где z_0 — вертикальное перемещение центра тяжести пластинки, x_0 — координата центра тяжести, $\theta(t)$ — угол тангажа, $\psi(t)$ — угол крена, $W(x, y, t)$ — скорость вертикального порыва.

Для практических задач достаточно в большинстве случаев ограничиться тремя-четырьмя формами упругих колебаний ($j = 1, 2, 3, 4$). Далее определяется по формуле (1.8) разность давлений на крыле и составляется система дифференциальных уравнений движения летательного аппарата. Ограничиваясь каким-либо количеством членов ряда (1.7) в зависимости от вычислительных возможностей электронно-счетной машины, можно определить неизвестные функции $p_j(t)$, $\theta(t)$, $z_0(t)$ и $\psi(t)$.

Поступила 8 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. ГИТТЛ, М.— Л., 1952.
2. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, Т. 1, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1955.

К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

И. М. Юрьев
(Москва)

Исследование сильных и слабых разрывов в магнитной гидродинамике содержится в ряде статей и книг (см., например, [1-4]). Ниже уравнения плоского течения в магнитном поле, параллельном полю скоростей, преобразованы при некоторых начальных ограничениях к линейному уравнению типа Чаплыгина [5]. Результат применим к задачам без сильных разрывов.

Уравнения стационарного движения газа с бесконечной проводимостью в магнитном поле имеют следующий вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{H}=0, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{W}\times\mathbf{H}) = 0, \quad \operatorname{div}\rho\mathbf{W} = 0, \quad (\mathbf{W}\cdot\nabla)\,\mathbf{W} = -\frac{\operatorname{grad} p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho}\,\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H} \tag{1}$$

где $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, p, ρ и $\mathbf{W}$ — соответственно давление, плотность и вектор скорости течения. Если течение плоское и вектор $\mathbf{H}$ лежит в плоскости течения, то из второго уравнения (1) следует, что $\mathbf{W}\times\mathbf{H} = \mathrm{const}$. Если $\mathbf{W}\,\|\,\mathbf{H}$ в одной точке, то $\mathbf{W}\,\|\,\mathbf{H}$ во всем поле течения. Можно записать

$$\mathbf{H} = k(x, y)\,\rho\mathbf{W} \tag{2}$$

где $k(x, y)$ — коэффициент пропорциональности.

Из первого и третьего уравнений системы (1) заключаем, что $k(x, y) = \mathrm{const}$ вдоль линии тока. Вектор $\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}$ перпендикулярен линии тока. Следовательно, вдоль линий тока справедлива формула Бернулли

$$w\,dw + \frac{dp}{\rho} = 0 \tag{3}$$

Положим $p = p(\rho)$, и пусть формула (3) будет справедлива в любом направлении в области течения. Будем в дальнейшем также считать, что $k = \mathrm{const}$ во всем течении, что, в частности, имеет место при невозмущенном поступательном потоке на бесконечности. На основании (3) имеем

$$\rho = \rho(w), \qquad p = -\int \rho(w)\,w\,dw \tag{4}$$

из чего следует

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = -\operatorname{grad}\frac{w^2}{2} \tag{5}$$

С другой стороны, $(\mathbf{W}\cdot\nabla)\,\mathbf{W} = \operatorname{rot}\mathbf{W}\times\mathbf{W} + \operatorname{grad} {}^1/_2\,\mathbf{W}^2$. Поэтому последнее уравнение системы (1) преобразуется к виду

$$\operatorname{rot}\mathbf{W}\times\mathbf{W} = -\frac{1}{4\pi\rho}\,\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H} \tag{6}$$

Проектируя уравнения (6) на оси координат x, y и учитывая формулу (2) получим

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k^2}{4\pi}\left(\frac{\partial\rho v}{\partial x} - \frac{\partial\rho u}{\partial y}\right), \quad \text{или} \quad \frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{\partial u^*}{\partial y} = 0 \tag{7}$$

где

$$u^* = w^* \cos\theta, \qquad v^* = w^* \sin\theta, \qquad w^* = w\left(1 - \frac{k^2}{4\pi}\rho\right) \tag{8}$$

и θ — угол вектора скорости с осью абсцисс.

Из уравнения неразрывности следует существование функции тока $\psi(x, y)$:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -v\rho(w) = -v^*\rho^*(w^*), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = u\rho(w) = u^*\rho^*(w^*) \qquad \left(\rho^* = \frac{\rho}{1 - k^2\rho/4\pi}\right) \tag{9}$$

Уравнение (7) позволяет ввести фиктивный потенциал φ по формулам

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u^*, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v^* \tag{10}$$

Как известно из условий полных дифференциалов выражений:

$$dx = \frac{\cos\theta}{w^*}\,d\varphi - \frac{\sin\theta}{\rho^* w^*}\,d\psi, \qquad dy = \frac{\sin\theta}{w^*}\,d\varphi + \frac{\cos\theta}{\rho^* w^*}\,d\psi \tag{11}$$

можно вывести для искомых функций φ и ψ следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{w^*}{\rho^*}\frac{\partial\psi}{\partial w^*}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial w^*} = w^*\frac{d}{dw^*}\left(\frac{1}{\rho^* w^*}\right)\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{12}$$

В каноническом виде система (12) имеет вид:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial s}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial s} = -\sqrt{K}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \tag{13}$$

где функции от скорости $\sqrt{K}$ и s связаны с w^* и ρ^* согласно [6] формулами

$$\frac{dQ}{ds} = -\sqrt{K}P, \qquad Q = \sqrt{K}\frac{dP}{ds} \qquad \left(P = w^{*-1},\ Q = (\rho^* w^*)^{-1}\right) \tag{14}$$

отсюда

$$ds = \left(\frac{P'(w^*)\,Q'(w^*)}{P(w^*)\,Q(w^*)}\right)^{1/2} dw^*, \qquad \sqrt{K} = \left(\frac{Q(w^*)\,Q'(w^*)}{P(w^*)\,P'(w^*)}\right)^{1/2} \tag{15}$$

Подставляя в (15) выражения функций $P(w^*)$ и $Q(w^*)$ и учитывая формулы (8), (9) и формулу для определения скорости звука

$$a^2 = \frac{dp}{d\rho} = -\frac{w\rho(w)}{\rho'(w)} \tag{16}$$

получим

$$\sqrt{K} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{(1-M^2)(1-m\rho)^3}{1-m\rho(1-M^2)}\right)^{1/2}, \quad ds = \pm\left(\frac{(1-M^2)\left[1-m\rho(1-M^2)\right]}{1-m\rho}\right)^{1/2}\frac{dw}{w} \quad (m = k^2/4\pi)$$

где M — число Маха. Знак минус в (17) берется для интервала изменения w, в котором $dw^*/ds < 0$. При мнимых значениях s и $\sqrt{K}$ имеем гиперболическую систему уравнений

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \sqrt{\chi}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = \sqrt{\chi}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \qquad (\sigma = -is,\ \sqrt{\chi} = -i\sqrt{K}) \tag{18}$$

В случае $p = \mathrm{const}\,\rho^\varkappa$, где $\varkappa$ — отношение коэффициентов удельных теплоемкостей, формулы (17) и (21) примут вид:

$$\sqrt{K} = \left(\frac{(1-\lambda^2)\left[1-k_1(1-\lambda^2/h^2)^\gamma\right]^3}{(1-\lambda^2/h^2)^{h^2}\left[1-k_1(1-\lambda^2/h^2)^\gamma(1-M^2)\right]}\right)^{1/2} \tag{19}$$

$$ds = \pm\left(\frac{(1-\lambda^2)\left[1-k_1(1-\lambda^2/h^2)^\gamma(1-M^2)\right]}{(1-\lambda^2/h^2)\left[1-k_1(1-\lambda^2/h^2)^\gamma\right]}\right)^{1/2}\frac{d\lambda}{\lambda}$$

$$\left(k_1 = \frac{k^2}{4\pi}\left(\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}a_*^2\right)^\gamma,\ h^2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1},\ \gamma = \frac{1}{\varkappa-1},\ \varkappa \neq 1\right)$$

где λ — величина относительной скорости, a_* — критическая скорость звука. Если

$k_1 \leqslant 1$, то при $\lambda < 1$ справедлива система (13), а при $\lambda > 1$ система (18). Более интересен случай $k_1 > 1$. Тогда отрицательные в окрестности $\lambda = 0$ величины

$$1 - k_1(1 - M^2)(1 - \lambda^2/h^2)^{\gamma}, \qquad 1 - k_1(1 - \lambda^2/h^2)^{\gamma}$$

обращаются в нуль соответственно при $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_2 = h(1 - k_1^{1-\varkappa})$, причем $\lambda_2 > \lambda_1$.

Для интервала изменения скорости $0 < \lambda < \lambda_1$ при любом λ_2 имеем эллиптическую систему уравнений (13). Если $\lambda_2 < 1$, то для дозвукового интервала $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ имеем гиперболическую систему уравнений (18), затем для интервала $\lambda_2 < \lambda < 1$ эллиптическую систему уравнений (13) и, наконец, при $\lambda > 1$ снова систему (18). Если $\lambda_2 > 1$, то для интервалов $\lambda_1 < \lambda < 1$ и $\lambda_2 < \lambda < h$ справедлива система (18), а для сверхзвукового интервала $1 < \lambda < \lambda_2$ эллиптическая система уравнений (13). Если

$$\lambda_2 = 1, \quad \text{или} \quad k_1 = \left(\frac{h}{h-1}\right)^{\gamma}$$

то система (13) справедлива для всего интервала $\lambda_1 < \lambda < h$.

Выделяя в формулах (19) главные части в окрестности особых точек λ_1 и $\lambda_2 \neq 1$, найдем, что в первом случае $\sqrt{K} \approx \mathrm{const}\, s^{-1/3}$, а во втором $\sqrt{K} \approx \mathrm{const}\, s$, причем s отсчитывается соответственно от λ_1 и λ_2.

При $k = 0$ имеем обычные уравнения Чаплыгина. При отдельных формулах $p = p(\rho)$ и значениях k_1 система уравнения в функциях Лежандра может оказаться более удобной для решения, чем система (13).

Перейдем от функции φ, ψ к функциям Φ, Ψ при помощи преобразования Лежандра

$$\Phi = x\frac{\partial\varphi}{\partial x} + y\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \varphi, \qquad \Psi = x\frac{\partial\psi}{\partial x} + y\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi \tag{20}$$

Имеем

$$x = \Phi_{u^*} = -\Psi_t, \qquad y = \Phi_{v^*} = \Psi_r \qquad \left(r = \frac{\cos\theta}{Q},\ t = \frac{\sin\theta}{Q}\right) \tag{21}$$

В независимых переменных s, θ система (21) имеет следующий вид (см. например, [7])

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} = -\sqrt{K_1}\,\frac{\partial\Phi}{\partial s}, \quad \frac{\partial\Psi}{\partial s} = \sqrt{K_1}\,\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} \qquad \left(\sqrt{K_1} = \sqrt{K}\left[\frac{P}{Q}\right]^2\right)$$

Приближенные и точные методы решения уравнений Чаплыгина можно использовать для решения задач данного течения газа в магнитном поле. При аппроксимациях необходимо использовать условие замкнутости. Например, если в порядке аппроксимации вместо строгой зависимости $\sqrt{K(s)}$ берется другая функция $f(s)$, то, подставляя в уравнение (14) вместо $\sqrt{K}$ функцию $f(s)$, получим уравнения для определения функций $P(s)$ и $Q(s)$. Зависимость ρ от w получаем в параметрическом виде $\rho = \rho(s)$, $w = w(s)$ при помощи формул $w^* = P^{-1}$, $\rho_*^* = P/Q$ и формул (8), (9).

Поступила 17 X 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. ГИТТИ, 1957.
2. Станюкович К. П., Каплан С. А., Баум Ф. А. Введение в космическую газодинамику. М., 1958.
3. Коган М. Н. Магнитодинамика плоских и осесимметричных течений газа с бесконечной электрической проводимостью. ПММ, 1959, т. XXIII. вып. I.
4. Жигулев В. Н. Анализ слабых и сильных разрывов в магнитной гидродинамике. ПММ, 1959. т. XXIII, вып. I.
5. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Собр. соч., т. 2, ОГИЗ, 1948.
6. Христианович С. А. Приближенное интегрирование уравнений сверхзвукового течения газа, ПММ, 1947, т. XI, вып. 2.
7. Седов Л. И. К общей теории плоско-параллельных движений газа. Сб. статей, № 4, Теоретическая гидромеханика, 1949.