Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ОБЗОР НАУЧНЫХ РАБОТ Н. Г. ЧЕТАЕВА

Николай Гурьевич Четаев занимался принципиальными и трудными вопросами аналитической динамики, теории устойчивости движения, математической физики, теории дифференциальных уравнений.

В научной деятельности Н. Г. Четаев руководствовался суждением, что «только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями... и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев» ([1]).

Исследования Н. Г. Четаева отличаются строгостью в постановке задачи и безупречностью решений. Следуя Ляпунову, Н. Г. Четаев считал, что «непозволительно пользоваться сомнительными суждениями, коль скоро мы решаем определенную задачу, будь то задача механики или физики — все равно, которая поставлена совершенно определенно с точки зрения анализа. Она становится тогда задачей чистого анализа и должна трактоваться как таковая» ([2]).

Н. Г. Четаев писал свои работы весьма сжато, местами лаконично, поэтому чтение его работ требует большой подготовки и внимания со стороны читателя. Трудности чтения его работ вызываются также принципиальными трудностями рассматриваемых им вопросов.

В исследованиях Н. Г. Четаева тесно переплетаются аналитическая динамика, устойчивость движения, теория дифференциальных уравнений, поэтому разделы: 1) аналитическая динамика, 2) теория устойчивости движения, 3) работы по качественным методам анализа, 4) прикладные задачи, принятые при построении обзора, носят условный характер [1].

I. Аналитическая динамика

Работы Н. Г. Четаева по аналитической механике можно подразделить на четыре цикла: принцип Гаусса и его видоизменения, уравнения динамики в групповых переменных, устойчивые траектории динамики и оптико-механическая аналогия.

1. В 1829 г. Гаусс опубликовал теорему, носящую ныне название принципа Гаусса; она была сформулирована им следующим образом: «Движение системы материальных точек, связанных между собой произвольным образом и подверженных любым влияниям, в каждое мгновение происходит в наиболее совершенном, какое только возможно, согласии с тем движением, каким обладали бы эти точки, если бы все они стали свободными, т. е. оно происходит с наименьшим возможным принуждением, если в качестве меры принуждения, примененного в течение бесконечно малого мгновения, принять сумму произведений массы каждой точки на квадрат величины ее отклонения от того положения, которое она заняла бы, если бы была свободной».

Принцип Гаусса привлек к себе внимание ряда ученых. В частности, Аппель и Делассю применяли этот принцип при изучении механических систем с нелинейными неголономными связями. Однако при принятом ими определении возможных перемещений для таких систем принцип Гаусса оказался несовместным с принципом Даламбера — Лагранжа.

---

[1] В квадратных скобках указывается номер по списку работ Н. Г. Четаева, в круглых скобках указывается литература: ([1]) Ляпунов А. М. Пафнутий Львович Чебышев. Сообщ. Харьк. матем. общ., т. VI, 1895; ([2]) Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Харьков, 1892; 2-е изд. М.—Л., 1935; изд. АН СССР, 1948; Гостехиздат, М.—Л., 1950.

В Казани интересовались принципом Гаусса: Е. А. Болотов дал в 1918 г. весьма изящное развитие принципа Гаусса для линейных неголономных систем. Естественно, что к этому вопросу было привлечено и внимание Н. Г. Четаева.

В студенческой работе [4] Н. Г. Четаев применил принцип Гаусса к решению весьма трудной задачи о том, по какой из возможных ветвей равновесия будет развиваться масса вращающейся жидкости в окрестности точки бифуркации [1].

Принцип Даламбера — Лагранжа вытекает из аксиомы определения гладких связей, и противоречие с принципом Гаусса возникло в аналитической механике в процессе развития новых представлений о связях (переход от линейных неголономных к нелинейным), которые потребовали новых представлений о возможных перемещениях. Н. Г. Четаев дал обобщение этого основного понятия аналитической механики [14], которое позволило сохранить принцип Гаусса в рамках принципа Даламбера — Лагранжа.

Другой заслугой Н. Г. Четаева, связанной с принципом Гаусса, явилось развитие новой точки зрения на освобождение материальных систем. Как известно, принцип Гаусса связан с особым преобразованием материальных систем — освобождением материальных систем от всех их связей. В механике неоднократно делались попытки обобщить гауссово понятие освобождения, а вместе с ним и принцип Гаусса. До Н. Г. Четаева рассматривались две формы освобождения: полное и частичное освобождения. При первом система освобождается от всех своих связей, при втором она освобождается только от части связей. Н. Г. Четаев предложил называть освобождением материальной системы всякое ее преобразование, подчиняющееся определенному математическому алгоритму (параметрическое освобождение материальных систем).

В работе [14] рассматривается механическая система с k степенями свободы, подчиненная неголономным нелинейным связям, явно зависящим от времени. Положение системы в данный момент времени определяется прямоугольными декартовыми (x_i, y_i, z_i) или обобщенными независимыми координатами $q_1, \ldots, q_k$; скорости точек для действительного движения системы равны

$$x_i' = a_i(t, q_s, q_s'), \qquad y_i' = b_i(t, q_s, q_s'), \qquad z_i' = c_i(t, q_s, q_s')$$
$$(i = 1, \ldots, n; \ s = 1, \ldots, k)$$

где штрих означает производную по времени.

Н. Г. Четаев определяет возможные перемещения аксиоматически следующими равенствами:

$$\delta x_i = \sum \frac{\partial a_i}{\partial q_s'} \delta q_s, \qquad \delta y_i = \sum \frac{\partial b_i}{\partial q_s'} \delta q_s, \qquad \delta z_i = \sum \frac{\partial c_i}{\partial q_s'} \delta q_s$$

где δq_s — произвольные бесконечно малые величины.

Нетрудно теперь показать, что при таком определении возможных перемещений из принципа Даламбера, если его ввести как следствие аксиомы определения гладких связей, вытекает принцип Гаусса.

В самом деле, пусть dx_i', dy_i', dz_i' обозначают изменения скоростей точек системы за время dt в действительном движении; $\delta x_i', \delta y_i', \delta z_i'$ — изменения скоростей при мыслимом движении, при тех же координатах и скоростях в момент времени t, что и в действительном движении; $\partial x_i', \partial y_i', \partial z_i'$ — изменения скоростей в освобожденном движении.

Тогда из принципа Даламбера — Лагранжа получается уравнение

$$A_{d\delta} + A_{d\partial} - A_{\partial\delta} = 0$$

где $A_{d\delta} = \sum m_i \left[(dx_i' - \delta x_i')^2 + (dy_i' - \delta y_i')^2 + (dz_i' - \delta z_i')^2\right]$ — мера отклонения движения (d) от (δ) за время dt. Аналогично определяются величины $A_{d\partial}$ и $A_{\partial\delta}$.

---

[1] Эта работа Н. Г. Четаева будет затронута ниже.

Отсюда непосредственно получается известная теорема Маха для нелинейных неголономных связей

$$A_{d\partial} < A_{\delta\partial}$$

в которой содержится как частный случай принцип Гаусса, если за движение (∂) принять движение системы, полностью освобожденной от связей.

Кроме того, получается еще одна теорема, впервые отмеченная Н. Г. Четаевым:

$$A_{d\delta} < A_{\delta\partial}$$

Таким образом Н. Г. Четаев, введя новое определение возможных перемещений, которое является наиболее общим из всех известных в настоящее время, решил одну из важных задач аналитической механики.

Определение возможных перемещений по Четаеву получило в настоящее время всеобщее признание.

К исследованиям Н. Г. Четаева по принципу Гаусса примыкает работа Н. Е. Кочина «Об освобождении механических систем», в которой определение возможных перемещений производится по Н. Г. Четаеву.

В дальнейшем Н. Г. Четаев предложил оригинальное видоизменение принципа Гаусса.

Им рассматривается механическая система, стесненная линейными гладкими связями [25], для нее подсчитывается работа T_μ на элементарном цикле, состоящем из прямого мыслимого (по Гауссу) движения в поле действующих на систему сил и движения обратного в поле сил, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы механическая система была совершенно свободной.

Применением принципа Гаусса доказывается, что работа T для аналогичного цикла, построенного для действительного движения, является экстремумом T_μ.

Эта теорема равносильна, таким образом, принципу Гаусса. Она позволяет расширить характер обычно рассматриваемых механических систем путем привлечения из термодинамики принципа Карно. Теорема интересна также непосредственным видоизменением мысли Эрмана и Эйлера, которую развил Лагранж в своем изложении принципа Даламбера.

К этим исследованиям Н. Г. Четаева непосредственно примыкает работа [27], в которой исследуется движение механической системы, зависящей от некоторых вынужденно изменяющихся параметров θ_i, причем изменения параметров θ_i связаны с координатами системы x_i, y_i, z_i и не допускают гипотезы о весьма медленном или адиабатическом изменении. На систему наложены идеальные связи, ограничивающие линейными соотношениями возможные перемещения $\delta\theta, \delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$.

В работе устанавливается основной принцип динамики таких систем, обобщается принцип Даламбера — Лагранжа, а затем дается его видоизменение. Оказывается, что работа A на элементарном цикле, состоящем из прямого действительного движения в поле действующих принуждений и сил и движения обратного в поле сил, которых было бы достаточно для создания действительного движения, если бы механическая система была совершенно свободной, является минимумом среди A_μ, где A_μ — работа на элементарном цикле в мыслимом (по Гауссу) движении.

Для случая, когда действительные перемещения механической системы находятся среди ее возможных перемещений, можно получить теорему живых сил. Эта теорема приводит к ряду важных следствий, в частности, относящихся к устойчивости положения равновесия.

Большой интерес представляет публикуемая в этом выпуске работа Н. Г. Четаева «О некоторых связях с трением» [67].

Обычно при рассмотрении систем с трением последние посредством введения сил трения приводятся к гладким связям и после этого исследуются обычными методами механики. Н. Г. Четаев показал, что уже при достаточно широких предположениях относительно сил трения можно развить общую теорию материальных систем со связями с трением, не требующую добавления сил трения к силам, действующим на систему.

2. Перейдем к рассмотрению работ Н. Г. Четаева по уравнениям движения в групповых переменных.

Геометрически движение можно представить как преобразование переменных.

Преобразования могут быть выполнены различными способами. Совокупность преобразований, выражающих движение, обладает особыми свойствами, которые С. Ли и Ф. Клейн свели к понятию группы преобразований.

Развитие этих представлений о движении привело к установлению уравнений механики посредством некоторой группы Ли бесконечно малых преобразований. Эти уравнения были введены в механику в 1901 г. А. Пуанкаре. Рассматривая механическую систему с n степенями свободы, стесненную гладкими голономными стационарными связями и находящуюся под действием сил, допускающих силовую функцию, Пуанкаре вводит n операторов транзитивной группы и дифференциальные уравнения движения получает в новых групповых переменных.

Н. Г. Четаев в работах [5,6] рассматривает ту же задачу Пуанкаре, но предполагает связи нестационарными и определяет положение системы зависимыми координатами $x_1, \ldots, x_r$. Тогда можно найти инфинитезимальные операторы некоторой интранзитивной группы

$$X_0(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + \xi_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + \xi_0^r \frac{\partial f}{\partial x_r}, \qquad X_i(f) = \sum_1^r \xi_i^j \frac{\partial f}{\partial x_j} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

при помощи которых преобразование

$$\sum_1^n \eta_i X_i(f)\, dt + X_0(f)\, dt$$

переведет систему из данного положения в бесконечно близкое для действительного перемещения, а преобразование

$$\sum_1^n \omega_i X_i(f)$$

для возможного перемещения.

Далее предполагая, что оператор $X_0(f)$ коммутирует со всеми $X_i(f)$ и используя принцип Гамильтона, автор получает уравнения движения в форме Пуанкаре

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \eta_i} = \sum_{s,k} c_{sik} \frac{\partial T}{\partial \eta_k} \eta_s + X_i(T - U) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

а также в новой канонической форме, называемой ныне уравнениями Н. Г. Четаева в групповых переменных:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum c_{sik}\, y_k \frac{\partial H}{\partial y_s} - X_i(H), \qquad \frac{dx_i}{dt} = \sum X_s^i \frac{\partial H}{\partial y_s} + X_0^i(H), \qquad y_i = \frac{\partial T}{\partial \eta_i}$$

$$H = \sum y_i \eta_i - T + U$$

где c_{sik} — структурные постоянные группы.

Затем доказывается существование относительного интегрального инварианта первого порядка для систем уравнений движения.

Далее Н. Г. Четаев устанавливает дифференциальное уравнение в частных производных типа уравнения Гамильтона — Якоби

$$X_0(V) + H[t, x_1, \ldots, x_r, X_1(V), \ldots, X_n(V)] = 0$$

которому удовлетворяет функция действия $V(t, x_1, \ldots, x_r, a_1, \ldots, a_r)$, и доказывает, что если найти полный интеграл этого уравнения, то решение задачи динамики приведется к уравнениям

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = b_i, \qquad y_i = X_i(V) \qquad (a_i, b_i = \mathrm{const})$$

Статья [6] заканчивается доказательством теоремы Пуассона, позволяющей по двум известным интегралам уравнений движения построить новый интеграл.

В работе [26], опубликованной значительно позднее, дается дальнейшее развитие этой области аналитической динамики. В частности, получив для функции действия выражение

$$\delta V_0 = \sum \omega_s X_s(V) + \sum \omega_s{}^\circ X_s{}^\circ(V) = \sum y_s \omega_s - \sum y_s{}^\circ \omega_s{}^\circ$$

где $X_s{}^\circ$ — оператор X_s, примененный в начальный момент t_0, Н. Г. Четаев доказывает существование линейной формы

$$\Omega = \sum y_s \omega_s$$

определяющей относительный интегральный инвариант первого порядка, и квадратичной инвариантной формы

$$\Omega' = \sum [\delta y_s \omega_s] - \sum c_{\alpha\beta s} y_s [\omega_\alpha \omega_\beta]$$

К новым задачам относится важная для аналитической динамики задача построения группы возможных и действительных перемещений, когда связи заданы в дифференциальной форме.

В этой же работе [26] Н. Г. Четаев вводит понятие о циклических перемещениях. Перемещения X_α автор называет циклическими, если

$$X_\alpha(L) = 0, \qquad (X_\alpha, X_k) = 0 \qquad (\alpha = s+1, \ldots, n, \ k = 1, \ldots, n)$$

где (X_α, X_k) — скобка Пуассона, $L = T + U$ — функция Лагранжа в групповых переменных. При этих условиях легко находятся $r - s$ интегралов уравнений Пуанкаре—Четаева

$$\frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha} = \beta_\alpha$$

и для оставшихся нециклических перемещений уравнения преобразуются к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \eta_j}\right) = \sum c_{\alpha jk} \eta_\alpha \frac{\partial R}{\partial \eta_\alpha} + \sum c_{\alpha j\gamma} \eta_\alpha \beta_\gamma + X_j(R)$$

где

$$R(t, x_1, \ldots, x_r, \eta_1, \ldots, \eta_s, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_k) = L - \sum \frac{\partial L}{\partial \eta_\alpha} \eta_\alpha$$

Если, кроме того, $c_{\alpha j\gamma}=0$, то эти уравнения будут уравнениями движения некоторой голономной системы, причем роль функции Лагранжа играет функция Рауса R.

В заключение работы [26] Н. Г. Четаев делает два важных замечания о решении уравнений движения в групповых переменных, когда группа интранзитивна, и о возможности решения уравнения типа Гамильтона — Якоби в более общих функциях, чем функция действия.

Эта работа [26] Н. Г. Четаева во многом определила направление дальнейших исследований по динамике механических систем в групповых переменных.

В работе [50] приведен пример применения рассмотренных уравнений к задаче о движении подобно-изменяемого тела. Построена конкретная группа С. Ли для указанного тела и аналитическим способом впервые получены уравнения движения.

Этой работой Н. Г. Четаев отдал дань уважения своему непосредственному учителю, казанскому геометру и механику Д. Н. Зейлигеру.

3. В работе [12], по-видимому, впервые Н. Г. Четаев коротко отмечает принципиальную важность теоретически устойчивых движений и их отношение к действительным движениям в механике.

Пусть $q_1, \ldots, q_n$ и $p_1, \ldots, p_n$ — обобщенные координаты и сопряженные им импульсы голономной системы со стационарными связями и активными силами, допускающими силовую функцию $U_0(q_1, \ldots, q_n)$.

В квадратичной форме для кинетической энергии

$$T = \frac{1}{2} \sum g_{ij} p_i p_j$$

коэффициенты g_{ij} будут зависеть лишь от координат.

Полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби имеет вид:

$$-ht + V_0(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

в котором постоянная энергии h зависит от неаддитивных постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, а общее решение механической задачи определяется известными формулами

$$\beta_i = -t\frac{\partial h}{\partial \alpha_i} + \frac{\partial V_0}{\partial \alpha_i}, \qquad p_i = \frac{\partial V_0}{\partial q_i} \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{3.1}$$

где β_i — новые постоянные интегрирования.

Если $H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$ — функция Гамильтона, имеющая здесь смысл полной энергии $T - U_0$, то для канонических дифференциальных уравнений движения Гамильтона

$$\frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_s}, \qquad \frac{dp_s}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_s} \tag{3.2}$$

уравнения в вариациях Пуанкаре имеют вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_j}\xi_j + \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial p_j}\eta_j \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= -\sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial q_j}\xi_j - \sum_j \frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_j}\eta_j \qquad (i = 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Фиксируя постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$, можно принять какое-нибудь движение в качестве невозмущенного и поставить задачу об устойчивости этого движения по отношению к координатам $q_1, \ldots, q_n$ при условии, что постоянные $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не испытывают возмущений. В силу последнего условия можно из (3.1) получить с точностью до малых второго порядка

$$\eta_i = \sum_j \frac{\partial^2 V_0}{\partial q_i \partial q_j}\xi_i$$

что позволяет, приняв во внимание соотношение

$$H = \frac{1}{2}\sum g_{ij}p_i p_j - U_0$$

записать первую группу уравнений (3.3) в виде

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \sum_{js} \xi_s \frac{\partial}{\partial q_s}\left(g_{ij}\frac{\partial V_0}{\partial q_j}\right) \tag{3.4}$$

Замечая далее, что в силу структуры уравнений (3.2) устойчивость рассматриваемого движения в первом приближении возможна лишь при нулевых характеристичных числах Ляпунова решений этих уравнений, Н. Г. Четаев заключает, что для устойчивости необходимо условие

$$\chi\left\{\exp\int L\,dt\right\} = 0 \qquad \left(L = \sum_{ij}\frac{\partial}{\partial q_i}\left[g_{ij}\frac{\partial V_0}{\partial q_j}\right]\right) \tag{3.5}$$

где χ — характеристичное число стоящей в скобках функции. Система предполагается при этом правильной ([2]) «что естественно предположить, когда мы имеем дело с природой...» [12].

Совокупность невозмущенных движений с фиксированными постоянными $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ Н. Г. Четаев называет пакетом. Подчеркнув далее трудности суждения об устойчивости по первому приближению в задачах механики, Н. Г. Четаев вводит потенциальные возмущающие силы и следующим образом выражает требования устойчивости:

«Для нашей природы естественно предположить, что возмущающие силы допускают силовую функцию W, зависящую от переменных q_i. Возмущающие силы стремятся увеличить значение функции W; их влияние на пакет в произвольной точке q_s фазового пространства пропорционально плотности траекторий в этой точке

$$A^2 = \psi\psi^*$$

Отсюда следует, что возмущающие силы относительно меньше возмущают пакет, для которого

$$\int W\,\psi\psi^*\,d\tau - \text{maximum} \tag{3.6}$$

$d\tau$ обозначает элемент объема фазового пространства. Значит, из всей совокупности движений возмущающие силы допускают быть абсолютно устойчивым пакет, удовлетворяющий условию (3.6). Траектории этого пакета назовем дозволенными орбитами. Для возможности сравнения примем при этом для измерения плотности естественное условие

$$\int \psi\psi^*\,d\tau = 1$$

Чтобы определить дифференциальное уравнение вариационной задачи (3.6), рассмотрим движение материальной системы, которое имело бы место при тех же начальных данных, но под действием еще и сил возмущения. Всегда при этом существует интеграл живой силы

$$T = W + U_0 + h$$

Это позволяет интеграл (3.6) писать иначе

$$\int (T - U_0 - h)\,\psi\psi^*\,d\tau$$

где в T вместо переменных p_i следует вставить производные $\partial V / \partial q_i$, отвечающие невозмущенному движению. Если принять во внимание выражение функции плотности

$$\psi = Ae^{iV}$$

то можем заключить, что

$$2T\psi\psi^* = \sum g_{ik}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi^*}{\partial q_k} - \sum g_{ik}\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_k}$$

и, значит, интеграл (3.6) запишется следующим образом:

$$-\frac{1}{2}\int\left[-\sum g_{ik}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}\frac{\partial\psi^*}{\partial q_k} + \sum g_{ik}\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial A}{\partial q_k} + 2\,(U_0 + h)\,\psi\psi^*\right]d\tau$$

Отсюда после очевидных переделок для определения дифференциального уравнения вариационной задачи (3.6) получаем следующее соотношение:

$$\int \delta\psi^*\left[\triangle\psi + 2\,(U_0 + h)\,\psi - \frac{\triangle A}{A}\,\psi\right]d\tau = 0$$

откуда вытекает основное уравнение дозволенных орбит

$$\triangle\psi + 2\,(U_0 + h)\,\psi - \frac{\triangle A}{A}\,\psi = 0 \tag{3.7}$$

Если $\triangle A = 0$, то наше основное уравнение (3.7) принимает форму дифференциального уравнения, положенного в Abhandlungen zur Wellenmechanik Шредингером в основу своей так называемой волновой механики».

Замечая вскользь, что в уравнении (3.7) регулярность решения приводит к собственным значениям для постоянных $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ (т. е. и для h), а следовательно, к дискретному расположению устойчивых траекторий, Н. Г. Четаев заканчивает эту статью [12] следующим образом:

«Мы мыслим себе материальную систему, движущуюся под действием некоторых сил в незначительном поле возмущения. Это последнее разрушает всякое движение, если только оно не является устойчивым и дозволенным. Таким образом сохраняются устойчивые, дозволенные движения. Но никогда нельзя допустить, чтобы в природе движение совершалось по устойчивой траектории. Всегда существуют незначительные отклонения, благодаря которым действительные движения материальной системы происходят в достаточно малой области, обволакивающей устойчивую траекторию

$$|\xi_i| < \varepsilon$$

Смежные же траектории, сколь угодно мало отличные от устойчивой, должны около последней «колебаться» ($\varkappa_s = 0$) [1]; это явление и дает представление о „волне"».

[1] Здесь $\varkappa_s$ обозначает характеристическое число решения системы (3.4).

Переходя к работе Н. Г. Четаева [19] «Об устойчивых траекториях динамики», приведем прежде всего полностью ту часть начала статьи, которая является основополагающей для заключений автора, связанных с его принципиальным подходом к проблемам устойчивости движения.

«Как находятся законы природы?

К объяснению какого-либо механического явления природы сначала подходят с определенными гипотезами о коренных движущих силах, что позволяет для переменных x_s изучаемой материальной системы писать некоторые дифференциальные уравнения движения. И в том случае, когда решения этих дифференциальных уравнений кладут значения изучаемых функций Φ_k вблизи их опытных данных (в пределах ошибок эксперимента), то гипотезу принимают за закон природы, по крайней мере до тех пор, пока не обнаружатся в опыте новые и несовместимые с принятой гипотезой факты. И когда обнаруживаются такие факты, создаются новые гипотезы, не стесняющие себя привычными до этого времени основными понятиями, если только в рамках последних нельзя бывает получить хороших совпадений с опытом.

Но когда отклонения теории от эксперимента могут быть незначительны?

Всякий раз, когда мы подходим к объяснению тех или иных явлений природы, мы не должны забывать, что в действительности никакое явление не представляется в чистом виде. Сколь бы точно ни были определены действующие на систему силы, всегда будут существовать неучтенными незначительные возмущения. Эти последние, сколь бы малы они ни были, влияют на движение материальной системы и дают в эксперименте наблюдаемым функциям не теоретические значения Φ_k, а некоторые иные F_k.

Если при возмущающих силах определенного типа и при малых возмущениях начальных данных, не превосходящих численно некоторой малой величины ε, для всякого t, превосходящего начальный момент t_0, выполняется неравенство

$$\sum (F_k - \Phi_k)^2 < L$$

и причем для произвольного L всегда найдется отличное от нуля ε, то невозмущенно (теоретическое) движение механической системы при рассматриваемых возмущающих силах называется устойчивым по отношению к функциям Φ_k, в противном случае — неустойчивым.

Согласно этому определению устойчивых и неустойчивых движений в действительности общий характер будут сохранять, по крайней мере по отношению к функциям Φ_k, только устойчивые по отношению к Φ_k теоретические невозмущенные движения. Последнее обстоятельство отнюдь не значит, что все движения, определенные принятыми законами, являются устойчивыми при любых малых возмущающих силах и произвольно малых возмущениях начальных данных. Оно обозначает, что законы эти по основному требованию малых отклонений от опытных данных сами по себе не могут опираться, кроме как на движения, устойчивые в той или иной мере по отношению к наблюдаемым функциям Φ_k.

Это предложение, являющееся простым следствием определения устойчивых невозмущенных движений и требования малых отклонений между теорией и экспериментом и относящееся более к структуре нашего научного знания, мы назовем постулатом устойчивости и примем без оговорок. Все равно, будет ли позднее этот постулат подтвержден или опровергнут, сейчас во всяком случае представляется интересным посмотреть, какие следствия могут быть из него выведены».

Повторяя далее постановку задачи устойчивости механической системы, о которой говорилось при обзоре работы [12], и выписав те же уравнения, включая систему (3.4), Н. Г. Четаев проводит строгое доказательство того, что для рассматриваемых невозмущенных движений в случае их устойчивости в первом приближении уравнения Пуанкаре в вариациях будут иметь лишь нулевые характеристичные числа. Доказательство использует выделенный Пуанкаре для уравнений (3.3) инвариант

$$\sum_s (\xi_s \eta_s' - \eta_s \xi_s')$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n, \eta_1, \ldots, \eta_n$, и $\xi_1', \ldots, \xi_n', \eta_1', \ldots, \eta_n'$ — два произвольных решения этих уравнений, а также основные леммы Ляпунова (2) о характеристичных числах.

Добавим здесь далее, что если система (3.4), кроме правильности, ведущей к условию (3.5), удовлетворяет еще требованиям приводимости и соответствующее линейное преобразование

$$x_i = \sum_j \gamma_{ij} \xi_j$$

имеет отличный от нуля и постоянный определитель, то, в силу инвариантности характеристичных чисел решений системы (3.4) при таком преобразовании и известной теоремы Остроградского — Лиувилля, в этом случае из (3.5) будем иметь необходимое требование устойчивости в виде

$$L = \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial V_0}{\partial q_j}\right) = 0 \tag{3.8}$$

выражающее равенство нулю суммы характеристичных чисел системы (3.4).

Пусть материальная система в действительном движении находится под действием сил с силовой функцией U_0, теоретически учтенных выше, и неизвестных возмущающих активных сил, которые, однако, предполагаются потенциальными и допускающими силовую функцию W. Действительное поле сил будет определяться силовой функцией $U_0 + W$.

Если постановку задачи устойчивости действительных невозмущенных движений при возмущении лишь начальных данных сохраним такой же, как и выше в теоретическом поле сил с функцией U_0, то необходимое требование устойчивости в первом приближении, например вида (3.8), не будет в общем случае эффективным, так как функция V, играющая в действительном движении роль V_0, неизвестна (как и W). Однако можно найти такие условия устойчивости, которые не зависят явно от неизвестной функции возмущающих сил W и будут содержать лишь постоянную интегрирования h, имеющую самостоятельный физический смысл полной энергии.

Будем исходить из требования устойчивости вида (3.8), предполагая условия его существования (приводимость и т. д.) для действительных движений выполненными.

Введем вместо V новую функцию

$$\psi = Ae^{ikV}$$

где k — постоянная, A — подлежащая определению вещественная функция, $i = \sqrt{-1}$. После простых вычислений с использованием равенств вида (3.1) и интеграла энергии для действительных движений условие (3.8) для них будет иметь вид

$$\frac{1}{\psi}\sum \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right) - \frac{1}{A}\sum \frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right) -$$
$$-\frac{2}{A}\sum g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}\left(\frac{1}{\psi}\frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{1}{A}\frac{\partial A}{\partial q_i}\right) + 2k^2(U_0 + W + h) = 0 \tag{3.9}$$

Это равенство не будет содержать W, если A определить из уравнения

$$-\frac{1}{A}\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right) - \frac{2ki}{A}\sum_{ij} g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}p_i + 2k^2W = 0$$

которое после отделения вещественной и мнимой частей распадается на два

$$W = \frac{1}{2k^2A}\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}\right), \qquad \sum_{ij} g_{ij}\frac{\partial A}{\partial q_j}p_i = 0 \tag{3.10}$$

Равенства (3.10) определяют структуру возмущающих сил, для которых одно из условий устойчивости не зависит от этих сил явно, а зависит лишь через постоянную энергии h. При выполнении (3.10) условие (3.9) приобретет вид

$$\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial \psi}{\partial q_j}\right) + 2k^2(U_0 + h)\psi = 0 \tag{3.11}$$

Однозначные конечные и непрерывные решения уравнения (3.11) для функции ψ допустимы лишь для собственных значений h, следовательно, и рассматриваемая устойчивость действительных движений имеет место лишь для этих значений постоянной энергии h, которые при известной функции U_0 теоретических сил принципиально могут быть указаны из уравнения (3.11). Приведем полностью это важное место из статьи [19].

«Из-за эффективности такого рода меняется направление в решении нашей задачи резко на обратное. Вообразим нашу прежнюю материальную систему и допустим, что на нее действуют возмущающие силы с силовой функцией W, определенной формулами (3.10). Зная наперед силовую функцию коренных или теоретических сил U_0, мы можем найти собственные значения постоянной h дифференциального уравнения (3.11). Пусть ψ есть некоторая собственная функция этого уравнения, отвечающая постоянной h. Если теперь функцию ψ заменить в уравнении (3.11) на новую S, определенную формулой

$$\psi = Ae^{ikS}$$

то оно согласно предположению о структуре возмущающих сил при разделении вещественной и мнимой частей распадается на два уравнения, из которых первое

$$\frac{1}{2}\sum_{ij} g_{ij}\,\frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{\partial S}{\partial q_j} = U_0 + W + h$$

говорит, что S будет частным решением уравнения Гамильтона — Якоби, отвечающего действительным движениям рассматриваемой материальной системы, а второе, существующее, если это частное решение S находится в полном интеграле Якоби V для действительного движения,

$$\sum_{ij}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\,\frac{\partial S}{\partial q_j}\right) = 0$$

говорит, что при этом необходимое условие устойчивости $\Sigma\varkappa_s=0$ всегда удовлетворяется.

Если действительные движения ничем дополнительно не стеснены, то не исключена возможность найти устойчивые движения вне только что выделенных решений. Легко заметить, что все не охваченные этим методом устойчивые действительные движения будут обладать одним общим свойством: для них необходимое условие устойчивости $\Sigma\varkappa_s = 0$ не эквивалентно условию (3.8).

Если же при всем этом действительные движения таковы, что уравнения в вариациях (3.4) приводимы с постоянным определителем подстановки, то возможные устойчивые движения такой системы необходимо войдут согласно предыдущему анализу в совокупность полученных решений. Разумеется, в последней хорошо могут находиться при этом побочные или лишние решения, от которых возможно освободиться, если рассматривать всю совокупность необходимых условий устойчивости по первому приближению, а не ограничиваться одним $\Sigma\varkappa_s = 0$».

В статье [19] приводится простейший пример одной свободной материальной точки в поле потенциальных сил с функцией U_0. Условия (3.10) для структуры возмущающих сил получают вид:

$$W = \frac{1}{2k^2mA}\,\triangle A, \qquad \sum\frac{\partial A}{\partial q_j}p_j = 0$$

а условие (3.11) принимает вид:

$$\triangle\psi + 2k^2m\,(U_0 + h)\,\psi = 0 \tag{3.12}$$

т. е. совпадает с известным уравнением Шредингера квантовой механики, которое в данном случае представляет собой соотношение, стесняющее выбор постоянных полного интеграла Якоби.

Для более сложных необходимых требований устойчивости $\varkappa_j = 0$ (а не только $\Sigma\varkappa_j = 0$) и с сохранением приводимости уравнений (3.4) задачу отбора устойчивых действительных движений снова удается свести к теоремам существования регулярных решений $\psi_j^{(sr)}$ некоторых систем дифференциальных уравнений в частных производных, имеющих, однако, значительно более сложный вид. В общем случае, когда характеристические корни μ_s приведенной системы дифференциальных уравнений, получающейся из системы (3.4), имеют произвольные элементарные делители, вид этих уравнений таков

$$\frac{\partial \psi_j^{(sr)}}{\partial t} + \sum \frac{\partial \psi_j^{(sr)}}{\partial q_i} g_{ik} \frac{\partial V}{\partial q_k} + \sum \psi_i^{(sr)} \frac{\partial}{\partial q_j} \left(g_{jk} \frac{\partial V}{\partial q_k} \right) = \mu_s \psi_j^{(sr)} - \psi_j^{(s,\, r-1)}$$

$$(r = 1, \ldots, n_s;\ s = 1, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, n) \qquad (3.13)$$

где k — число групп решений, а n_s — число решений в группе, отвечающей корню μ_s $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$; $\psi_j^{(s0)} = 0$, V — функция, входящая в полный интеграл Гамильтона — Якоби и удовлетворяющая уравнению

$$\sum g_{ij} \frac{\partial V}{\partial q_i} \frac{\partial V}{\partial q_j} = 2 (U_0 + W + h)$$

Функция W предполагает некоторую структурную определенность.

Уравнения (3.13) в случае простых элементарных делителей получают очевидные упрощения.

Разбираемая статья завершается примером с обсуждением типов решений уравнений вида (3.11) для движения свободных частиц.

Опубликованная также в 1936 г. работа [20] Н. Г. Четаева «Устойчивость и классические законы» по внутреннему замыслу близка к работе «Об устойчивых траекториях динамики». На конкретных законах физики Н. Г. Четаев иллюстрирует справедливость постулата устойчивости, т. е. необходимость признания устойчивости того или иного рода (в смысле выбора функций, участвующих в опытных измерениях, и вида возмущающих сил) в силу требований малых отклонений теории от эксперимента.

1) Рассмотрим равновесие изотропной свободной сплошной среды, предполагая, что внутренние силы, развивающиеся при ее деформациях, консервативны, а неучитываемая их часть (возмущающие силы) — не ниже второго порядка по отношению к малым деформациям. Каковы эти внутренние силы, если исходить из постулата устойчивости?

В силу теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия и ее обращения Ляпунова — Четаева [23] в каждой точке среды будем иметь силовую функцию вида

$$U = -k^2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + W \qquad (3.14)$$

где x_1, x_2, x_3— отклонения этой точки от положения равновесия, а W — функция, имеющая по этим отклонениям порядок выше двух.

Таким образом, упругая сила будет определена согласно закону Гука, имеющего хорошее экспериментальное обоснование.

«Интересно отметить, что закон Гука не имеет динамической устойчивости при произвольных малых возмущающих силах (порядок малости больше, чем 1); поэтому с точки зрения постулата устойчивости становится понятным, почему раздаются серьезные голоса о неудовлетворительности закона Гука в некоторых динамических проблемах»[20].

2) Поведение энтропии S совокупности тел, изменяющихся в некотором физико-химическом процессе по второму закону термодинамики, характеризуется ее неубыванием. Если S_0 ее максимум, то

$$\frac{dV}{dt} \geqslant 0$$

где $V = S - S_0$ играет для этого закона роль функции Ляпунова в его основной теореме об устойчивости движения, хотя здесь для процесса нет возможности привести отчетливую механическую аналогию.

3) Рассмотрим последний пример, относящийся к закону тяготения Ньютона, связанному по происхождению с законами Кеплера, в свою очередь опирающимися на астрономические наблюдения Тихо де-Браге.

С точки зрения принципа Н. Г. Четаева все три закона Кеплера должны непосредственно содержать такие элементы движения планет, которые необходимо устойчивы в теоретическом законе тяготения Ньютона.

Приведем полностью заключительные слова, относящиеся к этой идее.

«Проверим! Элементы первого закона Кеплера (плоскость и закон площадей) очевидно являются устойчивыми не только в законе Ньютона, но и для произвольных центральных сил. В задаче двух тел, если рассматриваемая точка описывает по закону Ньютона эллиптическую траекторию, движение будет устойчиво по отношению к величине

$$r-\frac{p}{1+e\cos\varphi}$$

где p и e — параметр и эксцентриситет эллипса, описываемого точкой в невозмущенном движении, а r и φ— радиус-вектор точки в возмущенном движении и угол, составляемый им с наименьшим радиусом-вектором в невозмущенном движении; этим предложением Ляпунова («Общая задача», стр. 13), устанавливается, что и во втором законе Кеплер вывел устойчивые элементы. Что в третьем законе Кеплер говорит об устойчивых элементах, установили Лаплас, Лагранж, Пуассон в известной теореме об устойчивости больших полуосей эллиптических орбит».

4. Большой и очень важный цикл работ Николая Гурьевича связан с исследованием общих свойств возмущенных движений механических систем в окрестности устойчивого невозмущенного движения.

В этом цикле работ важное место занимает статья [34], где изучаются свойства возмущенных движений, описываемых уравнениями в вариациях (3.3).

Здесь устанавливается фундаментальная теорема о том, что в случае устойчивого невозмущенного движения уравнения в вариациях (3.3) не только имеют все характеристичные числа равными нулю, но и являются приводимыми в смысле Ляпунова (2) и имеют знакоопределенный квадратичный интеграл.

Эти результаты позволили Н. Г. Четаеву наметить путь развития оптико-механической аналогии, нашедший свое завершение в дальнейших его работах [55, 59, 61, 65].

Значение оптико-механической аналогии в развитии классической механики общеизвестно; аналогия между принципами Ферма и Мопертюи, особенно аналогия между волновой теорией света Гюйгенса и движением консервативной механической системы, сыграла выдающуюся роль в аналитической динамике. По мнению Н. Г. Четаева, «...корни прекрасных результатов, найденных в аналитической динамике после Лагранжа, лежали в аналогии механики с оптикой. Для современных проблем эта аналогия играет, на мой взгляд, не меньшую роль» [1].

Н. Г. Четаев подчеркивал, что аналог колебательных процессов в физике нужно искать в малых возмущенных движениях около устойчивого движения голономной консервативной динамической системы. Так, в работе [61] говорится: «Гамильтон открыл аналогию между волновой оптикой Гюйгенса и движениями механической системы, стесненной голономными связями и находящейся под действием сил, допускающих силовую функцию. Это знаменитое открытие определило на столетие прогресс аналитической динамики».

Эти высказывания объясняют интерес и направленность исследований Н. Г. Четаева по оптико-механической аналогии. Остановимся кратко на работе «О продолжении оптико-механической аналогии» [61].

Вернемся к уравнению (3.8)

$$\sum\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_j}\right)=0$$

Это уравнение имеет эллиптический тип, так как g_{ij} — коэффициенты положительной квадратичной формы, определяющей живую силу T.

В силу уравнения Гамильтона — Якоби функция V удовлетворяет уравнению

$$\sum g_{ij}\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial q_j}=2(U+h) \tag{4.1}$$

Рассмотрим теперь дважды дифференцируемую функцию

$$\Phi(-ht+V)$$

[1] Цитата заимствована из работы Н. Г. Четаева «Диалектический принцип и точное естествознание», опубликованной литографским способом в 1930 г. в Вестнике Казанского физико-математического студенческого кружка.

При выполнении введенных выше необходимых требований устойчивости функция Ф будет удовлетворять уравнению

$$\frac{2(U+h)}{h^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=\sum\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g_{ij}\frac{\partial\Phi}{\partial q_j}\right) \tag{4.2}$$

«Это волновое уравнение устанавливает аналогию между математической теорией света Коши и устойчивыми движениями голономных консервативных систем».

Оптико-механическая аналогия полно исследована Н. Г. Четаевым и в свете теории групп Ли, причем в основу положена мысль о совпадении группы преобразований одного явления (колебательного процесса распространения света) с группой преобразований другого (возмущенных движений вблизи устойчивого движения механической системы).

II. Теория устойчивости движения

Работы Н. Г. Четаева по устойчивости для удобства при изложении можно условно разделить на следующие циклы: проблема существования устойчивых фигур равновесия вращающейся жидкости; общая теорема о неустойчивости и обращение теоремы Лагранжа; исследование устойчивости по первому приближению для неустановившегося движения; разработка эффективных методов построения функций Ляпунова.

5. Работы Ляпунова, посвященные фигурам равновесия вращающейся жидкости и их устойчивости, содержат строгое доказательство существования новых фигур равновесия равномерно вращающейся вокруг некоторой оси тяготеющей по закону Ньютона жидкости, постановку и решение вопроса об устойчивости этих фигур. Ляпунов доказал неустойчивость грушевидных фигур, чем была опровергнута космогоническая гипотеза Дарвина о развитии затухающей звезды через грушевидные фигуры равновесия. В связи с этим после работ Ляпунова вопрос о развитии идеальной затухающей звезды снова стал открытым.

В работах [3,4] Н. Г. Четаев поставил перед собой задачу исследования непрерывной последовательности устойчивых фигур равновесия однородной в каждый момент времени вращающейся жидкой массы, находящейся под действием сил ньютоновского притяжения, сил лучистого сжатия к центру тяжести с постоянной скоростью η и постоянного давления на поверхности.

Сначала он установил, что задача о фигурах равновесия такой вращающейся жидкой массы сводится к решению функционального уравнения

$$f\rho\int\limits_{\tau}\frac{d\tau'}{\Delta}+\frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)-\frac{\eta^2}{2}(x^2+y^2+z^2)=\text{const на }(S_t) \tag{5.1}$$

где τ — объем жидкости, S_t — свободная поверхность, Δ— расстояние между какими-либо двумя точками x, y, z и x', y', z' жидкости, f — постоянная тяготения, ω — угловая скорость вращения жидкости, ρ — плотность.

Далее Н. Г. Четаев доказывает, что эллипсоиды вращения и трехосные эллипсоиды при некоторых ограничениях удовлетворяют уравнению (5.1). При этом ось вращения должна быть наименьшей из осей эллипсоида.

Применяя принцип наименьшего принуждения Гаусса, Н. Г. Четаев доказывает, что под действием сил притяжения и лучистого сжатия угловая скорость вращения массы жидкости в действительно́м изменении фигуры равновесия принуждается изменяться наименьшим образом из всех возможных движений, а уже отсюда, несомненно, вытекает, что масса жидкости изменяет с течением времени свою пограничную фигуру равновесия так, чтобы из всех совместных со связями положений абсолютное значение действительного изменения момента инерции жидкости относительно ее оси вращения было наименьшим.

Следовательно, действительной фигурой равновесия в области некоторой точки бифуркации будет та фигура, для которой момент инерции масс

$$\int\limits_{\tau}(x^2+y^2)\,dm$$

достигает максимума.

Для выделения устойчивой последовательности фигур равновесия Н. Г. Четаев пользуется теоремой Лагранжа об устойчивости в случае существования силовой функции, которую доказывает применительно к рассматриваемому случаю.

Применяя в линейном приближении эту теорему, Н. Г. Четаев устанавливает распределение устойчивости и неустойчивости на последовательности эллипсоидальных фигур равновесия вращающейся однородной жидкости.

Далее разыскиваются устойчивые фигуры, производные от устойчивых эллипсоидов вращения.

Как уже отмечалось выше, в связи с задачей о равновесии вращающейся жидкости в начале нынешнего века возникли серьезные разногласия между Ляпуновым и Пуанкаре и Дарвином по вопросу об устойчивости грушевидных фигур. Спор был решен в пользу Ляпунова.

Однако, как заметил Н. Г. Четаев в работе [9], в искусном методе Ляпунова имеется один деликатный пункт, который осталось еще рассмотреть. Как известно, Ляпунов предложил рассматривать некоторую линейную последовательность (f) фигур, сколь угодно мало отличных от критического эллипсоида E_0 Якоби. Отдельные фигуры f этой последовательности вполне определяются значением некоторого параметра α, и те из них, для которых некоторые функции $L(\alpha)$ уничтожаются, оказываются фигурами равновесия, производными от эллипсоида E_0. Так как различные f-фигуры не представляют собой все геометрически возможные фигуры вблизи от E_0, то существенным является вопрос, все ли фигуры равновесия, производные от E_0, находятся среди f-фигур Ляпунова?

Решению этого трудного вопроса посвящена работа [9] Н. Г. Четаева, состоящая из пяти глав.

В первой главе выводятся основные нелинейные интегральные уравнения для переменной, определяющей близкую к эллипсоиду фигуру равновесия, имеющую одинаковую с последним угловую скорость вращения. Н. Г. Четаев использует при этом некоторые из результатов Ляпунова, но основное уравнение получает в виде, несколько отличном от ляпуновского и более простом.

Вторая глава посвящена изучению вопроса о распределении критических фигур равновесия на последовательности эллипсоидов Якоби.

В третьей главе автор доказывает, что не каждая фигура равновесия, производная от эллипсоидальных фигур, находится среди f-фигур Ляпунова. Ввиду трудностей применения в задаче о распространении фигур равновесия, производных от эллипсоидов, общего метода исследования разветвлений решений нелинейных интегральных уравнений, автор предложил обобщение метода Ляпунова, при помощи которого доказал высказанное утверждение.

В связи с этим фактом возникла проблема определения последовательности устойчивых фигур равновесия, которой Н. Г. Четаев занимается в четвертой главе своего мемуара. Сначала он излагает теорему Ляпунова об устойчивости фигур равновесия согласно которой, если для некоторой формы C жидкости функция

$$2\Pi = \frac{1}{\rho}\iint\frac{d\tau d\tau'}{r} - \omega^2\int(x^2 + y^2)d\tau \tag{5.2}$$

имеет максимум для заданного значения L момента количества движения, то эта фигура C устойчива.

Для случая, когда $L \neq 0$, Ляпунов указал, что нет смысла говорить об абсолютном максимуме функции Π, если жидкую массу ничем дополнительно не стеснять. Н. Г. Четаев вводит такое дополнительное условие и затем доказывает, что если существует не бесконечно малый нижний предел для массы отдельных тел, на которые под влиянием сил ньютоновского притяжения и центробежной может распасться некоторая масса однородной несжимаемой жидкости, то для этой массы существует по крайней мере одно тело наибольшего значения Π и, следовательно, по крайней мере одна устойчивая фигура равновесия.

Пятая глава посвящена рассмотрению устойчивости производных от эллипсоидов фигур равновесия. Н. Г. Четаев доказывает здесь две важные общие теоремы о числе реальных ветвей кривой равновесия механической системы, проходящих через точку бифуркации, и о смене устойчивости. Частные случаи этих теорем были замечены Пуанкаре в 1885 г.

Применяя эти теоремы для выяснения вопроса о распределении устойчивых ветвей фигур равновесия вблизи критического эллипсоида, автор доказывает существование устойчивой последовательности фигур равновесия, производной от критического эллипсоида Маклорена и распространяющейся в сторону больших значений угловой скорости вращения. Глава заканчивается постановкой принципиальной задачи об устойчивости эллипсоидов Якоби в смысле Ляпунова.

6. Другой задачей, которая привлекла внимание Н. Г. Четаева в начале его научной деятельности, была знаменитая задача об обращении теоремы Лагранжа об устойчивости равновесия при максимуме силовой функции [11, 16, 17, 23, 48].

Как известно, эта теорема читается следующим образом [37]: «Если в положении равновесия силовая функция имеет изолированный максимум, то такое положение равновесия устойчиво». Под обращением теоремы Лагранжа понимается при этом положительный ответ на следующий вопрос: будет ли положение равновесия неустойчивым, если для него силовая функция не есть максимум?

В такой форме эта проблема является очень трудной и до исследований Н. Г. Четаева была разрешена лишь для отдельных простых случаев. В частности, случай, когда разложение силовой функции U в окрестности положения равновесия $q_s = 0$ имеет вид: $U = U_m + U_{m+1} + \cdots$ (U_m — форма степени $m \geqslant 2$) и знак силовой функции U при $m = 2$ определяется членами второго порядка, был исследован впервые Ляпуновым (^{2}) (§ 25).

Ляпунов показал также прямым методом (^{2}) (§ 16, пример 2), что всякий раз, когда для положения равновесия силовая функция обращается в минимум и это обнаруживается из исследования совокупности членов наинизшего порядка в разложении приращения этой функции по степеням приращения координат, имеет место неустойчивость равновесия. Изучалась эта проблема и некоторыми другими авторами (Адамар, Пенлеве).

Для решения задачи обращения теоремы Лагранжа Н. Г. Четаев прежде всего должен был развить прямой метод Ляпунова. Он дал общую теорему о неустойчивости, основанную на идеях метода функций Ляпунова. Эта теорема оказалась весьма полезной для решения описываемой конкретной механической задачи. Однако значение данной Н. Г. Четаевым общей теоремы о неустойчивости оказалось гораздо более широким. Теорему можно рассматривать как наиболее общий, универсальный критерий неустойчивости.

Первоначальная формулировка теоремы [11] была дана в 1930 г. Более общая формулировка и модификации теоремы были даны в статье [16]. Развернутое доказательство общих критериев неустойчивости дано в [23].

Теорема о неустойчивости [16, 17] читается следующим образом.

Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что: 1) для некоторой, допускающей бесконечно малый высший предел функции V существует область, где $VV' > 0$, 2) и если для некоторых значений величин x_s, численно сколь угодно малых, в этой области ($VV' > 0$), возможно выделить область, где некоторая функция $W > 0$, на границе которой $W = 0$ значения полной прозводной по времени W' суть одного какого-либо определенного знака, то невозмущенное движение неустойчиво.

Если рассматриваемая в теореме область $VV' > 0$ ограничена поверхностью $V = 0$ и при этом $V' > 0$, то за функцию W теоремы возможно взять V.

В качестве функции W можно также выбрать V', тогда получается первоначальная формулировка теоремы о неустойчивости, данная в работе [11].

Эти интересные критерии неустойчивости вызвали в печати некоторые обсуждения. Вначале появились неверные замечания о несправедливости теоремы в целом. Следует заметить, что первоначальные формулировки были даны Н. Г. Четаевым в весьма кратком изложении и предназначались для исследования таких случаев уравнений возмущенного движения, когда не могло возникнуть недоразумений при использовании таких понятий, как область $VV' > 0$, $V > 0$, $W > 0$ и т. д.

Позднее в книге [37] и в статье [48] Н. Г. Четаев попутно разъяснил, как следует понимать в общем случае термины, использованные в формулировке его критерия.

В частности, в статье [48] было отмечено, что области ($V>0$, $V'>0$ и т. д.) окрестности точки $x_s=0$ следует рассматривать на замкнутом интервале времени $[t_0, \infty]$.

Наибольшее распространение получила формулировка теоремы Н.Г. Четаева о неустойчивости, данная в книге [37,48] которая, если не вводить условного смысла существования области $V'>0$ на замкнутом интервале $[t_0,\infty]$, может быть дана следующим образом [37, 48].

Назовем функцию W $(x_1,\ldots, x_n,t)$ определенно-положительной в области $V>0$, если она может обращаться в нуль в этой области лишь на границе $V=0$ и если для произвольного положительного ε, как бы мало оно ни было выбрано, найдется такое отличное от нуля положительное число l, что при x_s, удовлетворяющих условию $V\geqslant\varepsilon$, и для всякого $t\geqslant t_0$ имеет место неравенство $W\geqslant l$.

Теорема. Если дифференциальные уравнения возмущенного движения таковы, что возможно найти функцию V, ограниченную в области $V>0$, существующей при всяком $t\geqslant t_0$ и для сколь угодно малых по абсолютной величине значений переменных x_s, производная которой V' в силу этих уравнений была бы определенно-положительной в области $V>0$, то невозмущенное движение неустойчиво.

Было доказано обращение этой теоремы и таким образом обоснована ее универсальность.

В работе [11] Н. Г. Четаев предложил решение задачи об обращении теоремы Лагранжа, использовав характеристики Кронекера. Сложность этого решения побудила его искать более элементарное решение. Результаты Н. Г. Четаева, изложенные в статье [17], кратко сводятся к следующему.

Пусть система описывается дифференциальными уравнениями в форме Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial x_s'}\right)-\frac{\partial F}{\partial x_s}=0, \qquad \frac{dx_s}{dt}=x_s' \qquad (s=1,\ldots, k)$$

где

$$F=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}(x_i')^2+\frac{1}{2}\sum_{ij} v_{ij}x_i'x_j'+U, \qquad v_{ij}=v_{ji}$$

U, v_{ij} — голоморфные функции x_s, обращающиеся в нуль в положении равновесия $x_s=0$, причем разложение U начинается членами не ниже второго порядка. Если силовая функция U есть форма U_m и может принимать положительные значения, то равновесие неустойчиво.

Доказательство опирается на изучение поведения в окрестности точки $x_s=0$ функции

$$V=\frac{1}{2}H^2-\frac{1}{2}\alpha^2\left(\sum_{i=1}^{k}x_i\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^4, \qquad H=F-2U$$

которая при условиях теоремы удовлетворяет условиям теоремы о неустойчивости. Если силовая функция $U=U_m+\ldots$ имеет минимум и это обнаруживается по членам наинизшего порядка, равновесие $x_s=0$ неустойчиво.

В статье [23] Н. Г. Четаев дал новое доказательство обращения теоремы Лагранжа для общего случая, когда силовая функция U является аналитической и не имеет максимума в изолированном положении равновесия. Элементарное доказательство в этой статье было предложено только для одного случая, когда функция U — однородная функция степени m или когда $U=U_m+U_{m+1}+\ldots$, а положительный знак функций $U=U_m+U_{m+1}+\ldots$ и $mU_m+(m+1)U_{m+1}+\ldots$ определяется по членам наименее высокого порядка U_m без необходимости рассматривать члены высших порядков. Следует отметить, что первый из рассмотренных случаев вошел в учебники.

Элементарные (по определению Н. Г. Четаева) доказательства для других более сложных и тонких случаев обращения теоремы Лагранжа были даны в статье [48].

Здесь рассмотрены следующие частные случаи:

1°. Функция $U=U_m+U_{m+1}+\ldots+U_{k-1}+U_k+U_{k+1}+\ldots$, где формы $U_m,\ldots, U_{k-1}$ постоянно отрицательны, формы U_{k+1}, $U_{k+2},\ldots$ постоянно положительны, а форма U_k знакопеременная, причем функция $U_m+U_{m+1}+\ldots+U_{k-1}+U_k$ для численно достаточно малых значений q_s может быть сделана положительной. В этом случае неустойчивость точки $q_s = 0$ доказывается при помощи функции

$$V = -H\,\Sigma p_s q_s \tag{6.1}$$

которая удовлетворяет условиям теоремы Н. Г. Четаева о неустойчивости.

2°. Положение равновесия $q_s = 0$ неустойчиво, если

$$U = -abq_1^2 + (a+b)\,q_1 q_2^2 - q_2^4 \qquad (b > a > 0)$$

Задача решается рассмотрением функции

$$V = -H\left(q_1 p_1 + \frac{1}{2}\,q_2 p_2 + q_3 p_3 + \ldots + q_k p_k\right)$$

3°. Положение равновесия $q_s = 0$ неустойчиво, если

$$U = -abq_1^2 + (a+b)\,q_1 q_2^2 - q_2^5 \qquad (b > a > 0)$$

Задача решается рассмотрением функции (6.1).

4°. Выполняются следующие условия:

a) для численно сколь угодно малых значений q_s, таких, что $q_1^2 + \ldots + q_n^2 \leqslant l$, существует некоторая область C, в которой $U > 0$;

b) существуют некоторые непрерывные в C вместе с частными производными первого порядка функции $f_s(q_1, \ldots, q_k)$, уничтожающиеся, когда все переменные равны нулю, все главные диагональные миноры функционального определителя

$$\left\| \frac{\partial f_s}{\partial q_r} + \frac{\partial f_r}{\partial q_s} \right\| \qquad (s, r = 1, \cdots, n)$$

ограничены снизу положительными числами в области C, функция

$$\sum \frac{\partial U}{\partial q_s} f_s$$

определенно-положительна в области C. В этом случае положение равновесия $q_s = 0$ неустойчиво. Задача решается рассмотрением функции (6.1).

7. Большой цикл работ Н. Г. Четаева посвящен исследованию устойчивости неустановившихся движений по первому приближению [30, 35, 37, 43, 58, 63]. В этих работах были указаны, в частности, важные оценки решений системы линейного приближения, которые нашли большое практическое применение.

Среди работ этого цикла следует прежде всего выделить статьи [30, 63], в которых доказываются теоремы об устойчивости и неустойчивости по первому приближению для нестационарных систем. Как известно, Ляпуновым была установлена фундаментальная теорема об устойчивости по первому приближению для правильных систем ([2]) (§ 12, 13).

В статье [30] Н. Г. Четаев доказывает аналогичные теоремы о неустойчивости по первому приближению: «Если система дифференциальных уравнений первого приближения есть правильная и если среди ее характеристичных чисел имеется хотя бы одно отрицательное, то невозмущенное движение неустойчиво. Если система первого приближения не есть правильная, то вводя $s = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, где λ_i— характеристичные числа нормальной системы ее решений, будем иметь $s + \mu = -\sigma$ (μ — характеристичное число функции $1/\Delta$, $\sigma > 0$) и среди характеристичных чисел λ_i имеется хотя бы одно отрицательное, меньшее $(-\sigma)$, то невозмущенное движение неустойчиво».

Доказательство этих теорем опирается на свойства характеристичных чисел Ляпунова.

Позднее в статье [63] Н. Г. Четаев дал новые доказательства теорем Ляпунова и своих об устойчивости по первому приближению, выполненные прямым методом Ляпунова.

В работе [35] доказана вошедшая во многие руководства по теории устойчивости теорема о наименьшем характеристичном числе нестационарной системы, коэффициенты линейного приближения которой $p_{ij}(t)$ стремятся при $t \to +\infty$ к некоторым пределам c_{ij}.

Если при неограниченном увеличении t коэффициенты $p_{ij}(t)$ стремятся к определенным пределам c_{ij}, то наинизшее характеристичное число системы совпадает с наинизшим характеристичным числом предельной системы.

В качестве следствия теоремы получается следующий критерий устойчивости по первому приближению.

Если элементы матрицы $\| c_{ij} \|$ таковы, что действительные части корней характеристического уравнения $\| c_{ij} - \delta_{ij}\lambda \| = 0$ отрицательны, то невозмущенное движение $x_s = 0$ асимптотически устойчиво.

В этой же работе рассмотрен более общий случай системы с переменными коэффициентами и намечен путь построения функции Ляпунова в виде квадратичной формы с переменными коэффициентами.

Эту работу можно рассматривать как источник работ, изучавших оценки скорости затухания переходного процесса по оценкам квадратичных функций Ляпунова $V(t, x_1, \ldots, x_n)$. Критерий, данный в статье [35], заключается в следующем.

Пусть для $t \geqslant t_0$ уравнение

$$\Delta(\lambda) = \| p_{sr} - \delta_{sr}\lambda \| = 0$$

имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, для которых ни одно из выражений $m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$ не уничтожается при $m_1 + \ldots + m_n = 2$. Тогда по известной теореме Ляпунова существует форма $V = \Sigma a_{sr}(t)\, x_s x_r$, удовлетворяющая уравнению в частных производных

$$\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s}(p_{s1}x_1 + \ldots + p_{sn}x_n) = x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

Пусть при всех $t \geqslant t_0$ все диагональные миноры $D_1, \ldots, D_n$ дискриминанта $D = \| da_{sr}/dt + \delta_{sr} \|$ не меньше некоторого положительного числа. Тогда производная dV/dt, в силу исходной системы будет по критерию Сильвестра функцией определенно-положительной. Здесь предполагается ограниченность производных da_{sr}/dt. При этих условиях, если V определенно-отрицательна, то имеет место устойчивость, если V к тому же допускает еще и бесконечно малый высший предел,— имеет место асимптотическая устойчивость. Если же V допускает бесконечно малый высший предел и может принимать отрицательные значения, то имеет место неустойчивость.

В статье [43] также рассматривается задача устойчивости решений линейной нестационарной системы уравнений. В основе описанного в этой статье метода построения функций Ляпунова $V(x, t)$ лежит следующая идея: если обозначить через x_{sk0} начальные условия, порождающие при $t = t_0$ совокупность линейно независимых решений $x_{sk}(t)$ $(t \geqslant t_0)$, то квадратичная форма $V(x, t)$, удовлетворяющая условиям $V(x_{sk}(t), t) = x_{sk0}$ при $s = 1, \ldots, n$; $t \geqslant t_0$, будет, очевидно, удовлетворять условиям $dV/dt = 0$. Если эта форма окажется определенно-положительной, то решение $x_s = 0$ будет в силу теоремы Ляпунова устойчивым. В статье [43] Н. Г. Четаев обосновывает возможность вычисления коэффициентов $a_{sr}(t)$ формы $V(x, t)$ методом последовательных приближений, дает соответствующие формулы и обсуждает эффективность предложенного метода исследования.

8. В ряде работ по применению метода функций Ляпунова к задачам устойчивости Н. Г. Четаев доказал эффективность этого метода, а также обосновал возможность вычисления оценок качества переходного процесса в системе. При этом Н. Г. Четаев подчеркивал, что для правильного выбора параметров системы, обеспечивающих оптимальные свойства этой системы, методы, основанные на подсчете интегральных оценок для отдельных траекторий, соответствующих избранным начальным условиям, являются недостаточными и даже могут приводить к грубым ошибкам. Статья [47] и имела своей целью показать несостоятельность интегральных оценок для отдельных возмущенных траекторий для полной характеристики оптимальных свойств линейных систем и показать, каким образом могут быть даны методом Ляпунова настоящие оценки. В статье рассматривается линейная, асимптотически устойчивая система, описываемая уравнениями

$$\frac{dx_s}{dt} = a_{s1}x_1 + \ldots + a_{sn}x_n \tag{8.1}$$

На основании оценок наибольшего и наименьшего значений функции Ляпунова V в виде квадратичной формы и ее полной производной dV/dt в силу системы (8.1) на сфере единичного радиуса выведена оценка сверху для времени перехода любой возмущенной траектории системы (8.1), начинающейся на сфере заданного радиуса $A>0$, внутрь наперед заданной малой сферы радиуса $\varepsilon>0$. Так как эти оценки определяются собственными числами матриц формы V и ее производной dV/dt, а соотношения между этими собственными числами определяются коэффициентами a_{ij} системы (8.1), то тем самым получается некоторое руководящее правило для выбора параметров системы (8.1), обеспечивающих ее наибольшее быстродействие.

Следует отметить, что значение этой работы выходит за рамки конкретной задачи, рассмотренной в данной статье. Действительно, общие соображения, лежащие в основе рассматриваемого метода оценок, очевидно, применимы к значительно более общим случаям — к тем случаям, когда может быть построена функция Ляпунова и подмечена эффективно связь между оценками свойств (определенной положительности, высшего предела) этой функции и ее полной производной (оценка определенной отрицательности) и параметрами изучаемой системы. Кроме того, здесь высказана весьма плодотворная мысль об изучении качества системы одновременным исследованием изменения свойств системы и свойств соответствующей ей функции Ляпунова при изменении параметров.

Метод оценок свойств линейных систем при помощи квадратичных функций Ляпунова получил широкое распространение, и рядом исследователей получены полезные для практики эффективные оценки скорости затухания переходного процесса в нестационарных линейных и нелинейных системах.

9. Нелинейные системы, для которых проблема устойчивости может быть разрешена корректно довольно простыми приближенными приемами, Н. Г. Четаев называет грубыми. Такого рода система рассматривается в заметке [64], результаты которой непосредственно примыкают к статье [35].

Пусть система дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\frac{dx_s}{dt}=(c_{s1}+\varepsilon f_{s1})x_1+\ldots+(c_{sn}+\varepsilon f_{sn})x_n \qquad (s=1,\ldots,n) \tag{9.1}$$

где c_{sr} — постоянные, f_{sr} — ограниченные вещественные функции $x_1,\ldots,x_n$, t при $x_1^2+\ldots+x_n^2\leqslant A$, $t\geqslant t_0$.

Если для вспомогательной системы уравнений

$$\frac{dx_s}{dt}=c_{s1}x_1+\ldots+c_{sn}x_n \tag{9.2}$$

выполняется условие: корни λ_s уравнения $\|c_{sr}-\delta_{sr}\lambda\|=0$ таковы, что при любых целых неотрицательных m_k, $m_1\lambda_1+\ldots+m_n\lambda_n\neq 0$, когда $m_1+\ldots+m_n=2$, то в силу теоремы Ляпунова уравнение в частных производных

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_s}(c_{s1}x_1+\ldots+c_{sn}x_n)=-(x_1^2+\ldots+x_n^2)=U(x_1,\ldots,x_n) \tag{9.3}$$

однозначно определяет квадратичную форму

$$V=\frac{1}{2}\sum_{s,r}a_{sr}x_sx_r$$

При численно малом $\varepsilon>0$ и малом $\mu>0$ производная dV/dt в силу уравнений (9.1) будет удовлетворять условию

$$-\frac{dV}{dt}-\mu(x_1^2+\ldots+x_n^2)=\sum_{s,r}h_{sr}x_sx_r>0 \quad \text{при } x_1^2+\ldots+x_n^2>0$$

Асимптотическая устойчивость или неустойчивость невозмущенного движения определяется, таким образом, постоянными c_{sr}. Величины A и ε, для которых такое соответствие между системами (9.1) и (9.2) существует, определяются неравенствами Сильвестра для формы

$$\sum_{s,r}h_{sr}x_sx_r$$

Н. Г. Четаев отмечает возможность варьирования оценок чисел ε и A, которые можно изменять за счет изменения формы $U(x_1, \ldots, x_n)$ в правой части уравнения (9.3) и тем самым при оптимальном подборе U получить наиболее широкие оценки.

Во второй части работы Н. Г. Четаев выводит конкретную оценку наибольших и наименьших отклонений возмущенных переменных. Эти оценки получили в дальнейшем большое приложение в практических расчетах. В частности, здесь выведена оценка

$$x_1^2(t) + \ldots + x_n^2(t) \leqslant c \frac{\varkappa_n}{\varkappa_1} e^{(\lambda' + \varepsilon')t} \tag{9.4}$$

для квадрата радиуса сферы, в которую будет входить в момент t точка в возмущенном движении $x_s(t)$ при начальном условии $x_{10}^2 + \ldots + x_{n0}^2 = c$ при $t > t_0 = 0$. Эта оценка обобщает на случай квазилинейных грубых систем оценку скорости затухания переходного процесса, выведенную Н. Г. Четаевым ранее для линейных систем в работе [47]. В неравенстве (9.4) количества $\varkappa_1$ и $\varkappa_n$ — наибольшее и наименьшее собственные значения квадратичной формы, определяющей функцию V, ε' — достаточно малая положительная постоянная, λ'—наибольший корень уравнения

$$\left\| \frac{1}{4} \sum_{\beta=1}^{n} \left(\frac{\partial b_{r\beta}}{\partial x_s} x_\beta + \frac{\partial b_{\beta r}}{\partial x_s} x_r \right) - \lambda a_{sr} \right\| = 0 \quad \left(\frac{dV}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{s,\, r} b_{sr} x_s x_r \right).$$

Здесь dV/dt — производная функции Ляпунова в силу системы (9.1).

10. Заканчивая обзор исследований Н. Г. Четаева по устойчивости, следует остановиться на значении его монографии «Устойчивость движения» [37,52].

Эта небольшая книга содержит исследования по устойчивости движения механических систем с конечным числом степеней свободы, которые были начаты классическими работами Ляпунова, продолжены учеными нашей страны и состоят в систематическом применении второго метода Ляпунова. Важные результаты в этой области принадлежат автору монографии.

При этом автор не стремится к полному изложению всех полученных результатов, а ограничивается лишь теми исследованиями, которые имеют наибольшее значение для приложений.

Во втором издании [52] Н. Г. Четаеву удалось при сохранении объема книги включить как новые теоретические результаты, так и ряд новых задач, призванных иллюстрировать результаты теории.

Н. Г. Четаев почеркивает то принципиально важное обстоятельство, что в определении устойчивости Ляпунов использовал понятие числа, а не бесконечно малой величины.

Это обстоятельство позволяет с успехом применять методы Ляпунова для решения прикладных задач об устойчивости, выдвигаемых развитием техники и физики.

Автор обращает внимание читателя на предложенный Ляпуновым в доказательстве его теоремы практически полезный способ нахождения размера области начальных возмущений по заданному произвольному положительному числу δ, определяющему область фазового пространства, внутри которого должны находиться траектории возмущенного движения системы.

В книге предлагается условие асимптотической устойчивости, несколько более общее, чем условие, соответствующее теореме Ляпунова.

Рассматривается влияние возмущающих сил на равновесие; строго доказываются теоремы Кельвина о влиянии на устойчивость диссипативных и гироскопических сил. Разъясняются введенные Кельвиным важные понятия вековой и временной устойчивости.

Большое значение для практических расчетов представляет установленная возможность оценок характеристичных чисел путем осреднения коэффициентов.

Н. Г. Четаев придавал большое значение правильной постановке задачи устойчивости. Образцом постановки задачи он считал формулировку задачи устойчивости, данную Ляпуновым. Н. Г. Четаев также обращал всегда большое внимание на выбор тех переменных, относительно которых следует изучать устойчивость. Здесь необходимо отметить, что игнорирование именно этого обстоятельства приводит иногда к тому, что задачи устойчивости, которые могут быть накрыты понятиями теории устойчивости Ляпунова, исследователи считают иногда выходящими целиком за рамки этой теории. Например, большинство интересных для приложения случаев так называемой орбитальной устойчивости при правильном подборе переменных может быть накрыто определением устойчивости Ляпунова (классический пример — движение точки в поле центральной ньютоновой силы ([2])).

III. Работы по качественным методам анализа

Одной из первых работ Н. Г. Четаева по качественной теории дифференциальных уравнений было доказательство общего критерия устойчивости движения в смысле Пуассона.

Один критерий устойчивости в смысле Пуассона был указан А. Пуанкаре. Этот критерий включал требование инвариантности объема некоторой совокупности W при движении вдоль траекторий системы. В своих работах [7,8] Н. Г. Четаев освобождается от требования инвариантности объема и доказывает критерий для периодических по времени функций X_s.

11. В работах Н. Г. Четаева получили развитие аналитические методы исследования качественной картины поведения траекторий динамических систем, и, в частности, методы, имеющие своим истоком проблемы изменения этой качественной картины при непрерывном изменении параметров системы.

Здесь следует отметить задачи теории разветвления равновесий, тесно связанные с задачами устойчивости и неустойчивости этих равновесий; ряд работ, связанных с этой проблематикой, посвящен теории характеристик Кронекера [1а, 15, 18, 22, 24].

Под термином «характеристика Кронекера» в работах Н.Г. Четаева понимается численная характеристика совокупности $n+1$ функций $F_0(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n)$. Пусть функции $F_0, \ldots, F_n$ однозначны, ограничены, непрерывны вместе со своими первыми производными $F_{jk} = \partial F_j / \partial x_k$ и не обращаются одновременно в нуль ни для какой точки пространства $x_1, \ldots, x_n$; любая система уравнений $F_s = 0$ из каких-либо n функций F_s такой системы имеет только конечное число корней, которые в пространстве $x_1, \ldots, x_n$ представляются некоторыми изолированными простыми точками.

Тогда характеристика Кронекера $\chi(F_0, F_1, \ldots, F_n)$ может быть определена равенством

$$\chi(F_0, \ldots, F_n) = \sum_{F_k} \operatorname{sign} \Delta_k \qquad (F_k < 0) \tag{11.1}$$

где Δ_k — минор элемента F_k первого столбца определителя

$$D = \begin{vmatrix} F_0 & F_{01} & \ldots & F_{0n} \\ F_1 & F_{11} & \ldots & F_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ F_n & F_{1n} & \ldots & F_{nn} \end{vmatrix}$$

и суммирование в правой части равенства (11.1) выполнено по лежащим в области $F_k < 0$ корням совместных уравнений $F_s = 0$ $(s \neq k)$.

В статье [18] Н. Г. Четаев дал теорему, обосновывающую предложенный им метод вычисления характеристик путем изменения функций.

Этот метод заключается в непрерывном изменении функций заданной системы $F_0, \ldots, F_n$ до системы новых функций, для которых характеристика вычисляется примитивно, и в подсчете потерь — приобретений единиц характеристики при таком преобразовании.

При непрерывном изменении функций $F_0, \ldots, F_n$ характеристика тогда и только тогда испытывает изменение, когда все функции уничтожаются для какой-либо одной «точки перехода» ζ^k.

Пусть мы имеем один параметр x_0: в пространстве $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ система уравнений $F_0 = 0, \ldots, F_n = 0$ определяет точки перехода ζ^k.

Если начальной системе функций отвечает значение параметра $x_0 = \alpha$, а конечной — $x_0 = \beta$ и если изменение параметра x_0 происходит монотонно, то разность соответствующих характеристик равна сумме характеров точек перехода

$$\chi_\alpha(F_0, \ldots, F_n) - \chi_\beta(F_0, \ldots, F_n) = \sum_k \chi(\zeta^k)$$

Эта формула позволяет определить разность характеристик двух произвольных систем функций.

Приложением этих теорем служит, например, доказательство Н. Г. Четаевым теорем Пуанкаре о равенстве характеристик.

Статья [22] является систематическим обзором многочисленных видоизменений и основных приложений этой теории.

В первой главе излагаются определения характеристик и общие теоремы Кронекера; содержанием второй главы являются теоремы Н. Г. Четаева о вычислении характеристик [13]; третья глава посвящена истокам теории характеристик — теоремам об отделении корней. В четвертой главе теория характеристик применяется к вопросам, связанным с работой Пуанкаре «О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями». В последней, пятой главе Н. Г. Четаев останавливается на интегральных выражениях характеристик.

Н. Г. Четаев показал приложение теории характеристик к доказательству различных теорем математики (часть из них дана в качестве задач к каждой главе). Так, например, можно доказать теорему Гаусса о числе комплексных корней полинома, теорему Броуэра о неподвижных точках непрерывного отображения шара, алгебраические теоремы Штурма и Гурвица, топологические теоремы Эйлера, Пуанкаре, Хопфа и других.

В статьях [15, 18, 24] исследуется вопрос о том, насколько далеко метод характеристик Кронекера позволяет продвинуть решения задач теории устойчивости. В статье [15] рассматриваются уравнения возмущенного движения

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(x_1, \ldots, x_n, t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{11.2}$$

Показывается, каким образом определение устойчивости по Ляпунову можно записать в терминах теории характеристик Кронекера: невозмущенное движение $x_s = 0$ устойчиво по Ляпунову, если для любого числа $L > 0$ можно указывать число $\varepsilon > 0$ такое, что характеристика χ_t системы функций

$$F_0(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} z_i^2 - L, \qquad F_i(z_1, \ldots, z_n) = z_i - x_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

где $x_i(t)$ — движение, описываемое системой (11.2), удовлетворяет равенству $\chi_t = 1$ при $t \geqslant t_0$, когда возмущения x_i° при $t = t_0$ удовлетворяют условию

$$\chi_{t_0}\left(\sum_{i=1}^{n} z_i^2 - \varepsilon,\quad z_1 - x_1^\circ, \ldots, \quad z_n - x_n^\circ\right) = 1$$

в противном же случае движение неустойчиво.

Показывается с использованием упомянутой выше формулы из работы [13], каким образом изменение χ_t можно выразить через характеристику Кронекера некоторой новой системы функций, и как основные теоремы прямого метода Ляпунова могут быть доказаны характеристиками Кронекера. Так, в случае первой теоремы Ляпунова об устойчивости для характеристики χ_t системы функций

$$F_0(z) = V(z_1, \ldots, z_n) - c, \qquad F_i(z) = z_i - x_i(t) \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

(V — функция Ляпунова) согласно упомянутой формуле имеем при изменении t

$$\chi_{t_0} - \chi_t = \sum_k \operatorname{sing} V' \tag{11.3}$$

где суммирование распространено по точкам ξ_k, для которых $F_j = 0$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$ и t меняется от t_0 до рассматриваемого момента. Если $\{x_i^0\} \in [F_0 < 0]$, то $\chi_{t_0} = 1$ и вследствие $V' \leqslant 0$ имеем $\chi_{t_0} - \chi_t = 0$, т. е. $\chi_t = 1$, что и доказывает теорему Ляпунова. Аналогичным образом в терминах теории характеристик Кронекера доказывается общая теорема Н. Г. Четаева о неустойчивости. Следует отметить, что в этой работе Н. Г. Четаев рассматривает также вопрос об обращении своей теоремы о неустойчивости и указывает процесс построения последовательности функций V_k области $VV'_k > 0$, для которых имеются точки в достаточно малых окрестностях $|x_s| < \varepsilon_k$ невозмущенного движения, причем $\varepsilon_k \to 0$.

В работе [18] Н. Г. Четаев выясняет алгебраическую природу метода Ляпунова в теории устойчивости движения и показывает, каким образом условия устойчивости движения, выраженные через характеристики Кронекера, могут быть связаны с проблемами отделения вещественных корней алгебраических уравнений.

Пусть уравнения возмущенного движения имеют вид (11.2), где X_s—голоморфные функции x_s с коэффициентами, являющимися непрерывными функциями времени t, $X_s(0, \ldots, 0, t) = 0$.

Пусть существует определенно-положительная функция

$$V(x_1, \ldots, x_n, t) \geqslant W(x_1, \ldots, x_n) > 0$$

Область устойчивости предполагается определенной неравенством

$$W(x) \leqslant c \qquad (c = \mathrm{const}, \ c > 0) \tag{11.4}$$

Если начальные условия x_{s0} при $t = t_0$ выбрать в области (11.4) и обозначить через $f(t)$ функцию $V(x_i(x_{s0}, t), t)$ при $t \geqslant t_0$ и через $\Phi(y, t)$—функцию, определяющую неравенством $\Phi(y, t) < 0$ область, ограниченную контуром $t = t_0$, $t = T$, $y = -c - \varepsilon$, $y = -\varepsilon$, то при условии

$$\chi(\Phi, yf', f) = 0$$

рассматриваемое движение $x_s(x_{s0}, t)$ будет оставаться в области (11.4) при $t \in (t_0, T)$, т. е. будет устойчиво в конечном ($W < c$) на конечном интервале времени $t_0 < t < T$; если же $\chi(\Phi, yf', f) > 0$, то в движении за время от t_0 до T функция V примет по меньшей мере один раз значение, равное c. Можно также рассмотреть ряд последовательных производных от функции $f^{(\nu)}$ в силу уравнений возмущенного движения (11.2) и характеристику Кронекера $\chi(\Phi, yf^{(k-1)}, f^{(k)})$. Основное содержание статьи заключается в следующем: Н. Г. Четаев показывает, что в случае, когда для некоторой функции V может быть в силу дифференциальных уравнений (11.2) построен ряд $f, f', \ldots, f^{(k)}$, причем

$$\chi(\Phi, yf^{(k-1)}, f^{(k)}) = 0$$

который по аналогии с известными алгебраическими методами он называет рядом Будана, можно на основании изучения этого ряда делать заключения об устойчивости невозмущенного движения. Рассуждения опираются на связь между значением характеристики Кронекера χ и числом потерь-перемен знака в ряде Будана при переходе от t_0 к T, что в данной задаче позволяет оценить число корней $V - c = 0$ на интервале $[t_0, T]$ и, следовательно, в случае отсутствия этих корней вывести заключение об устойчивости невозмущенного движения: невозмущенное движение устойчиво, если число перемен знака в ряде Будана при переходе от t_0 к t_1 $(t_1 \leqslant T)$ есть для каждого такого значения t_1 либо число отрицательное, либо нуль, либо четное положительное число.

В конце статьи [18] Н. Г. Четаев намечает возможность фурмулировки теорем, аналогичных теореме Ляпунова и соответствующих более общим случаям ряда Будана $f, f', \ldots, f^{(k)}$.

В работе [24] Н. Г. Четаев показывает возможность обобщения одной задачи, связанной с проблемой центра и рассмотренной ранее Пуанкаре, Ляпуновым и Биргкофом.

12. В работе [58] Н. Г. Четаев показывает, что задачи оценки приближенного интегрирования имеют много общего с задачами об устойчивости движения, и на этой основе развивает метод функций Ляпунова для его приложений к задаче вывода указанных оценок. Он рассматривает систему дифференциальных уравнений (11.2), в которой X_s суть голоморфные функции действительных переменных $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$ в некоторой области D при всех значениях времени t. Пусть некоторый способ приближенного интегрирования дает приближенное решение системы уравнений (11.2)

$$x_s = u_s(t) \qquad (s = 1, \ldots, n) \tag{12.1}$$

и требуется сравнить это решение с истинным $x_s = u_s(t) + \xi_s$. Для оценки разностей ξ_s Н. Г. Четаев использует введенное им в теории устойчивости понятие A, λ-оценки: если A, λ суть положительные постоянные, то приближение (12.1) имеет A, λ-оценку, когда при начальных отклонениях $\xi_{10}, \ldots, \xi_{n0}$, удовлетворяющих неравенству $\xi_{10}^2 + \cdots + \xi_{n0}^2 \leqslant \lambda$, для всякого t, большего t_0, согласно уравнениям (11.2) будет соблюдаться условие

$$\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 < A$$

Для вывода A, λ-оценки, как и в случае задач устойчивости, Н. Г. Четаев рассматривает систему уравнений «возмущенного движения»

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}(t)\,\xi_1 + \cdots + p_{sn}(t)\,\xi_n + f_s \qquad (s = 1, \ldots, n)$$

соответствующую отклонениям («возмущениям») ξ_s приближенного решения $u_s(t)$ от действительного решения $x_s(t)$, составляет для этих уравнений систему первого приближения

$$\frac{d\xi_s}{dt} = p_{s1}(t)\,x_1 + \cdots + p_{sn}(t)\,\xi_n$$

которую использует для построения квадратичной функции Ляпунова $V(t, \xi_1, \ldots$ $\ldots, \xi_n)$. Пусть коэффициенты p_{sk} таковы, что существует такая функция Ляпунова V, допускающая бесконечно малый высший предел и являющаяся определенно-отрицательной, причем

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} (p_{s1}\xi_1 + \cdots + p_{sn}\xi_n)\,\frac{\partial V}{\partial \xi_s} \geqslant \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2$$

$$1 - \sum_{s=1}^{n} \left| \frac{\partial V}{\partial \xi_s} \right| > 0$$

при всех $t \geqslant t_0$, в области $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \leqslant A$. Если l — точный низший предел $|V|$ на сфере $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 = A$ и внутри сферы $\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \leqslant \lambda$ выполняется неравенство $|V| < l$, причем в области $\lambda \leqslant \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \leqslant A$ выполняются неравенства $|f_s| \leqslant \lambda$, то приближение $u_s(t)$ будет иметь A, λ-оценку. Доказательство этого предложения выводится из результатов [37], относящихся к оценкам области допустимых начальных отклонений при помощи функций Ляпунова — квадратичных форм.

Рассматриваются также два примера. Как и всегда в работах Н. Г. Четаева, помимо того, что эти примеры иллюстрируют на конкретном материале общие методы автора, они представляют самостоятельный интерес. В первом примере обсуждается возможность замены дифференциального уравнения n-го порядка

$$a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = 0 \tag{12.2}$$

приближенным уравнением $(n-1)$-го порядка

$$a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n x = 0$$

получаемым из (12.2) отбрасыванием «инерционного» члена $a_0 d^n x/dt^n$, где a_0 мало по сравнению с остальными коэффициентами. Н. Г. Четаев показывает возможность получения A, λ-оценки во всяком случае, если уравнение

$$a_1 \rho^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

имеет корни с отрицательными вещественными частями. Тем самым на данном примере Н. Г. Четаев фактически продемонстрировал прием исследования методом Ляпунова задачи о поведении решений линейного уравнения с малым параметром при старшей производной.

На втором примере Н. Г. Четаев продемонстрировал метод оценки приближенного решения уравнения $dx/dt = X(x, t)$, полученного выбором решения $x(t)$ в виде линейного разложения $a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \cdots$ по функциям $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t), \ldots$ некоторого наперед выбранного семейства, и высказал важные замечания по поводу этого метода.

В работе [39] описано развитие метода Даламбера интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на системы линейных уравнений.

IV. Прикладные задачи

Прикладные задачи были всегда в центре внимания Н. Г. Четаева.

В работе [10] Н. Г. Четаев применил теорию устойчивости Ляпунова к решению задачи о боковой устойчивости самолета, получив достаточные условия устойчивости. В монографии [37] он рассмотрел задачу об устойчивости прямолинейного полета нейтрального самолета по отношению к продольным движениям.

Многие исследователи занимались задачей об устойчивости вращательного движения снарядов. Майевский первый, применяя приближенный анализ, вывел в 1865 г. известное, в некотором смысле необходимое условие устойчивости вращательного движения снаряда для настильных траекторий.

Задачу о достаточных условиях устойчивости вращательного движения снаряда удалось решить Н. Г. Четаеву в работах [28, 38, 57].

Сначала Н. Г. Четаев [28] рассматривает прямолинейный полет снаряда при постоянных скорости движения его центра тяжести и угловой скорости вращения — эта задача приводится, как показал Майевский, к случаю Лагранжа — Пуассона движения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Решение зависит от расположения корней полинома

$$f(u) = (\alpha - au)(1 - u^2) - (\beta - br_0u)^2 \qquad (u = \cos\theta)$$

где θ — угол нутации. Н. Г. Четаев показывает, что угол нутации θ будет иметь малые отклонения от невозмущенного значения его, если все корни полинома $f(u)$ будут больше $1 - \delta$, где δ — малая положительная величина. Все корни полинома $f(u)$ будут больше $1-\delta$, когда все корни полинома $F(x) = -f(1-\delta-x)$ будут отрицательными, для чего необходимо и достаточно выполнение условий Гурвица. Последние, таким образом, приводят к достаточным условиям устойчивости угла нутации снаряда.

Н. Г. Четаев показывает, что для идеального орудия ($\theta_0 = \theta_0' = 0$) эти неравенства удовлетворяются одновременно и независимо от δ при выполнении неравенства Майевского $b^2r_0^2 - 2a > 0$.

Для реального орудия указанные неравенства определяют величину соответствующего отклонения δ.

Далее Н. Г. Четаев изучает следующие случаи прямолинейного полета снаряда: 1) при переменной угловой скорости вращения и постоянной скорости движения его центра тяжести; 2) при переменных скорости движения центра тяжести и угловой скорости вращения.

В обоих случаях Н. Г. Четаев находит достаточные условия устойчивости угла нутации снаряда.

Затем он переходит к случаю плоского криволинейного движения центра тяжести снаряда, находящегося под действием опрокидывающей и тушащей пар сил давления воздуха. В этом случае задача устойчивости приводит к выяснению условий, достаточных для того, чтобы область возможных изменений переменной u, определяемой некоторым уравнением, была внутри интервала $(1-\delta, 1)$. Так как ввиду отсутствия достаточных опытных данных трудно выбрать наиболее приемлемую мажоранту, Н. Г. Четаев предложил приближенный метод анализа условий устойчивости. Сущность этого метода состоит в рассмотрении малых участков траектории как дуг соответствующих кругов кривизны; при этом удается получить необходимые условия устойчивости.

В работе [38] Н. Г. Четаев исследует устойчивость полета снаряда по весьма настильной траектории методом функций Ляпунова. В качестве исходных уравнений движения принимаются уравнения, предложенные А. Н. Крыловым. Н. Г. Четаев строит функцию Ляпунова в виде определенно-положительной связки интегралов уравнений движения и из условий возможности построения такой функции V выводит условия устойчивости невозмущенного движения. Этот метод построения функции Ляпунова в форме линейной связки интегралов уравнений возмущенного движения, позволивший решить строго и до конца одну из важных конкретных задач, был развит в дальнейшем в работах Н. Г. Четаева и позволил решить ряд важных задач устойчивости механических систем.

В этой работе Н. Г. Четаев дает разъяснение причин нарушения устойчивости полетов снаряда, наблюдавшееся на практике. Это нарушение устойчивости объясняется действием на снаряд не учитываемых диссипативных сил с полной диссипацией. Построением функции Ляпунова Н. Г. Четаев строго доказывает, что в рассматриваемом случае устойчивость полета, обусловленная гироскопической стабилизацией вращающегося снаряда, разрушается диссипативными силами.

Продолжением исследований Н. Г. Четаева по устойчивости полета снаряда была работа [57]. В ней рассматривается случай снаряда, имеющего полость, наполненную сплошь идеальной несжимаемой жидкостью. Решение этой задачи Н. Г. Четаев считал весьма важным, так как в ряде случаев, исходя из этого решения, можно назвать достаточный запас устойчивости против неучтенных отрицательных влияний вязкости.

Н. Г. Четаев дал строгое решение задачи в нелинейной постановке об устойчивости вращательных движений снаряда с полостью, сплошь заполненной идеальной жидкостью, совершающей безвихревое движение.

В работе [57] рассматриваются задачи устойчивости полета снаряда в следующих случаях.

1). Полость имеет форму круглого цилиндра, ось которого совпадает с осью вращения эллипсоида инерции снаряда (без жидкости). Используя результаты Жуковского (с известным расширением), Н. Г. Четаев показывает, что задача об устойчивости вращательных движений такого снаряда совпадает с классической задачей об устойчивости обычного снаряда с подобранными соответствующим образом моментами инерции. Используя результаты своей предыдущей работы [38], он указывает неравенство, выпонение которого обеспечивает устойчивость вращательных движений снаряда с жидким наполнением для настильных траекторий.

2). Полость имеет форму круглого цилиндра с одной плоской диафрагмой. В этом случае эллипсоид инерции снаряда и присоединенных масс, эквивалентно представляющих жидкое наполнение полости снаряда, оказывается трехосным, что затрудняет применение к задаче результатов, известных для сплошных твердых снарядов, где, естественно, обычно принималось, что эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения. В работе выписываются уравнения Лагранжа, описывающие движение, и исследуется устойчивость невозмущенного движения в первом приближении. Для приведенных моментов инерции A, B, C даны неравенства, при выполнении которых корни характеристического уравнения первого приближения являются чисто мнимыми и невозмущенное движение устойчиво в первом приближении.

3). Круглая цилиндрическая полость, где диафрагмы составляют крестовину из двух взаимно-ортогональных диаметральных плоскостей. В этом случае задача также приводится Н. Г. Четаевым к изученным им ранее классическим случаям. На основании этих вычислений даются достаточные условия устойчивости полета снаряда рассматриваемого типа.

Эта работа Н. Г. Четаева положила начало исследованиям устойчивости вращательных движений твердых тел с полостями, наполненными жидкостью целиком или со свободной поверхностью, совершающей вообще вихревое движение.

К теме работы [38] близка работа [49], в которой Н. Г. Четаев решает вопрос об устойчивости вращения вокруг вертикали твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. Устойчивость рассматривается по отношению к проекциям мгновенной угловой скорости тела p, q, r на подвижные оси и направляющим косинусам вертикали γ_1, γ_2, γ_3. В этой работе Н. Г. Четаев продемонстрировал эффективность предложенного им метода построения функций Ляпунова в виде линейных связок первых интегралов. Именно, используя известные в этой задаче первые интегралы $V_i = c_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, Н. Г. Четаев строит функцию Ляпунова в виде квадратичной формы

$$V = V_1 + 2\lambda V_2 - (mgz + Cr_0\lambda) V_3 + \frac{C(C-A)}{A} V_4^2 - $$
$$- 2C(r_0 + \lambda) V_4 = A(\xi^2 + \eta^2) + 2A\lambda(\xi\alpha + \eta\beta) - $$
$$- (mgz + Cr_0\lambda)(\alpha^2 + \beta^2 + \delta^2) + 2\lambda C\delta\zeta + \frac{C^2}{A}\xi^2$$

где λ — произвольная постоянная. На основании условий Сильвестра видно,что при выполнении неравенства

$$C^2 r_0^2 - 4Amgz > 0$$

постоянную λ можно выбрать таким образом, чтобы функция V была определенно-положительной. Следовательно, это неравенство является достаточным условием устойчивости вращения вокруг вертикали.

Эта работа Н. Г. Четаева [49] объемом всего полторы страницы имела весьма большое значение в механике — она вызвала появление ряда работ, в которых решались разнообразные задачи устойчивости.

Работа [60] посвящена исследованию движения тяжелого гироскопа в кардановом подвесе, когда ось внешнего кольца вертикальна. Составив уравнения движения гироскопа в форме уравнений Лагранжа и указав их первые интегралы, Н. Г. Четаев приводит задачу к обращению гиперэллиптического интеграла. Из решения вытекает, что в случае тяжелого гироскопа в кардановом подвесе нутационные движения играют ведущую роль.

Далее указываются условия осуществления гироскопом псевдорегулярной и регулярной прецессий и выводятся условия устойчивости по отношению к углу нутации вращения гироскопа вокруг вертикали.

Научные труды Н. Г. Четаева в значительной мере отражают развитие аналитической механики за последние 35 лет.

Н. Г. Четаев часто говорил, что Галилей, Ньютон, Лагранж и Ляпунов определили основные этапы в истории механики.

С именем Ляпунова связано создание теории устойчивости движения. До начала XX века значение этой проблемы было не ясно. Трудности, связанные с ее постановкой, делали ее доступной только отдельным выдающимся ученым. Ею занимались Лагранж, Ляпунов, Томсон, Тэт, Рауз, Жуковский, Пуанкаре.

В настоящее время эта теория имеет большое прикладное значение. Методы Ляпунова—Четаева применяются при решении технических вопросов в теории регулирования, управления летательными машинами, приборостроении, подводном плавании.