

## ОДНА ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

В. В. Румянцев

(Москва)

1. Рассмотрим какую-нибудь голономную механическую систему. Пусть  $q_1, \dots, q_n$  — ее независимые лагранжевы координаты,  $q_1', \dots, q_n'$  — обобщенные скорости. Допустим, что уравнения движения системы имеют некоторое частное решение

$$q_i = f_i(t) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (1.1)$$

которому соответствует определенное движение рассматриваемой системы, называемое невозмущенным.

Обозначим через  $t_0$  начальный момент времени  $t$ , а через  $q_{i0}$  и  $q_{i0}'$  — начальные значения переменной  $q_i$  и ее производной по времени  $q_i'$

Пусть для невозмущенного движения

$$q_{i0} = f_i(t_0), \quad q_{i0}' = f_i'(t_0)$$

а для возмущенного движения

$$q_{i0} = f_i(t_0) + \varepsilon_i, \quad q_{i0}' = f_i'(t_0) + \varepsilon_i'$$

где  $\varepsilon_i, \varepsilon_i'$  — некоторые вещественные постоянные, называемые возмущениями. Заданием этих постоянных возмущенное движение полностью определяется, так как действующие на систему силы предполагаются неизменными [1].

Пусть для возмущенного движения значения координат  $q_i$  и обобщенных скоростей  $q_i'$  суть

$$q_i = f_i(t) + x_i, \quad q_i' = f_i'(t) + x_{n+i}$$

где  $x_j(t)$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ) обозначают отклонения, или вариации, переменных  $q_i$  и  $q_i'$ , удовлетворяющие уравнениям возмущенного движения

$$\frac{dx_j}{dt} = X_j(t, x_1, \dots, x_{2n}) \quad (j = 1, \dots, 2n) \quad (1.2)$$

Будем предполагать, что функции  $X_j(t, x_1, \dots, x_{2n})$  для всякого  $t \geq t_0$  разлагаются в сходящиеся степенные ряды по целым степеням переменных  $x_1, \dots, x_{2n}$  с коэффициентами, являющимися определенными вещественными непрерывными функциями времени  $t$ , причем  $X_j(t, 0, \dots, 0) = 0$ .

Допустим, нас интересует устойчивость невозмущенного движения (1.1) по отношению к некоторым данным непрерывным вещественным функциям  $Q_1, \dots, Q_k$  величин  $q_i, q_i'$  и времени  $t$ . Для невозмущенного движения функции  $Q_s$  после замены  $q_i = f_i(t)$  и  $q_i' = f_i'(t)$  обратятся в некоторые известные функции времени  $F_s(t)$ , а для возмущенного

движения будут некоторыми функциями времени  $t$  и возмущений  $\varepsilon_i, \varepsilon_i'$ . Рассматривая разности  $y_s = Q_s - F_s$ , Ляпунов назвал невозмущенное движение (1.1) устойчивым по отношению к величинам  $Q_1, \dots, Q_k$ , если при всяких  $L_s$ , как бы малы они ни были, могут быть выбраны положительные числа  $E_i, E_i'$  так, чтобы при всяких возмущениях  $\varepsilon_i, \varepsilon_i'$ , удовлетворяющих условиям

$$|\varepsilon_i| \leq E_i, \quad |\varepsilon_i'| \leq E_i'$$

и при всяком  $t \geq t_0$  выполнялись неравенства

$$|y_s| < L_s \quad (s = 1, \dots, k)$$

Далее будем предполагать [1], что всякой системе вещественных значений возмущений  $\varepsilon_i, \varepsilon_i'$ , численно достаточно малых, будет соответствовать некоторая система вещественных начальных значений  $y_{s0}$  переменных  $y_s$  и, как бы ни было мало данное положительное число  $A$ , последние всегда можно будет сделать удовлетворяющими неравенству

$$y_{10}^2 + \dots + y_{k0}^2 < A$$

подчиняя возмущения  $\varepsilon_i, \varepsilon_i'$  условию, чтобы они по абсолютной величине не превосходили достаточно малых отличных от нуля величин  $E_i, E_i'$ . И, наоборот, как бы ни были малы данные положительные числа  $E_i, E_i'$ , всегда возможно найти такое положительное число  $A$ , чтобы величине  $y_{10}^2 + \dots + y_{k0}^2 \leq A$  отвечали одна или несколько систем вещественных значений  $\varepsilon_i, \varepsilon_i'$ , абсолютные величины которых были бы соответственно меньше  $E_i$  и  $E_i'$ .

Так как переменные  $y_s$  представляют собой некоторые функции переменных  $t, x_j$ , уничтожающиеся, когда все  $x_j = 0$  ( $j = 1, \dots, 2n$ ), то области изменения вещественных переменных  $t, x_1, \dots, x_{2n}$

$$t \geq t_0, \quad x_1^2 + \dots + x_{2n}^2 \leq H \quad (1.3)$$

где  $t_0$  и  $H > 0$  — некоторые постоянные, будет отвечать область

$$t \geq t_0, \quad y_1^2 + \dots + y_k^2 \leq H_1 \quad (1.4)$$

изменения переменных  $t, y_s$ , где  $H_1 > 0$  — постоянная.

Предположим, что уравнения (1.2) допускают первый интеграл

$$\varphi(x_1, \dots, x_{2n}, t) = \text{const} \quad (1.5)$$

где  $\varphi(x_1, \dots, x_{2n}, t)$  — вещественная непрерывная ограниченная однозначная функция своих переменных в области (1.3), уничтожающаяся, когда все переменные  $x_j$  суть нули, и пусть для всех значений переменных  $t, x_j$  в области (1.3) и соответствующих значений переменных  $t, y_s$  в области (1.4) имеет место неравенство

$$\Phi(y_1, \dots, y_k, t) \leq \varphi(x_1, \dots, x_{2n}, t) \quad (1.6)$$

Здесь  $\Phi(y_1, \dots, y_k, t)$  — вещественная непрерывная ограниченная однозначная функция своих переменных в области (1.4), уничтожающаяся, когда все  $y_s$  суть нули. Докажем, что справедлива следующая теорема.

**Теорема.** Если дифференциальные уравнения возмущенного движения (1.2) допускают первый интеграл (1.5) и возможно найти определенно-положительную функцию  $\Phi(y_1, \dots, y_k, t)$  такую, что имеет место неравенство (1.6) для всех значений переменных  $t, x_j$  в области (1.3) и

соответствующих значений переменных  $t, y_s$  в области (1.4), то невозмущенное движение (1.1) устойчиво по отношению к величинам  $Q_1, \dots, Q_k$ .

*Доказательство.* [1] По определению знакоопределенной функции найдется не зависящая от  $t$  определенно-положительная функция  $W(y_1, \dots, y_k)$  такая, что в области (1.4) будет справедливо неравенство

$$\Phi(y_1, \dots, y_k, t) \geq W(y_1, \dots, y_k) \quad (1.7)$$

Пусть  $A > 0$  — произвольно малое число, меньшее  $H_1$ , пусть  $l$  — точная низшая граница функции  $W$  на сфере  $(A)$ :

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 = A$$

Число  $l$ , очевидно, положительно, так как  $W$  представляет собой определенно-положительную функцию.

Рассмотрим функцию  $\varphi(x_1, \dots, x_{2n}, t_0)$ ; она, как не зависящая явно от времени, допускает бесконечно малый высший предел и, следовательно, для  $l$  найдутся такие числа  $\lambda$  и  $\lambda_1$ , что для значений переменных  $x_j$ , соответственно  $y_s$ , удовлетворяющих условию  $x_1^2 + \dots + x_{2n}^2 \leq \lambda$ , соответственно  $y_1^2 + \dots + y_k^2 \leq \lambda_1$ , значения функций  $\Phi(y_1, \dots, y_k, t_0)$  и  $\varphi_1(x_1, \dots, x_{2n}, t_0)$  будут удовлетворять условиям

$$\Phi(y_1, \dots, y_k, t_0) \leq \varphi(x_1, \dots, x_{2n}, t_0) < l$$

Если начальные значения переменных  $x_j$ , соответственно  $y_s$ , выбрать согласно неравенству  $x_{10}^2 + \dots + x_{2n,0}^2 \leq \lambda$ , соответственно неравенству  $y_{10}^2 + \dots + y_{k0}^2 \leq \lambda_1$ , то по условиям теоремы имеем неравенства

$$W(y_1, \dots, y_k) \leq \Phi(y_1, \dots, y_k, t) \leq \varphi(x_1, \dots, x_{2n}, t) < l \quad (1.8)$$

Отсюда заключаем, что при своих изменениях переменные  $y_s$  удовлетворяют условию

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 < A$$

так как  $l$  — точная низшая граница функции  $W$  на сфере  $(A)$ . Теорема доказана.

*Замечание.* Если вместо (1.6) имеет место неравенство

$$\Phi(y_1, \dots, y_k, t) \leq \varphi(x_1, \dots, x_{2n}, t) + C \quad (C \geq 0)$$

то при надлежащем выборе  $x_{i0}$  во все время движения, будем иметь неравенство  $y_1^2 + \dots + y_k^2 < A$ , где  $A$  такое число, что точная низшая граница функции  $W$  на сфере  $(A)$  превышает число  $C$ .

В качестве примера рассмотрим хорошо изученную задачу об устойчивости вращения вокруг вертикали тяжелого твердого тела в случае Лагранжа [1].

Пусть  $p, q, r$  — проекции мгновенной угловой скорости твердого тела на его главные оси инерции для неподвижной точки,  $\gamma, \gamma', \gamma''$  — направляющие косинусы вертикали относительно главных осей инерции. Проекции кинетического момента тела на эти оси суть

$$G_1 = Ap, \quad G_2 = Aq, \quad G_3 = Cr$$

где  $A, C$  — главные моменты инерции твердого тела для его неподвижной точки.

Исследуем устойчивость вращения тела вокруг вертикали

$$p = q = 0, \quad r = r_0, \quad \gamma = \gamma' = 0, \quad \gamma'' = 1 \quad (1.9)$$

по отношению к величинам  $G_1, G_2, G_3, \gamma, \gamma', \gamma''$ , полагая {в возмущенном движении

$$G_3 = G + \kappa, \quad \gamma'' = 1 + \delta \quad (G = Cr_0)$$

и сохраняя прежние обозначения для остальных переменных.

В силу очевидного неравенства

$$G_1^2 + G_2^2 + x^2 \leq D (Ap^2 + Aq^2 + C\zeta^2) \quad (x = C\zeta)$$

где  $D$ —наибольшая из двух величин  $A$  и  $C$ , для возмущенного движения значения функции

$$\Phi \equiv \frac{1}{D} (G_1^2 + G_2^2 + x^2) + 2\lambda (G_1\gamma + G_2\gamma' + x\delta) - (mgz + G\lambda) (\gamma^2 + \gamma'^2 + \delta^2) \quad (1.10)$$

не превышают значений функции

$$\varphi \equiv V_1 + 2\lambda V_2 - (mgz + G\lambda) V_3 - 2(G + C\lambda) V_4 = \text{const}$$

где  $V_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) — первые интегралы уравнений возмущенного движения (см. [1], стр. 27),  $\lambda$  — постоянная,  $mg$  — вес тела,  $z$  — координата центра тяжести.

Согласно доказанной выше теореме условия определенной положительности функции (1.10) дадут достаточные условия устойчивости невозмущенного движения (1.9); последние приводятся к одному неравенству

$$G^2 - 4Dmgz > 0 \quad (1.11)$$

Очевидно, если выполнено это неравенство, то выполняется условие Майевского  $C^2r_0^2 - 4Amgz > 0$ ; последнее, как известно, необходимо и достаточно для устойчивости (1.9).

2. Доказанная выше теорема может оказаться полезной для применения второго метода Ляпунова к задачам об устойчивости движения сплошной среды по отношению к конечному числу некоторых параметров, интегральным образом характеризующих ее движение [2]. Такими параметрами могут быть, например, координаты центра тяжести ограниченного объема сплошной среды или проекции ее количества движения на некоторые оси и т. п. величины, изменения которых со временем описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Устойчивость движения сплошной среды по отношению к указанным параметрам будем называть условной устойчивостью движения сплошной среды.

В качестве примера рассмотрим задачу об устойчивости вращательных движений твердого тела с полостью, наполненной жидкостью, по отношению к параметрам, характеризующим движение твердого тела, и проекциям момента количества движения жидкости [2].

Рассмотрим свободное твердое тело, имеющее полость, наполненную полностью или частично (с пузырьком) однородной несжимаемой идеальной жидкостью. Для простоты предположим, что центральный эллипсоид инерции твердого тела есть эллипсоид вращения, а полость имеет форму произвольного тела вращения с той же самой осью вращения, что и эллипсоид инерции тела. Если жидкость имеет свободную поверхность, то давление на ней предполагается постоянным. Будем также предполагать, что движение жидкости совершается сплошным образом, причем скорости частиц жидкости и давление являются непрерывными функциями координат.

Так как среди возможных перемещений тела и жидкости в его полости существуют вращения вокруг любой прямой, а также поступательные перемещения всей системы тело + жидкость как одного твердого тела, имеет место теорема о моменте количества движения системы в ее движении по отношению к центру масс системы, т. е. по отношению к системе координат  $O_1x_1y_1z_1$  с началом в центре масс тела и жидкости  $O_1$  и осями, параллельными неподвижным осям. Это обстоятельство позволяет рас-

смаатривать в задаче об устойчивости вращательных движений твердого тела с полостью, наполненной жидкостью, одни относительные движения, как если бы центр масс  $O_1$  системы был неподвижным.

Введем в рассмотрение еще одну систему прямоугольных осей координат  $Oxyz$ , жестко связанную с твердым телом.

В случае, если жидкость полностью заполняет полость тела, начало  $O$  этой подвижной системы координат совместим с центром  $O_1$  масс системы, а оси направим по главным осям инерции твердого тела для его точки  $O$ . В случае, когда жидкость в полости имеет свободную поверхность, давление на которой постоянно, за начало  $O$  примем центр масс твердого тела, а оси координат направим по его главным центральным осям инерции. В обоих случаях ось  $Oz$  будем совмещать с осью вращения центрального эллипсоида инерции тела и его полости. Моменты инерции тела относительно осей  $x, y, z$  будем обозначать через  $A = B, C$ , а направляющие косинусы оси неизменного направления  $O_1z_1$  относительно подвижных осей через  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ .

Чтобы остановиться на чем-либо определенном, будем рассматривать случай, когда центр масс системы движется прямолинейно с постоянной скоростью. Этот случай является известным приближением для небольших участков настильных траекторий снарядов. И так же, как в задаче об устойчивости вращательных движений снаряда с твердым снаряжением, в нашей задаче об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением будем предполагать, что на тело действует лишь опрокидывающая пара сил давления воздуха [3]. Момент этой пары примем пропорциональным синусу угла между осью  $Oz$  тела и направлением скорости движения центра масс системы  $O_1$ ; проекции момента пары на оси  $x, y, z$  пусть будут равны  $L_1 = a\gamma_2, L_2 = -a\gamma_1, L_3 = 0$ , где  $a = \text{const}$ . При этом предполагается, что ось  $O_1z_1$  направлена по скорости центра масс  $O_1$  системы. Делая указанные предположения и не входя в их обоснование, отметим лишь, что они будут тем точнее, чем меньше объем воздушного пузырька в жидкости, наполняющей полость.

Из общих теорем в относительном движении механической системы около ее центра масс можно установить некоторые первые интегралы уравнений движения твердого тела с полостью, наполненной жидкостью.

В движении системы относительно осей  $O_1x_1y_1z_1$  действительные перемещения твердого тела и жидкости в его полости находятся среди возможных перемещений системы. Так как при сделанных предположениях о силах давления воздуха последние допускают силовую функцию  $U = -a\gamma_3$ , то в относительном движении системы существует закон живых сил

$$T_1 + T_2 + a\gamma_3 = \text{const} \quad (2.1)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — кинетические энергии тела и жидкости в их движении относительно системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ .

Если обозначить через  $v_1, v_2, v_3$  и  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  проекции на подвижные оси векторов  $\mathbf{v}_0$  скорости точки  $O$  тела и  $\boldsymbol{\omega}$  — мгновенной угловой скорости тела соответственно, то будем иметь

$$2T_1 = M_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C\omega_3^2$$

где  $M_1$  — масса твердого тела. В случае, когда жидкость полностью заполняет полость,  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$  очевидно.

Обозначая через  $\rho$  плотность жидкости и через  $v_x, v_y, v_z$  — проекции на подвижные оси скорости  $\mathbf{v}$  частиц жидкости в ее движении относительно системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ , будем иметь

$$2T_2 = \rho \int_{\tau} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) d\tau$$

где  $\tau$  — область пространства  $xyz$ , занятая в данный момент жидкостью.

Сила давления воздуха на тело при сделанных предположениях не имеет момента относительно оси  $O_1z_1$ , так что в относительном движении системы существует интеграл площадей

$$(A\omega_1 + g_1)\gamma_1 + (A\omega_2 + g_2)\gamma_2 + (C\omega_3 + g_3)\gamma_3 = \text{const} \quad (2.2)$$

где через

$$g_1 = \rho \int_{\tau} (yv_z - zv_y) d\tau, \quad g_2 = \rho \int_{\tau} (zv_x - xv_z) d\tau, \quad g_3 = \rho \int_{\tau} (xv_y - yv_x) d\tau \quad (2.3)$$

обозначены проекции на подвижные оси момента количеств движения жидкости в ее движении относительно осей координат  $O_1x_1y_1z_1$ .

Так как количество относительного движения системы

$$M_1\mathbf{v}_0 + \rho \int_{\tau} \mathbf{v} d\tau = 0$$

то момент количеств относительного движения системы один и тот же для всех точек пространства. Выпишем также очевидное равенство

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1 \quad (2.4)$$

для направляющих косинусов оси  $O_1z_1$ .

Для полостей в форме тел вращения момент сил давления идеальной жидкости и воздуха в полости тела относительно оси  $Oz$  равен, очевидно, нулю. Так как  $A = B$  и  $L_3 = 0$ , то во все время движения проекция мгновенной угловой скорости тела на ось  $Oz$  остается постоянной:

$$\omega_3 = \text{const} \quad (2.5)$$

Среди действительных движений твердого тела с полостью, наполненной идеальной жидкостью, имеются равномерные вращения твердого тела с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $Oz$ , коллинеарной при этом оси  $O_1z_1$ , тогда как движение жидкости является установившимся и таким, что проекции момента количеств движения ее на оси  $x$  и  $y$  равны нулю, а на ось  $Oz$  — некоторой постоянной  $g$ . Так как жидкость по предположению лишена вязкости, а полость имеет форму тела вращения, то при вращении тела вокруг оси  $Oz$  среди таких установившихся движений ее возможно, в частности, равновесие по отношению к системе координат  $Ox_1y_1z_1$ ; при этом  $g = 0$ . Возможен также при определенных условиях другой крайний случай, когда жидкость вращается как одно твердое тело с угловой скоростью  $\omega$ ; при этом

$$g = \omega\rho \int (x^2 + y^2) d\tau$$

где  $\tau_0$  — область, занятая жидкостью в этом движении.

Рассмотрим устойчивость вращательных движений твердого тела и соответствующего установившегося движения жидкости в его полости:

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = \omega, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1 \\ v_1 = v_2 = v_3 = 0, \quad g_1 = g_2 = 0, \quad g_3 = g \end{aligned} \quad (2.6)$$

по отношению к величинам  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, g_1, g_2, g_3, v_1, v_2, v_3$ . В случае, когда жидкость полностью заполняет полость, устойчивость будем рассматривать по отношению к первым девяти из этих величин.

В возмущенном движении положим

$$\omega_3 = \omega + \xi, \quad g_3 = g + \eta, \quad \gamma_3 = 1 + \zeta$$

а для остальных переменных сохраним прежние обозначения. Интегралы (2.1), (2.2), (2.4), (2.5) для возмущенного движения примут вид:

$$\begin{aligned} V_1 &= M_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C(\xi^2 + 2\omega\xi) + 2T_2 + 2a\zeta = \text{const} \\ V_2 &= (A\omega_1 + g_1)\gamma_1 + (A\omega_2 + g_2)\gamma_2 + C\xi + \eta + C(\omega + \xi)\zeta + (g + \eta)\zeta = \text{const} \\ V_3 &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \zeta^2 + 2\zeta = 0, \quad V_4 = \xi = \text{const} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Введем в рассмотрение также функцию

$$\begin{aligned} H_1 &\equiv M_1(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + A(\omega_1^2 + \omega_2^2) + C(\xi^2 + 2\omega\xi) + \\ &+ \frac{1}{S}(g_1^2 + g_2^2 + 2g\eta + \eta^2) + 2a\zeta \end{aligned}$$

где  $S$  — величина, пропорциональная наибольшему из главных моментов инерции жидкости в полости для точки  $O$ .

В силу установленного Ляпуновым неравенства  $g_1^2 + g_2^2 + g_3^2 \leq 2T_2S$  можно утверждать, что

$$H_1 \leq V_1 = \text{const} \quad (2.8)$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} V &= H_1 + 2\lambda V_2 - (a + C\omega\lambda + g\lambda)V_3 - 2C(\omega + \lambda)V_4 + \frac{C(C-A)}{A}V_4^2 = \\ &= A\omega_1^2 + 2\lambda(A\omega_1 + g_1)\gamma_1 - (a + C\omega\lambda + g\lambda)\gamma_1^2 + \frac{1}{S}g_1^2 + M_1v_1^2 + \\ &+ A\omega_2^2 + 2\lambda(A\omega_2 + g_2)\gamma_2 - (a + C\omega\lambda + g\lambda)\gamma_2^2 + \frac{1}{S}g_2^2 + M_1v_2^2 + \frac{C^2}{A}\xi^2 + \\ &+ 2\lambda(C\xi + \eta)\zeta - (a + C\omega\lambda + g\lambda)\zeta^2 + \frac{1}{S}\eta^2 + M_1v_3^2 + 2\left(\frac{g}{S} + \lambda\right)\eta \end{aligned} \quad (2.9)$$

представляющую собой сумму трех однотипных квадратичных форм от четырех переменных каждая и линейной относительно переменной  $\eta$  функции;  $\lambda$  — постоянная. Согласно критерию Сильвестра для положительной знакоопределенности квадратичной части функции  $V$  необходимо и достаточно постоянную  $\lambda$  выбрать так, чтобы

$$(A + S)\lambda^2 + (C\omega + g)\lambda + a < 0 \quad (2.10)$$

Последнее возможно, если полином, стоящий в (2.10) слева, имеет два различных вещественных корня  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , т. е. если

$$(C\omega + g)^2 - 4(A + S)a > 0 \quad (2.11)$$

При выполнении условия (2.11) постоянную  $\lambda$  можно выбрать произвольной из интервала  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ ; если при этом будем также иметь

$$(g/S + \lambda)\eta \geq 0 \quad (2.12)$$

то функция  $V$  будет определенно-положительной по отношению ко всем своим переменным.

В силу неравенства (2.8)

$$V \leq V_1 + 2\lambda V_2 - (a + C\omega\lambda + g\lambda)V_3 - 2C(\omega + \lambda)V_4 + \frac{C(C-A)}{A}V_4^2$$

Следовательно, при выполнении условий (2.11), (2.12) функция  $V$  удовлетворяет доказанной выше теореме.

Таким образом, условия (2.11), (2.12) можно рассматривать как достаточные условия устойчивости невозмущенного движения системы (2.6) по отношению к величинам  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, g_1, g_2, g_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, v_1, v_2, v_3$ . Отметим, что если положить  $\lambda = -g/S$ , то условие (2.12) будет выполнено, а неравенство (2.10) примет вид:

$$\left(C\omega - A\frac{g}{S}\right)\frac{g}{S} - a > 0 \quad (2.13)$$

и будет единственным достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (2.6).

Если положить  $\lambda = -2a/C\omega$ , то неравенства (2.10) и (2.12) примут вид данных в работе [2] условий устойчивости (2.12) и (2.13).

Легко также видеть [2], что если движение жидкости, полностью заполняющей полость, будет все время безвихревым с потенциалом скоростей  $\varphi$ , то условие (2.12) выполняется.

Покажем, наконец, что условие (2.11) является достаточным условием устойчивости невозмущенного движения (2.6) в первом приближении. В самом деле, выпишем третье из уравнений возмущенного движения системы [2]:

$$\frac{d\eta}{dt} + \omega_1 g_2 - \omega_2 g_1 = 0$$

Считая  $\omega_1, \omega_2, g_1, g_2$  малыми первого порядка и пренебрегая их произведениями, получим интеграл уравнения в вариациях

$$V_5 = \eta = \text{const}$$

Рассмотрим функцию

$$W = V - 2\left(\frac{g}{S} + \lambda\right)V_5 \quad (2.14)$$

где функция  $V$  определена равенством (2.9). Очевидно, необходимым и достаточным условием положительной знакоопределенности функции (2.14) является условие (2.11), что и доказывает наше утверждение.

Поступила 14 XI 1959

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г., Устойчивость движения. Гостехиздат, 1955.
2. Румянцев В. В. Об устойчивости вращательных движений твердого тела с жидким наполнением. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 6.
3. Четаев Н. Г. Об устойчивости вращательных движений твердого тела, полость которого наполнена идеальной жидкостью. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 2.