Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ

С. Н. Шиманов

(Свердловск)

В работе показано, что известные теоремы Ляпунова [1] и теорема Четаева [2] о неустойчивости могут быть перенесены на случай систем с запаздываниям по времени. Дан критерий неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени по первому приближению.

§ 1. Теорема о неустойчивости движения Четаева в применении к системам с запаздыванием. Рассмотрим уравнения возмущенного движения вида

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = X_i(x_1(t+\vartheta),\ldots, x_n(t+\vartheta), t) \qquad (i=1,\ldots,n) \tag{1.1}$$

где $X_i(x_1(\vartheta),\ldots,x_n(\vartheta),t)$ — функционалы, определенные на любых кусочно-непрерывных (с разрывами первого рода) функциях $x_i(\vartheta)$ при $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$, $X_i\ (0,\ldots,0,t) \equiv 0$.

Уравнения (1.1) представляют собой общий вид уравнений с запаздыванием по времени и называются уравнениями с последействием.

Для того чтобы определить производные $dx_i(t)/dt$ в данный момент t, необходимо знать $x_i(t)$ не только в момент времени t, но и во все моменты времени t на интервале $[t-\tau, t]$. Поэтому, как и в работах Н. Н. Красовского [3, 4], будем в качестве элемента траектории системы с запаздыванием принимать не вектор-функцию $x_i\ (x_0\ (\vartheta_0),\ t)$ в момент времени t, а вектор-отрезок траектории $x_i\ (x_0\ (\vartheta_0),\ t+\vartheta)\ (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant \leqslant 0)$. При этом решение естественно рассматривать как траекторию в функциональном пространстве C. Положим $x\ (t+\vartheta) = \{x_{it}\ (\vartheta)\}$, где $x_{it}\ (\vartheta)$ при фиксированном t представляет собой точку в функциональном пространстве — функцию, определенную на интервале $-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0$.

В функциональном пространстве системе уравнений (1.1) будет соответствовать система «обыкновенных» дифференциальных уравнений с операторной правой частью [3]:

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = R\ (x_t\ (\vartheta), t) \tag{1.2}$$

где

$$x_t\ (\vartheta) = \{x_{1t}\ (\vartheta),\ldots, x_{nt}\ (\vartheta)\} = \{x_1\ (t+\vartheta),\ldots, x_n\ (t+\vartheta)\}$$

$$R\ (x_t\ (\vartheta), t) = \begin{cases} \dfrac{dx_t(\vartheta)}{d\vartheta} & (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0) \\ X\ (x_{1t}\ (\vartheta),\ldots, x_{nt}\ (\vartheta), t) & (\vartheta = 0) \end{cases}$$

Оператор R определен при $t \geqslant \tau + t_0$, если начальная функция $x_0(\vartheta)$ — кусочно-непрерывна, и определен при $t \geqslant t_0$, если начальная функция дифференцируема (в момент $t = t_0$ под производной следует понимать правую производную).

Чтобы решить задачу о неустойчивости движения $x_t(\vartheta) \equiv 0$, надо: 1) установить критерий неустойчивости невозмущенного движения, предполагая возможными любые малые по норме дифференцируемые начальные возмущения; 2) установить область неустойчивости в пространстве дифференцируемых функций, принадлежность к которой начальной функции вызывает рост нормы решения, приводящий к неустойчивости движения $x \equiv 0$; 3) проверить, принадлежит ли хотя бы одно возможное в реальной системе возмущение области неустойчивости.

В настоящей работе предполагается, что все возмущения, дифференцируемые по t и малые по норме, возможны. Метод Ляпунова позволяет выделить область неустойчивости в функциональном пространстве. Естественно, что вопрос о том, принадлежит ли возможное возмущение реальной системы к области неустойчивости, в общем виде решить нельзя, пока нет общих критериев отбора таких возмущений.

Рассмотрим функционал $v(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t)$, определенный на любой кусочно-непрерывной функции

$$\{x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta)\} \qquad (-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$$

в области

$$\|x(\vartheta)\| < H, \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.3}$$

Как в теории Ляпунова, будем предполагать функционал $v(x(\vartheta), t)$ непрерывным по $x(\vartheta)$ и t. При подстановке в функционал $v(x(\vartheta), t)$ непрерывной функции $x_t(\vartheta)$ по времени из (1.3) получается непрерывная функция времени $v(t) = v(x_t(\vartheta), t)$. Относительно функционала v введем некоторые определения:

(1) Функционал $v(x(\vartheta), t)$ называется определенно-положительным, если можно указать непрерывную функцию $w(r)$, удовлетворяющую условиям [2]

$$v(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t) \geqslant w(\|x(\vartheta)\|) \tag{1.4}$$

$$w(r)\, r > 0, \qquad 0 < r \leqslant H, \qquad w(0) = 0$$

(2) Функционал $v(x(\vartheta), t)$ допускает бесконечно малый высший предел в (1.3), если можно указать непрерывную функцию $w_1(r)$, удовлетворяющую условиям

$$|v(x_1(\vartheta), \ldots, x_n(\vartheta), t)| \leqslant w_1(\|x(\vartheta)\|) \tag{1.5}$$

$$w_1(r)\, r > 0, \qquad 0 < r \leqslant H, \qquad w_1(0) = 0$$

(3) Под областью $v > 0$ будем понимать совокупность кусочно-непрерывных функций $x(\vartheta)$, которые удовлетворяют условиям

$$\|x(\vartheta)\| \leqslant H, \qquad v(x(\vartheta), t) > 0, \qquad t \geqslant t_0 \tag{1.6}$$

В частности, если v — знакоопределенный функционал в смысле определения (1), то область $v > 0$ совпадает с областью (1.3).

(4) Функционал v_1 допускает бесконечно малый высший предел в области $v > 0$, если он ограничен в области $v > 0$ и таков, что для всякого положительного ε, как бы мало оно ни было выбрано, найдется

такое отличное от нуля число λ, что при

$$t > t_0, \qquad \|x(\vartheta)\| < \lambda, \qquad v \geqslant 0 \tag{1.7}$$

будет выполняться неравенство

$$|v_1(x(\vartheta), t)| < \varepsilon$$

(5) Функционал v_1 называется знакоопределенным в области $v > 0$, если для произвольного положительного числа ε, как бы мало оно ни было выбрано, найдется такое отличное от нуля число η, что при $x(\vartheta)$, удовлетворяющих условию $v > \varepsilon$, имеет место неравенство

$$|v_1(x(\vartheta), t)| \geqslant \eta$$

Примером знакоопределенного в области $v > 0$ функционала будет функционал

$$v^0 = \lambda v + w \qquad (\lambda > 0)$$

где $w(x(\vartheta))$ — положительный функционал в $v > 0$ или тождественный нуль.

(6) Функционал $v_1(x(\vartheta), t)$ назовем нижним производным функционалом от функционала $v(x(\vartheta), t)$ в силу системы (1.2), если при подстановке в этот функционал любого решения $x_t(\vartheta)$ системы (1.2) из (1.6) имеет место равенство

$$\lim\,\inf\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{(1.1)} = v_1(x_t(\vartheta), t) \quad \text{при } \Delta t \to +0 \tag{1.8}$$

где индекс (1.1) обозначает номер системы, вдоль траекторий которой вычисляется предел $\Delta v / \Delta t$.

Теорема 1. Если дифференциальные уравнения (1.2) возмущенного движения таковы, что возможно найти функционал $v(x(\vartheta), t)$, ограниченный и допускающий бесконечно малый высший предел в области (1.6), существующей при всяком $t \geqslant t_0$ и включающей сколь угодно малые по норме дифференцируемые функции $x(\vartheta)$, нижний производный функционал $v_1(x(\vartheta), t)$ в силу системы (1.2) был бы определенно-положительным в области $v > 0$ (1.6), то невозмущенное движение $x_t(\vartheta) \equiv 0$ неустойчиво.

Доказательство. Допустим, что $v(x(\vartheta), t)$ — функционал, удовлетворяющий условиям теоремы. Тогда в области (1.6) будет выполняться неравенство

$$v(x(\vartheta), t) < L \tag{1.9}$$

где L — некоторая положительная постоянная.

Надо показать, что для заданного малого положительного числа $H_1 < H$ нельзя найти малого числа λ такого, чтобы при любых $\|x_0(\vartheta)\| < \lambda$ имело место неравенство $\|x_t(\vartheta)\| < H_1$ при $t \geqslant t_0$. Надо показать, что какое бы малое число λ мы ни выбирали, в $\|x_0(\vartheta)\| < \lambda$ найдется по крайней мере одна функция $x_0(\vartheta)$, для которой в некоторый момент $t = t_1$ будет иметь место равенство $\|x_{t_1}(\vartheta)\| = H_1$.

Допустим противное. Допустим, что найдется малое число λ, для которого выполнено условие: если

$$\|x_0(\vartheta)\| < \lambda \qquad (\lambda < H_1)$$

то

$$\|x_t(\vartheta)\| < H_1 \qquad (t \geqslant t_0) \tag{1.10}$$

Выберем начальное дифференцируемое возмущение $x_0(\vartheta)$, удовлетворяющее условиям

$$v(x_0(\vartheta), t_0) = v_0 > 0, \qquad \|x_0(\vartheta)\| = \lambda_1 < \lambda < H_1 \tag{1.11}$$

Пока точка $x_t(\vartheta)$ не покинула области (1.6), имеют место условия

$$v(x_t(\vartheta), t) \leqslant v_0 + \int_{t_0}^{t} v_1(x_t(\vartheta), t)\, dt < l_1(t - t_0) + v_0 \tag{1.12}$$

Так как в области $v > 0$ функционал v обладает бесконечно малым высшим пределом, то из условия $v(x_t(\vartheta), t) > v(x_0(\vartheta), t_0) = v_0 > 0$ следует, что, пока $x_t(\vartheta)$ не покинула области $v > 0$, $\|x_t(\vartheta)\| > \mu$, где μ — положительное число. Но в области $H_1 \geqslant \|x_t(\vartheta)\| \geqslant \mu$ $v \geqslant v_0$ — нижний производный функционал v_1, определенно-положительный в $v > 0$, будет удовлетворять условию $v_1(x_t(\vartheta), t) \geqslant l_1$, где l_1 — положительное число. Таким образом, имеет место оценка (1.12). Последнее противоречит условию (1.9) Отсюда вытекает, что движение $x_t(\vartheta)$ с начальной функцией, удовлетворяющей условиям (1.11), покидает в некоторый момент t область

$$\|x_t(\vartheta)\| < H_1, \qquad v(x_t(\vartheta), t) > 0, \qquad t \geqslant t_0$$

Покинуть $v(x_t(\vartheta), t) > 0$ движение $x_t(\vartheta)$, непрерывное по t, не может без нарушения непрерывности $v(x_t(\vartheta), t)$ по времени. Поэтому в некоторый момент времени t_1 имеет место равенство $\|x_{t_1}(\vartheta)\| = H_1$.

Таким образом, движение $x = 0$ неустойчиво.

Замечание. Если взять в качестве начального возмущения кусочно-непрерывную функцию и рассмотреть движение $x_t(\vartheta)$, ей соответствующее, то представятся две возможности.

1. По истечении времени τ движение $x_\tau(\vartheta)$ принадлежит $v > 0$. Тогда $x_\tau(\vartheta)$ будет дифференцируема уже по ϑ и можно утверждать, что $x_\tau(\vartheta)$ принадлежит области неустойчивости. В этом случае и соответствующая начальная кусочно-непрерывная функция принадлежит области неустойчивости.

2. По истечении времени τ $x_\tau(\vartheta)$ не принадлежит области $v > 0$. В этом случае будем говорить, что $x_\tau(\vartheta)$ и $x_0(\vartheta)$ не принадлежат области неустойчивости (даже если $v_0(x_0(\vartheta), t_0) > 0$).

Из доказанной теоремы легко получить две следующие теоремы о неустойчивости движения, являющиеся обобщением соответствующих теорем Ляпунова о неустойчивости движения на системы с запаздыванием.

Теорема 2 (первая теорема Ляпунова о неустойчивости). Если дифференциальные уравнения возмущенного движения (1.2) таковы, что возможно найти функционал $v(x(\vartheta), t)$, который обладает нижним производным определенно-положительным функционалом $v_1(x(\vartheta), t)$ в силу системы (1.2), v допускает бесконечно малый высший предел и при любых $t \geqslant t_0$ надлежащим выбором дифференцируемых начальных функций $x_0(\vartheta)$, сколь угодно малых по норме, функционал $v(x_0(\vartheta), t)$ можно сделать величиной одинакового знака с v_1, то движение $x = 0$ неустойчиво.

Теорема 3 (вторая теорема Ляпунова о неустойчивости). Если дифференциальные уравнения возмущенного движения (1.2) таковы, что возможно найти ограниченный функционал $v(x(\vartheta), t)$, нижний производный функционал от которого $v_1(x(\vartheta), t)$ в силу системы (1.2) имеет вид:

$$v_1(x(\vartheta), t) = \lambda v(x(\vartheta), t) + w(x(\vartheta), t)$$

где λ — положительная постоянная, а w или тождественно равен нулю, или представляет некоторый знакопостоянный положительный функционал u, если в последнем случае функционал $v(x(\vartheta), t)$ таков, что при всяком $t \geqslant t_0$ надлежащим выбором функций $x_0(\vartheta)$, сколь угодно малых по норме $\|x_0(\vartheta)\|$, ее можно сделать положительною величиной, то невозмущенное движение $x = 0$ неустойчиво.

§ 2. О неустойчивости движения по первому приближению для систем с последействием. Рассмотрим уравнение возмущенного движения

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\tau}^{0} x(t+\vartheta)\, d\eta(\vartheta) + X(x(t+\vartheta), t) \qquad \textbf{(2.1)}$$

Здесь интеграл в правой части уравнения (2.1) понимается в смысле Стильтьеса. В случае, когда $d\eta(\vartheta) = 0$ при $\vartheta \neq 0$, $\vartheta \neq -\tau$, $d\eta(0) = a_1$, $d\eta(-\tau) = a_2$, получается уравнение первого приближения с запаздыванием вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = a_1 x(t) + a_2 x(t-\tau) \qquad (2.2)$$

$X(x(t+\vartheta, t)$ — функционал, определенный на кусочно-непрерывных функциях $x(\vartheta)$, аргумента ϑ $(-\tau \leqslant \vartheta \leqslant 0)$. Будем предполагать, что функционал $X(x(\vartheta), t)$ удовлетворяет условиям Липшица по $x(\vartheta)$:

$$\| X(x_1(\vartheta), t) - X(x_2(\vartheta), t) \| < q \| x_1(\vartheta) - x_2(\vartheta) \| \qquad (2.3$$

где q может принимать сколь угодно малые положительные значения, если только $\|x_1(\vartheta)\|$ и $\|x_2(\vartheta)\|$ малы:

$$q < \left[\|x_1(\vartheta)\| + \|x_2(\vartheta)\| \right]^{\alpha} \qquad (\alpha > 0) \qquad (2.4)$$

Относительно t функции X будем предполагать непрерывными при $t \geqslant t_0 > 0$. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\Delta(\lambda) \equiv -\lambda + \int_{-\tau}^{0} e^{\lambda\vartheta} d\eta(\vartheta) = 0 \qquad (2.5)$$

Теорема 2.1. Если уравнение (2.5) имеет хотя бы один корень с положительной вещественной частью, то невозмущенное движение $x = 0$ системы (2.1) неустойчиво независимо от вида функционалов X.

Замечание 1. $\Delta(\lambda)$ представляет собой целую функцию, так как разлагается в степенной ряд с мажорантой $|\lambda| + A \exp \tau |\lambda|$ (здесь A — полная вариация $\eta(\vartheta)$ на интервале $(-\tau, 0)$).

Известно, что нули целых функций имеют единственную предельную точку на бесконечности и в любой ограниченной области их конечное число [5, 4].

Функция $\Delta(\lambda)$ подобна квазиполиному с главным членом, в который она обращается в частном случае для систем с запаздыванием (2.2). А именно, в правой полуплоскости λ и на мнимой оси функция $\Delta(\lambda)$ имеет конечное число нулей. В самом деле, для этого достаточно показать, что найдется такая окружность радиуса R, вне которой $|\Delta(\lambda)|$ будет ограничен снизу положительным числом на правой полуплоскости λ, включая и мнимую ось.

Имеем

$$|\Delta(\lambda)| = |\lambda|\cdot\left|-1+\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{e^{\lambda\vartheta}}{\lambda}\,d\eta(\vartheta)\right| > \tfrac{1}{2}R$$

если R настолько большое, что в правой полуплоскости выполняется λ условие

$$\left|\int\limits_{-\tau}^{0}\frac{e^{\lambda\vartheta}}{\lambda}\,d\eta(\vartheta)\right| < \tfrac{1}{2}$$

Последнее возможно, так как в правой полуплоскости, включая и мнимую ось, функция $\exp\lambda\vartheta$ ограничена, а $|\lambda|$ может быть сделано при достаточно большом R сколь угодно большим.

Замечание 2. Ради простоты доказательства будем предполагать корни с положительными вещественными частями простыми.

Доказательство. Уравнению возмущенного движения (2.1) эквивалентно обыкновенное уравнение с операторной правой частью

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta) + R(x_t(\vartheta), t) \tag{2.6}$$

где

$$Ax_t(\vartheta) = \begin{cases} \dfrac{dx_t(\nu)}{d\vartheta} & (-\tau \leqslant \vartheta < 0), \\ \int\limits_{-\tau}^{0} x_t(\vartheta)\,d\eta(\vartheta) & (\vartheta = 0), \end{cases} \qquad R(x_t(\vartheta), t) = \begin{cases} 0 & (-\tau \leqslant \vartheta < 0) \\ X(x_t(\vartheta), t) & (\vartheta = 0) \end{cases}$$

Пусть корни с положительной вещественной частью будут $\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_l$. Рассмотрим l линейных функционалов, соответствующих этим корням:

$$f_k[x_t(\vartheta)] \equiv x_t(0) - \int\limits_{-\tau}^{0}\left[\int\limits_{0}^{\vartheta} e^{(\vartheta-\xi)\lambda k}\, x_t(\xi)\,d\xi\right] d\eta(\vartheta) \qquad (k = 1, \ldots, l) \tag{2.7}$$

Допустим, что начальные функции решения дифференцируемы при $-\tau \leqslant t \leqslant 0$. Тогда операторное уравнение (2.6) справедливо при $t \geqslant 0$ (при $t = 0$ dx/dt — правая производная по t). При этом функционалы (2.7) удовлетворяют тождеству

$$f_k[Ax(\vartheta)] \equiv \lambda_k f_k[x(\vartheta)] \qquad (k = 1, \ldots, l) \tag{2.8}$$

$$f_k[x_t(\vartheta)] = f_k[x_0(\vartheta)] \exp\lambda_k t \qquad (t \geqslant 0) \tag{2.9}$$

для дифференцируемых $x_0(\vartheta)$ и решения $x_t(\vartheta)$ уравнения первого приближения

$$\frac{dx_t(\vartheta)}{dt} = Ax_t(\vartheta) \tag{2.10}$$

Лемма. Если для дифференцируемой функции $x_0(\vartheta)$ выполняются l условий

$$f_k[x_0(\vartheta)] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, l) \tag{2.11}$$

то соответствующее решение $x_t(\vartheta)$ (2.10) при всех $t > 0$ будет удовлетворять l условиям

$$f_k[x_t(\vartheta)] = 0 \tag{2.12}$$

и при неограниченном возрастании t будет убывать по норме по экспоненциальному закону с показателем

$$\theta\alpha = \min|\operatorname{Re}\lambda_j| \qquad (j = l+1, \ldots)$$

если остальные корни λ_{l+1}, $\lambda_{l+2}, \ldots$ с отрицательными вещественными частями, θ — положительное число меньше единицы. (Случай наличия мнимых корней приводится к рассматриваемому заменой $y \exp(\beta t) = x$.)

Доказательство леммы можно провести аналогично доказательству теоремы 29.1 работы [3]. Ибо выражение полугруппового оператора на функциях, удовлетворяющих условиям (2.11), будет определяться формулой (29.39) работы [3]. Выделим в функциональном пространстве $x_t(\vartheta)$ подпространство L, определенное условиями

$$f_k[x_t(\vartheta)] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, l)$$

Тогда всякий элемент $x_t(\vartheta)$ исходного функционального пространства будет представляться в виде

$$x_t(\vartheta) = z_t(\vartheta) + y \qquad (z_t(\vartheta) \in L,\ y \in l)$$

Сделаем разложение пространства $x_t(\vartheta)$ на два подпространства z и y следующим образом: (2.13)

$$y_k = f_k[x_t(\vartheta)] \quad (k = 1, \ldots, l), \qquad x_t(\vartheta) = z_t(\vartheta) + \frac{\exp \lambda_1 \vartheta}{\Delta'(\lambda_1)} y_1 + \ldots + \frac{\exp \lambda_l \vartheta}{\Delta'(\lambda_l)} y_l$$

Очевидно, что $f_k[z_t(\vartheta)] = 0$, так как имеют место тождества

$$[\Delta'(\lambda_j)]^{-1} f_k[\exp \lambda_j \vartheta] = \begin{cases} 1 & (j = k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

При этом система уравнений (2.10) перейдет в систему

$$\frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k \qquad (k = 1, \ldots, l) \tag{2.14}$$

$$\frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = Az_t(\vartheta), \qquad f_k[z_t(\vartheta)] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, l) \tag{2.15}$$

Соответствующая нелинейная система при замене x на y и z по формулам (2.13) будет иметь вид:

$$\frac{dy_k}{dt} = \lambda_k y_k + f_k[R(x_t(\vartheta))] \qquad (k = 1, \ldots, l) \tag{2.16}$$

$$\frac{dz_t(\vartheta)}{dt} = Az_t(\vartheta) + R(x_t(\vartheta), t) - \Delta'(\lambda_1)^{-1} \exp(\lambda_1 \vartheta) f_1[R(x, t)] - \cdots$$
$$\cdots - \Delta'(\lambda_l)^{-1} \exp(\lambda_l \vartheta) f_l[R(x_t(\vartheta), t)] \tag{2.17}$$

$$f_k[z_t(\vartheta)] = 0 \qquad (k = 1, \ldots, l)$$

где

$$x_t(\vartheta) = z_t(\vartheta) - \frac{\exp \lambda_1 \vartheta}{\Delta'(\lambda_1)} y_1 - \cdots - \frac{\exp \lambda_l \vartheta}{\Delta'(\lambda_l)} y_l$$

Очевидно, система (2.16), (2.17) представляет собой систему (2.6) в выделенных подпространствах $z_t(\vartheta)$ и $y(t)$.

Так как разложение $x_t(\vartheta)$ на $y(t)$ и $z_t(\vartheta)$ однозначно и из условия $x_t(\vartheta) = 0$ вытекает, что $y_k = 0$ и $z_t(\vartheta) = 0$, то решение системы (2.16) и (2.17) существует и единственно, если только существует и единственно решение системы (2.6) в соответствующей точке $x_0(\vartheta)$.

Рассмотрим систему (2.14). Для нее можно построить функцию v_1 в виде $v_1 = \lambda_1 y_1 \bar{y}_1 + \cdots + \lambda_l y_l \bar{y}_l$.

Функция v_1 — определенно-положительна и действительна в подпространстве y (конечномерном). Производная от v_1 вдоль любой траектории системы (2.14) будет определенно-положительна в подпространстве y:

$$\left(\frac{dv_1}{dt}\right)_{(2.14)} = \lambda_1 [(\lambda_1 + \bar{\lambda}_1) y_1 \bar{y}_1] + \cdots + \lambda_l [(\lambda_l + \bar{\lambda}_l) y_l \bar{y}_l] \tag{2.18}$$

Далее в подпространстве L для линейной системы (2.15) можно построить на основании результатов [3] (стр. 191—192) функционал $v_2(z_t(\vartheta))$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$c_1 \| z_t(\vartheta) \| < v_2(z_t(\vartheta),\ t) < c_2 \| z_t(\vartheta) \| \tag{2.19}$$

$$\limsup \left(\frac{\Delta v_2}{\Delta t}\right)_{(2.15)} \leqslant -c_3 \| z_t(\vartheta) \| \quad \text{при } \Delta t \to +0 \tag{2.20}$$

$$| v(z_t^{\bullet}(\vartheta),\ t) - v(z_t'(\vartheta),\ t) | \leqslant c_4 \| z_t^{\bullet}(\vartheta) - z_t'(\vartheta) \| \tag{2.21}$$

где $c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4$ — положительные числа.

Составим функционал $v^*(x_t(\vartheta),\ t)$ для полной системы (2.6) в виде

$$v^*(x_t(\vartheta),\ t) = 2\sqrt{v_1(y)} - v_2(z_t(\vartheta),\ t) \tag{2.22}$$

где y и $z_t(\vartheta)$ выражаются через $x_t(\vartheta)$ по формулам (2.13).

Нетрудно убедиться в том, что функционал v^* удовлетворяет всем условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости для систем с последействием (теорема 2). Вычислим нижний производный функционал от функции v^* в силу системы (2.6) (или (2.16) и (2.17)). Имеем

$$-\liminf_{\Delta t \to +0} \left(\frac{\Delta v^*}{\Delta t}\right)_{(2.6)} = -\left(\frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{dv_1}{dt}\right)_{(2.6)} - \liminf_{\Delta t \to +0} \left(\frac{-\Delta v_2}{\Delta t}\right)_{(2.6)} =$$

$$= -\left(\frac{1}{\sqrt{v_1}} \frac{dv_1}{dt}\right)_{(2.6)} + \limsup_{\Delta t \to +0} \left(\frac{\Delta v_2}{\Delta t}\right)_{(2.6)} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{v_1}} \sum_{j=1}^{l} \lambda_j 2 \operatorname{Re} \lambda_j y_j \bar{y}_j + \limsup_{\Delta t \to +t_0} \left(\frac{\Delta v_2}{\Delta t}\right)_{(2.15)} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{v_1}} \sum_{j=1}^{l} \lambda_j [y_j \bar{f}_j(X) + \bar{y}_j \cdot f(X)] + \lim \left[\left(\frac{\Delta v_2}{\Delta t}\right)_{(2.6)} - \left(\frac{\Delta v_2}{\Delta t}\right)_{(2.15)}\right] <$$

$$< -c\|y\| - c\|z_t(\vartheta)\| + \frac{lq}{c_6} \max |\lambda_j|\ \|x_t(\vartheta)\| + c_4 q \|x_t(\vartheta)\| <$$

$$< (-c + Dq)\|x_t(\vartheta)\| < -\tfrac{1}{2} c \|x_t(\vartheta)\|$$

где

$$c_6 \|y\| < \sqrt{v_1} < c_5 \|y\|$$

$$c = \min\left\{\frac{1}{c_5} \min\left|\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\ 2 \operatorname{Re} \lambda_j\ y\bar{y}\right| \ (\text{на } \|y\| = 1),\ c_3\right\}$$

$$D = \frac{l \max |\lambda_j|}{c_6} + c_4, \qquad \|y\| + \|z_t(\vartheta)\| \geqslant \|x_t(\vartheta)\|, \qquad c > 2qD \text{ при } \|x_t(\vartheta)\| < H_1$$

таким образом, нижний производный функционал от v^* в силу системы (2.6) будет определенно-положительным при достаточно малой величине

$\|x_t(\vartheta)\|$, так как выполнено неравенство

$$\lim_{\Delta t\to+0}\inf\left(\frac{\Delta v^*}{\Delta t}\right)_{(2.6)} > \frac{c}{2}\|x_t(\vartheta)\| \tag{2.23}$$

Рассмотрим функции

$$\overset{*}{x_0}(\vartheta) = \sum_{j=1}^{l}\frac{\exp\lambda_j\vartheta}{\Delta'(\lambda_j)}\eta \qquad (-\tau\leqslant\vartheta\leqslant 0)$$

где η — произвольное положительное число, выбирая которое достаточно малым, можно сделать $\|\overset{*}{x_0}(\vartheta)\|$ сколь угодно малой.

В подпространствах L и l функции $\overset{*}{x_0}(\vartheta)$ будут соответствовать функции $\overset{*}{z_0}(\vartheta)\equiv 0$, $y_j=\eta\exp\lambda_j\vartheta$ $(j=1,\ldots,l)$ и из (2.18) — (2.22) находим

$$v^*(\overset{*}{x_0}(\vartheta)) > 0 \tag{2.24}$$

Оценивая по норме y_k и $z_t(\vartheta)$, определенные (2.13), (2.7), найдем

$$\|y_k\| < A\|x_t(\vartheta)\|, \qquad \|z_t(\vartheta)\| < B\|x_t(\vartheta)\| \tag{2.25}$$

где A и B — положительные числа. Далее оценим по норме v^*; учитывая (2.25), (2.19), (2.18) и (2.22), найдем

$$\|v^*\| < N\|x_t(\vartheta)\|, \qquad N = l\max\{|\lambda_j|\}\sqrt{2}+c_2B \tag{2.26}$$

где N — некоторое положительное число. Из (2.26) следует, что функционал v^* допускает бесконечно малый высший предел в области $\|x_t(\vartheta)\|\leqslant H$, где H — некоторое положительное число.

Таким образом, v^* допускает нижний производный функционал, в силу системы (2.6) определенно-положительный (2.23), v^* допускает бесконечно малый высший предел (2.26) и существуют дифференцируемые начальные функции $\overset{*}{x_0}(\vartheta)$, сколь угодно малые по норме, для которых v^* принимает положительные значения (2.24). Поэтому v^* удовлетворяет всем условиям первой теоремы Ляпунова о неустойчивости движения (теорема 2). Поэтому движение $x=0$ системы (2.1) неустойчиво при любых X (удовлетворяющих указанным выше условиям).

Замечание 3. Нетрудно доказать теорему для случая непростых корней λ_j с положительными вещественными частями.

Замечание 4. Теорема о неустойчивости движения $x=0$ справедлива для систем n уравнений с последействием вида

$$\frac{dx_i(\vartheta)}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\int_{-\tau}^{0}x_j(t+\vartheta)\,d\eta_{ij}(\vartheta) + X_i(x_1(t+\vartheta),\ \ldots,\ x_n(t+\vartheta),\ t)$$

где $d\eta_{ij}(\vartheta)$, X — подобны соответствующим $d\eta(\vartheta)$ и X системы (2.1). Доказательство этого случая принципиально не отличается от доказательства теоремы (2.1).

Поступила 18 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Гостехиздат, М.— Л., 1950.
2. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2-е. Гостехиздат, 1956.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. Физматгиз, 1959.
4. Чеботарев Н. Г., Мейман Н. П. Проблема Рауса-Гурвица для полиномов и целых функций. Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова. Изд-во АН СССР, 1949.
5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, 1956.