными по всем аргументам.

*Определения. 4.1.* Функцию $v(x, \eta, t)$ будем называть определенно-положительной в области $G \times H$ при $t \geqslant t_0$, если выполняется условие

$$v(x, \eta, t) > 0 \quad \text{при } x \in G,\ x \neq 0,\ \eta \in H,\ t \geqslant t_0 \tag{4.1}$$

*4.2.* Функция $v(x, \eta, t)$ допускает бесконечно малый высший предел (в $G \times H$ при $t \geqslant t_0$), если существует постоянная $L$, удовлетворяющая условиям

$$v(x, \eta, t) \leqslant L\|x\| \quad \text{при } x \in G,\ x \neq 0, \eta \in H,\ t \geqslant t_0 \tag{4.2}$$

*4.3.* При подстановке в функцию $v(x, \eta, t)$ вместо переменных $x_i$ и $\eta$ координат $x_i(t)$ решения системы (1.1) [соответствующего некоторому управлению $U_t$ (или $U_x$)] и значений случайной функции $\eta(t)$ получается случайная функция времени $v(t)$. Предположим, что для математического ожидания $\mathrm{M}\{v(t)\}$ этой функции может быть вычислена правая производная $\mathrm{M}\{v\}$.

Будем говорить, что функция $v(x, \eta, t)$ имеет определенно-отрицательную производную $d\mathrm{M}\{v\}/dt$ в (области $G \times H$ при $t \geqslant t_0$), если выполняется неравенство

$$d\mathrm{M}\{v\}/dt \leqslant -\delta \quad \text{при } x \in G,\ \eta \in H,\ t \geqslant t_0 \qquad (\delta = \mathrm{const} > 0) \tag{4.3}$$

и если неравенство (4.3) можно интегрировать, т. е.

$$\mathrm{M}\{v(t)\} - \mathrm{M}\{v(t_0)\} \leqslant -\delta(t - t_0) \qquad (t \geqslant t_0) \tag{4.4}$$

Последняя оговорка необходима здесь в связи с тем, что в качестве функций Ляпунова $v(x, \eta, t)$ и решений $x(t)$ допускаются функции более общей природы, чем в классических случаях теории Ляпунова.

*4.4.* Функцию $v(x, \eta, t)$, удовлетворяющую условиям определений 4.1 — 4.3, будем называть обобщенной функцией Ляпунова (в соответствующий области).

*Примечания.* 4.1 В этом параграфе будем рассматривать лишь оптимальные задачи для $s = 0$, $k = n$, $G = \{-\infty < x_i < \infty\}$. Согласно примечанию 1.3 каждая реализация траектории $x(t)$ определена данным управлением $U_t$ (или $U_x$) лишь при $x \neq 0$ (при

$\varepsilon = 0$), а после попадания в точку $x = 0$ при $t = t^*$ имеем $x(t) \equiv 0$. В соответствии с этим будем предполагать, что при $x = 0$ функции Ляпунова $v(x, \eta, t)$ не определены и каждая реализация функции $v(t)$ после попадания соответствующей реализации решения $x(t)$ в точку $x = 0$ продолжается таким образом, что $dv / dt = -1$.

**4.2.** В дальнейшем в этом параграфе будем рассматривать лишь такие случаи, когда случайные решения $x(t)$ системы (1.1) имеют при всех $t \geqslant t_0$ конечную дисперсию, равномерно ограниченную при $t \geqslant t_0$. Вследствие (2.3) это условие выполняется, например, если функции $\eta(t)$ и $u[t, \eta]$ имеют конечную дисперсию, равномерно ограниченную при $t \geqslant t_0$.

*Лемма 4.1.* Если при данном управлении $U_t$ (или $U_x$) для системы (1.1) можно указать обобщенную функцию Ляпунова $v(x, \eta, t)$, то управление $U_t$ (или $U_x$) является допустимым[1].

*Доказательство.* По условиям решение $x(t)$ имеет ограниченную дисперсию. Следовательно, и функция $v(t)$ по свойству бесконечно малого высшего предела (4.2) также будет иметь ограниченную дисперсию $D(t) \leqslant D = \text{const}$ при всех $t \geqslant t_0$. По свойству определенной положительности $v(x, \eta, t)$ (4.1) вероятность $p[t]$ неравенства $x(t) \neq 0$ совпадает с вероятностью неравенства $v(t) > 0$. Из условия (4.4) по неравенству Чебышева [7] (стр. 187) заключаем теперь, что вероятность $p[t]$ имеет порядок величины $1/t^2$ при $t \to \infty$. Это и доказывает сходимость интеграла (1.3).

*Определение 4.5.* Обобщенную функцию Ляпунова $v^\circ(x, \eta, t)$ будем называть оптимальной, если выполняется условие

$$\min_U d\mathrm{M}\{v^\circ\} / dt = -1 \tag{4.5}$$

в каждой точке $x, \eta$ (или в каждый момент $t$ процесса регулирования соответственно)

*Теорема 4.1.* Пусть система (1.1) обладает оптимальным управлением $U_x^\circ$ (или $U_t^\circ$ для всех начальных условий $x, \eta$, $t \geqslant t_0$). Тогда определенно-положительная функция $v(x, \eta, t) = T[U, n, 0, x, \eta, t]$ удовлетворяет условию (4.5), причем минимум достигается на оптимальном управлении $U_x^\circ$ (или $U_t^\circ$).

*Доказательство.* Вычислим $d\mathrm{M}\{v\}/dt$ для функции $v = T[U^\circ]$ при оптимальном управлении $U^\circ$ (в точке $x = x_0$, $\eta = \eta_0$, $t = t_0$). Величина $p[U, k, \varepsilon, x(t_0 + \tau), \eta(t_0 + \tau), t_0 + \tau, t]$ при фиксированном управлении $U$ и при постоянном $t \geqslant t_0 + \tau$ является случайной функцией $\tau$, статистические свойства которой определяются статистическими свойствами $x(t)$ и $\eta(t)$. По определению функции $\mathrm{M}\{v(t)\}$ имеем

$$\mathrm{M}\{v(t_0 + \Delta t) - \{v(t_0)\}\} =$$

$$= \mathrm{M}\left\{\int_{t_0+\Delta t}^{\infty} p[U, n, 0, x(t_0 + \Delta t), \eta(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t, t]\, dt\right\} -$$

$$- \int_{t_0}^{\infty} p[U, n, 0, x_0, \eta_0, t_0, t]\, dt$$

[1] См. примечание 1.2. Управление $U_t$ предполагается здесь, в частности, таким, что $\{x(t), \eta(t)\}$ — случайный процесс без последействия.

и вследствие известных свойств случайных процессов без последействия [7] имеем

$$\mathrm{M}\left\{\int\limits_{t_0+\Delta t}^{\infty} p[U, n, 0,\ x(t_0+\Delta t), \eta(t_0+\Delta t),\ t_0+\Delta t,\ t]\,dt\right\} =$$

$$= \int\limits_{t_0+\Delta t}^{\infty} p[U, n, 0, x_0, \eta_0, t_0, t]\,dt$$

т. е.

$$\left(\frac{d\mathrm{M}\{v\}}{dt}\right)_{U_0} = \left(\frac{d}{dt'}\left[\int\limits_{t'}^{\infty} p[U, n, 0, x_0, \eta_0, t_0, t]\,dt\right]\right)_{t'=t_0} = -1 \tag{4.6}$$

так как при $x_0 \neq 0$ на некотором достаточно малом интервале $(t_0, t_0+\Delta t)$

$$\lim p[U, n, 0, x_0, \eta_0, t_0, t] = 1 \text{ при } \Delta t \to 0$$

Предположим теперь, что для некоторого допустимого управления $U$ в отдельные моменты управления $d\mathrm{M}\{v\}/dt_0 < -1$. Тогда на некотором интервале $\Delta t$ выполнялось бы неравенство $\mathrm{M}\{v(t_0+\Delta t)\} - \mathrm{M}\{v(t_0)\} < -\Delta t$, что вследствие (4.6) противоречит предположению об оптимальности управления $U^\circ$.

Полученное противоречие вместе с равенством (4.6) доказывает теорему.

*Теорема 4.2.* Пусть для системы (1.1) указана обобщенная оптимальная функция Ляпунова $v(x, \eta, t)$. Если при некотором управлении $U^\circ$ $U_t^\circ$ или $U_x^\circ$) эта функция удовлетворяет условию $dv^\circ/dt = -1 = \min$, то это управление $U^\circ$ является оптимальным.

*Доказательство.* Согласно лемме 4.1 управление $U^\circ$ является допустимым. Предположим от противного, что это управление $U^\circ$ не является оптимальным и, следовательно, существует допустимое управление $U^*$, для которого

$$T[U^*] < T[U^\circ] \tag{4.7}$$

по крайней мере для одной точки $x_0$, $\eta_0$, $t_0$, причем

$$\left(\frac{d\mathrm{M}\{v\}}{dt}\right)_{U^*} \geqslant -1 \tag{4.8}$$

Рассмотрим процесс управления при указанных начальных условиях $x_0$, $\eta_0$, $t_0$ и обозначим через $v_t^\circ$ и $v_t^{\circ *}$ соответственно математические ожидания (вычисленные при $t = t_0$) случайных функций $v^\circ(t)$ и $v^{\circ *}(t)$, соответствующих управлениям $U^\circ$ и $U^*$, по тем значениям $x^\circ(t)$ и $x^*(t)$, для которых $v^\circ(t) > 0$ и $v^{\circ *}(t) > 0$. Из условий $(d\mathrm{M}\{v^\circ\}/dt)_{U^\circ} = -1$ и $dv^\circ/dt = -1$ при $x = 0$, а также из (4.8) следуют условия

$$\left(\frac{dv_t^\circ}{dt}\right)_{dt=+0} = -p[U^\circ, n, 0, x_0, \eta_0, t_0, t] \tag{4.9}$$

$$\left(\frac{dv_t^{\circ *}}{dt}\right)_{dt=+0} \geqslant -p[U^*, n, 0, x_0, \eta_0, t_0, t]$$

(Предполагаем, что эти производные имеют смысл и соотношения (4.9) можно интегрировать.)

Из условий (4.9) следует

$$T[U^\circ] = v^\circ(t_0), \qquad T[U^*] \geqslant v^\circ(t_0) \tag{4.10}$$

которые противоречат (4.7).

Теоремы 4.1 и 4.2 указывают пути приложения второго метода Ляпунова к оптимальным задачам. Следует, однако, отметить, что эффективное построение оптимальной функции Ляпунова $v(x, \eta, t)$ затруднительно. Если предполагать, что в окрестности некоторой точки $x$, $\eta, t$ функция $v$ дифференцируема по $x_i$ и $t$, то условие (4.5) приводит к уравнению в частных производных, которому должна удовлетворять обобщенная функция Ляпунова. Например, если случайная функция $\eta(t)$ может принимать $m$ значений $\eta_1, \ldots, \eta_m$, удовлетворяющих ограничению (2.2), причем вероятность $p_{lj}(\Delta t)$ смены значений $\eta_l \to \eta_j$ $(l \neq j)$ на интервале $(t, t+\Delta t)$ определяется условиями

$$p_{lj}(\Delta t) = p_{lj}\Delta t + o(\Delta t) \qquad (p_{lj} = \mathrm{const}) \tag{4.11}$$

то условие (4.5) приводит к равенствам

$$\min\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v^\circ(x, \eta_l, t)}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}x_j + b_{ij}u_j) + c_i\eta_l\right] + \frac{\partial v^\circ}{\partial t} + \right. \tag{4.12}$$

$$\left. + \sum_{k\neq l} p_{lk}\left[v^\circ(x, \eta_k, t) - v^\circ(x, \eta_l, t)\right]\right] = -1 \qquad \text{при } \|u\| \leqslant 1 \quad (l = 1, \ldots, m)$$

которые можно рассматривать как систему $m$ уравнений для $m$ функций $v_l = v^\circ(x, \eta_l, t)$. Трудность определения функций $v_l$ связана, в частности, с тем обстоятельством, что надо найти определенно-положительные при $x \neq 0$ решения $v_l$ системы (4.12).

В § 5 будет рассмотрен случай, когда решение задачи облегчается тем, что оптимальная функция $v^\circ(x, \eta, t)$ не зависит явно от $\eta_l$. В § 6 описывается приближенный графический способ построения функции $v^\circ(x, \eta, t)$ для системы второго порядка.

**§ 5. Оптимальное регулирование в случае белого шума на входе системы.** Пусть случайная функция $\eta(t)$ описывает белый шум, который будем представлять реализованным как предельный случай дробового эффекта (случайные импульсы с дисперсией $a^2$ и средней плотностью $\nu$ распределения по оси $t$) при $\nu \to \infty$ и $a^2\nu = \gamma = \mathrm{const}$ [6]. Предположим, что $\mathrm{M}\{\eta(t)\} = 0$. Поскольку рассматриваемый случайный процесс $\eta(t)$ является белым шумом, информация о прошлой реализации сигнала не играет роли при выборе управления в будущем, т. е. в каждый момент $t$ в точке $x(t)$ оптимальное управление $U_x$ должно выбираться по тому же правилу, как и оптимальное управление при отсутствии случайного сигнала $\eta(t)$.

Рассмотрим приложение обобщенных функций Ляпунова в этом случае. Пусть матрица $B$ в системе (1.1) является не особой. В статье [9] показано, что в этом случае при $\eta = 0$ существует оптимальная функция Ляпунова $v^\circ(x)$, определенная при всех $x$ и имеющая при $x \neq 0$ непрерывные частные производные. (В статье [9] условие (4.2) не доказано для $v^\circ(x)$, но это условие можно здесь проверить.) Этой функции $v^\circ(x)$

соответствует оптимальное управление $U_x^\circ$. Если вычислить $d\mathrm{M}\{v^\circ\}/dt$ для этой же функции $v^\circ(x)$, то в силу системы (1.1) при случайном сигнале $\eta(t)$ и при допустимом управлении $U$, будем иметь

$$\left(\frac{d\mathrm{M}\{v^\circ\}}{dt}\right)_U = \sum_{i=1,\ j=1}^{n} \frac{\partial v^\circ}{\partial x_i}[a_{ij}x_j + b_{ij}u_j] + \lim_{\Delta t \to +0}\left[\frac{1}{\Delta t}\left(\mathrm{M}\{v(x_\eta(t+\Delta t))\} - v(x(t+\Delta t))\right)\right] \tag{5.1}$$

где $x_\eta(t)$ — случайная функция $x(t)$ (1.1), порожденая случайным $\eta(t)$ и $u(t)$.

Первое слагаемое имеет тот же вид, что и в случае $\eta(t) = 0$. Используя свойства дробового эффекта, пропущенного через линейный фильтр (1.1) [6], равенство $\mathrm{M}\{\eta(t)\} = 0$, а также свойство (4.2) и непрерывную дифференцируемость функции $v^\circ(x)$, можно проверить, что второе слагаемое в правой части (5.1) равно нулю.

Следовательно, действительно $\min(d\mathrm{M}\{v\}/dt)$ достигается в данном случае на том же управлении $U_x^\circ$, что и в случае $\eta = 0$.

§ 6. В этом параграфе описывается приближенный графический способ построения оптимальной функции Ляпунова $v(x, y)$ для системы второго порядка ($x, y$ — скаляры). При этом будем опираться на геометрическую интерпретацию функции Ляпунова, указанную Н. Г. Четаевым.

Рассмотрим систему второго порядка

$$\frac{dx}{dt} = \mu y + (1-\mu)u_2, \qquad \frac{dy}{dt} = -\mu(a_2x + a_1y) + u_1 + \mu\eta(t) \tag{6.1}$$

соответствующую оптимальной задаче для уравнения

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = u_1 + \eta(t) \tag{6.2}$$

при условиях

$$|u_1| \leqslant 1 \quad \text{при } \mu = 1 \tag{6.3}$$

Ограничимся случаем, когда функция $\eta(t)$ может принимать два значения $\eta_1$ и $\eta_2$ и вероятность $p_{lj}(\eta_l \to \eta_j)$ на интервале $(t, t+\Delta t)$ имеет вид: $p_{lj} = p\Delta t + o(\Delta t)$ ($p = \mathrm{const}$).

Предположим, что оптимальная обобщенная функция $v^\circ(x, \eta, \mu)$ зависит непрерывно от параметра $\mu$. В статье [9] непрерывная зависимость $v^\circ$ от $\mu$ доказана при $\eta = 0$. Здесь мы принимаем этот факт как гипотезу. Это имеет смысл, так как в результате построения во всяком случае получается обобщенная функция Ляпунова $v$, обеспечивающая попадание траектории в точку $x = y = 0$ с большой вероятностью при больших $t$ (см. лемму 4.1). Достаточность полученного быстродействия может быть проверена по конкретным условиям задачи.

Опишем построение функции $v^\circ$. Разобьем интервал $0 < \mu < 1$ на $n$ делений точками $\mu_0 = 0, \mu_1, \ldots, \mu_n = 1$. При $\mu_0 = 0$ значения $v^\circ(x, y, \eta_1, \mu_0)$ и $v^\circ(x, y, \eta_2, \mu_0)$ совпадают и линии уровня функций $v^\circ(x, y, \eta_l, \mu_0)$ строятся элементарно (см. [9]).

Предположим, что на плоскости $xy$ в области $D$ возможных отклонений $x, y$ построены линии уровня функций $v^\circ(x, y, \eta_1, \mu_i)$ и $v^\circ(x, y, \eta_2, \mu_i)$. Пусть эти линии уровня построены для значений $v^\circ = \mathrm{const} = k\tau_0$, где $\tau_0$ — достаточно малая положительная постоянная, $k = 1, 2, \ldots$ Предположим еще, что для функции $v^\circ(x, y, \eta_1, \mu_{i+1})$ построены линии[1] уровня $v^\circ = j\tau_0$ $(j = 1, \ldots, m)$. Опишем построение линии уровня

$$v^\circ(x, y, \eta_1, \mu_{i+1}) = (m+1)\tau_0$$

Если предполагать, что функция $v^\circ(x, y, \eta_1, \mu_{i+1})$ в окрестности точки $(x, y)$ дифференцируема, то согласно (4.12) в этой точке должны выполняться условия

$$\left(\frac{dM\{v^\circ\}}{dt}\right)_{U^\circ} = \min_{\|u\| \leqslant 1} \left[\frac{\partial v^\circ}{\partial x}\left[\mu_{i+1} y + (1 - \mu_{i+1}) u_2\right] + \frac{\partial v^\circ}{\partial y}\left[-\mu_{i+1}(a_2 x + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a_1 y - \eta_1) + u_1\right] + p\left[v^\circ(x, y, \eta_2, \mu_{i+1}) - v^\circ(x, y, \eta_1, \mu_{i+1})\right]\right] = -1 \qquad (6.4)$$

Будем предполагать в соответствии с нашей гипотезой, что малое изменение $\Delta\mu = \mu_{i+1} - \mu_i$ вызывает малое изменение функции $v^\circ$. Выбрав точку $x_0$, $y_0$ на линии $v^\circ(x, y, \eta_1, \mu_{i+1}) = m\tau_0$, можно построить точку $x_1, y_1$, лежащую на линии $v^\circ(x, y, \eta_1, \mu_{i+1}) = (m+1)\tau_0$. Координаты $x_1$, $y_1$ вычисляются по формуле

$$x_1 = x_0 + \Delta x_1, \qquad y_1 = y_0 + \Delta y_1 \qquad (6.5)$$

где

$$\Delta x_1 = -\tau_0(\mu_{i+1} y_0 + (1 - \mu_{i+1}) u_2^\circ)/\beta$$

$$\Delta y_1 = -\tau_0(-\mu_{i+1}(a_2 x_0 + a_1 y_0 - \eta_1) + u_1^\circ)/\beta \qquad (6.6)$$

$$\beta = -1 - p\left[v^\circ(x_0, y_0, \eta_2, \mu_i) - v^\circ(x_0, y_0, \eta_1, \mu_i)\right]$$

и числа $u_1^\circ$ и $u_2^\circ$ выбраны из того условия, что скалярное произведение векторов $\{u_1^\circ, u_2^\circ(1 - \mu_i)\}$ и $\{\partial v^\circ(x_0, y_0, \eta_1, \mu_i)/\partial y, \partial v^\circ(x_0, y_0, \eta_1, \mu_i)/\partial x\}$ в точке $x_0$, $y_0$ является наименьшим по $u_1$ и $u_2$, $u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1$. Выбрав достаточно большое число точек $(x_0, y_0)$ на кривой $v^\circ = m\tau_0$, построим этим путем достаточно много точек $(x_1, y_1) \in \{v^\circ = (m+1)\tau_0\}$. Соединяя эти точки плавной кривой, получим[2] линию $v^\circ = (m+1)\tau_0$. После построения нужного числа линий уровня функции $v^\circ(x, y, \eta_1, \mu_{i+1})$ можно аналогичным путем построить линии уровня $v^\circ(x, y, \eta_2, \mu_{i+1}) = \mathrm{const}$. Затем переходим к построению линий уровня функций $v^\circ(x, y, \eta_1, \mu)$ и $v^\circ(x, y, \eta_2, \mu)$ при $\mu = m + 2$ и т. д. до значения $\mu = \mu_n = 1$. Этим завершается построение линий уровня функций $v^\circ(x, y, \eta_1, 1)$ и $v^\circ(x, y, \eta_2, 1)$ на плоскости $xy$. Имея чертеж этих линий уровня, можно построить линию переключения для управляющей функции $u_1(t)$. В самом

[1] Линии уровня $v^\circ = \tau_0$ для всех функций $v^\circ$ можно строить, предполагая $x = 0$, $y = 0$ в правой части системы (6.1) и пренебрегая сменой значений $\eta$. Тогда задача построения линии $v = \tau_0$ решается элементарно.

[2] Здесь не рассматриваются случаи возможности самопересечения линий $v^\circ = \mathrm{const}$ и других осложнений, которые могут возникнуть при построениях.

деле, будем предполагать, что линии уровня $v^\circ(x, y, \eta_1, 1)$ построены на 1-м листе плоскости $x, y$, линии уровня $v^\circ(x, y, \eta_2, 1)$ — на 2-м листе. Кривые на каждом из листов, соединяющие точки, где касательная к линиям уровня параллельна оси $oy$, и будут кривыми переключения: функция $u_1(x, y)$ будет менять знак только при переходе через эти кривые [на данном листе, т. е. при данном $\eta = \eta_l$ $(l = 1, 2)$]. Функция $u_1(t)$ будет также изменять знак при смене значений $\eta_l$, когда изображающая точка $(x, y)$ переходит с одного листа плоскости $xy$ на другой лист, причем этой точке соответствуют на различных листах плоскости $xy$ области разного знака функции $u$.

Поступила 5 X 1959

ЛИТЕРАТУРА


1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.— Л., 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Гостехиздат, М.— Л., 1956.
3. Фельдбаум А. А. Оптимальные процессы в системах автоматического регулирования. Автоматика и механика, 1953, № 6.
4. Понтрягин Л. С. Оптимальные процессы регулирования. УМН, 1959, т. 14, вып. 1.
5. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Гостехиздат, М., 1957.
6. Лэнинг Дж. Х., Беттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. Изд-во иностр. лит-ры, М., 1958.
7. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Гостехиздат, М., 1954.
8. Гамкрелидзе Р. В. К теории оптимальных процессов. Докл. АН СССР, т. 116, вып. 1, 1957.
9. Красовский Н. Н. К теории оптимального регулирования. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 4.
10. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Гостехиздат, М.— Л., 1951.
11. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, М.— Л., Гос. изд.-во техн.-теорет. лит-ры, 1949.
12. Ахиезер Н., Крейн М. О некоторых вопросах теории моментов. Статья IV, стр. 171. ГОНТИ-НТВУ, 1938.
13. Lasalle J. P. Time optimal control systems. Proc. of. the National Acad of Sci., vol. 45, № 4, 1959.
14. Андреев Н. И. Определение оптимальной линейной динамической системы по критерию экстремума функционала частного вида. Автоматика и телемеханика, 1957, т. 18, № 7.
15. Четаев Н. Г. О выборе параметров устойчивой механической системы. ПММ, 1951, т. XV, вып. 3.
16. Лернер А. Я. О предельном быстродействии систем автоматического управления. Автоматика и телемеханика, 1954, т. XV, № 6.
17. Bellman R. Dynamic programming and stochastic control processes. Information and Control. vol. 1, p. p. 228—239, 1958.
18. Мищенко Е. Ф. и Понтрягин Л. С. Одна статистическая задача оптимального управления. ДАН, 1959, т. 128, № 5.