из системы

$$\sum_{j=1}^{3} (a_{ij} - \delta_{ij}\lambda_k) b_{jk} = 0, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ 1 & (i = j) \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ k = 1, 2, 3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

можно определить элементы b_{ik} такие, что матрица $B^{-1}AB$ будет иметь диагональную форму:

$$\| b_{jk} \| = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{\rho}{v_\varphi} & 0 & \dfrac{\rho}{v_\varphi} \dfrac{v_r^2 + v_\varphi^2}{v_t^2 - v_\varphi^2} \\ 0 & -\dfrac{v_r}{v_\varphi} & -\dfrac{2v_r v_\varphi}{v_r^2 - v_\varphi^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \tag{9}$$

Система (6) может быть приведена к следующему виду:

$$\frac{\partial y_1}{\partial R} = -y_1 - (1 - n^2) y_2 - \left(1 - \frac{2n^2}{1 - n^2 \operatorname{ctg}^2 n\varphi}\right) y_3$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial R} + \frac{n}{\operatorname{tg} n\varphi} \frac{\partial y_2}{\partial \varphi} = n^2 \left(1 - \frac{2}{1 + (n^2 - 1)\cos^2 n\varphi}\right) y_2 \tag{10}$$

$$\frac{\partial y_3}{\partial R} + \frac{2n \operatorname{tg} n\varphi}{\operatorname{tg}^2 n\varphi - n^2} \frac{\partial y_3}{\partial \varphi} = -\frac{(1 - n^2)[1 - (n^2 + 1)\cos^2 n\varphi]}{1 + (n^2 - 1)\cos^2 n\varphi} y_2 + \frac{2n^2}{1 - (n^2 + 1)\cos^2 n\varphi} y_3$$

При решении конкретных задач y_2, y_3 и y_1 последовательно определяются из второго, третьего и первого уравнений.

Поступила 28 VII 1959

МВТУ им. Баумана

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, § 101, 1954.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Гостехтеоретиздат, т. 4, 1953.

К ТЕОРИИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ОБТЕКАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

А. Д. Лисунов

(Новосибирск)

§ 1. Как известно, неустановившееся трехмерное потенциальное движение невязкой сжимаемой жидкости описывается в векторной форме следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - a^2 \operatorname{div} \mathbf{c} + \mathbf{c} \operatorname{grad} \left(2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\mathbf{c}^2}{2}\right) = 0 \tag{1.1}$$

где a — скорость звука, c — вектор скорости воздушного потока.

Предполагая, что воздушный поток обтекает крыло с постоянной скоростью c вдоль оси x в положительном направлении и что возмущения, вносимые крылом, малы, потенциал возмущенной скорости φ_1 в прямоугольной системе координат будет удовлетворять волновому уравнению

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + 2 \frac{M}{a} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial t} = 0 \qquad (\beta = \sqrt{M^2 - 1}) \tag{1.2}$$

Здесь M — число Маха невозмущенного потока.

Решением этого уравнения вследствие его линейности является выражение

$$\varphi_1(x, y, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_S \frac{1}{r} [q(\xi, \eta, t - \tau_1) + q(\xi, \eta, t - \tau_2)] \, d\xi d\eta \tag{1.3}$$

где $q(x, y, t)$ — скос потока на поверхности крыла,

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 - \beta^2 [(y - \eta)^2 + z^2]}, \qquad \tau_{1,2} = \frac{M}{a\beta^2}(x - \xi) \mp \frac{r}{a\beta^2} \tag{1.4}$$

Область интегрирования S лежит внутри переднего характеристического конуса Маха с вершиной в данной точке.

Значение функции при смещении ее аргумента на величину τ можно определить при помощи следующего экспоненциального дифференциального оператора:

$$f(t \pm \tau) = \exp\left(\pm \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) f(t)$$

Действуя этим оператором на скос потока и имея в виду обозначение (1.4), выражение для потенциала скорости $\varphi_1(x, y, z, t)$ можно представить так: (1.5)

$$\varphi_1 = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_S \frac{1}{r} \exp\left(\mu M (x - \xi) \frac{\partial}{\partial t}\right) \operatorname{ch}\left(\mu r \frac{\partial}{\partial t}\right) q(\xi, \eta, t)\, d\xi d\eta \qquad \left(\mu = \frac{1}{a\beta^2}\right)$$

Раскладывая гиперболический косинус и экспоненциальную функцию

$$\operatorname{ch}\left(\mu r \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mu r)^{2m}}{(2m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}} \qquad \exp\left(\mu M (x - \xi) \frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\mu M (x - \xi)]^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial t^m}$$

формулу (1.5) можно представить так: (1.6)

$$\varphi_1(x, y, z, t) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_S \sum_{m=0}^{\infty} \frac{[\mu M (x - \xi)]^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu^{2m}}{(2m)!} r^{2m-1} \frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}} q(\xi, \eta, t)\, d\xi d\eta$$

Представим двойной ряд под знаком интеграла в виде ряда по порядкам производных. Тогда окончательно получаем

$$\varphi_1(x, y, z, t) = \tag{1.7}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial^m}{\partial t^m} \sum_{k=n}^{k=m} \frac{\mu^m M^{2k-m}}{[2(m-k)]!\,(2k-m)!} \iint\limits_S (x - \xi)^{2k-m} r^{2(m-k)-1} q(\xi, \eta, t)\, d\xi d\eta$$

где $n = \frac{1}{2} m$, если m — четное число, и $n = \frac{1}{2}(m + 1)$, если m — нечетное число.

Разность давлений сверху и снизу крыла в какой-либо точке равна

$$\Delta p(x, y, t) = -2\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + c \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \tag{1.8}$$

Значение $m = 0$ соответствует стационарной теории и потенциал скорости в этом случае (помня, что $0! = 1$)

$$\varphi_1(x, y, z, t) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_S \frac{1}{r} q(\xi, \eta, t)\, d\xi d\eta \tag{1.9}$$

Сохранение первых двух членов ряда соответствует квазистационарной теории. В случае периодического движения оператор $\partial / \partial t = i\omega$ (где ω — круговая частота колебаний). Этот случай подробно рассмотрен в работе [1].

§ 2. Полученный результат может быть применен для решения задач, связанных с определением аэродинамических сил на упругом крыле конечного размаха от действия произвольного апериодического возмущения. В частности, данный прием применим при вычислении воздушных нагрузок, действующих на упругий летательный аппарат при входе его в вертикальный воздушный порыв произвольной пространственной формы. Для этого крыло представляется как свободная, упругая, симметричная относительно оси x пластинка с началом координат в ее носовой точке. Упругие перемещения в системе координат, связанной с летательным аппаратом, принимаются в виде

$$z = \sum_{j=1}^{\infty} w_j(x, y)\, p_j(t) \tag{2.1}$$

где $w_j(x, y)$ — форма колебаний j-го тона, $p_j(t)$ — неизвестные функции от времени.

Тогда скос потока в новой неподвижной в пространстве системе координат выразится следующим образом: (2.2)

$$q(x, y, t) = \frac{dz_0}{dt} - (x - x_0) \frac{d\theta}{dt} + c\theta + z \frac{d\psi}{dt} + \sum_{j=1} \left(w_j \frac{dp_j}{dt} - c p_j \frac{\partial w_j}{\partial x}\right) + W(x, y, t)$$

где z_0 — вертикальное перемещение центра тяжести пластинки, x_0 — координата центра тяжести, $\theta(t)$ — угол тангажа, $\psi(t)$ — угол крена, $W(x, y, t)$ — скорость вертикального порыва.

Для практических задач достаточно в большинстве случаев ограничиться тремя-четырьмя формами упругих колебаний ($j = 1, 2, 3, 4$). Далее определяется по формуле (1.8) разность давлений на крыле и составляется система дифференциальных уравнений движения летательного аппарата. Ограничиваясь каким-либо количеством членов ряда (1.7) в зависимости от вычислительных возможностей электронно-счетной машины, можно определить неизвестные функции $p_j(t)$, $\theta(t)$, $z_0(t)$ и $\psi(t)$.

Поступила 8 IV 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Красильщикова Е. А. Крыло конечного размаха в сжимаемом потоке. ГИТТЛ, М.— Л., 1952.
2. Современное состояние аэродинамики больших скоростей, Т. 1, Изд-во иностр. лит-ры, М., 1955.

К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКИ

И. М. Юрьев
(Москва)

Исследование сильных и слабых разрывов в магнитной гидродинамике содержится в ряде статей и книг (см., например, [1-4]). Ниже уравнения плоского течения в магнитном поле, параллельном полю скоростей, преобразованы при некоторых начальных ограничениях к линейному уравнению типа Чаплыгина [5]. Результат применим к задачам без сильных разрывов.

Уравнения стационарного движения газа с бесконечной проводимостью в магнитном поле имеют следующий вид:

$$\operatorname{div} \mathbf{H}=0, \quad \operatorname{rot}(\mathbf{W}\times\mathbf{H}) = 0, \quad \operatorname{div}\rho\mathbf{W} = 0, \quad (\mathbf{W}\cdot\nabla)\mathbf{W} = -\frac{\operatorname{grad} p}{\rho} - \frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H} \qquad (1)$$

где $\mathbf{H}$ — напряженность магнитного поля, p, ρ и $\mathbf{W}$ — соответственно давление, плотность и вектор скорости течения. Если течение плоское и вектор $\mathbf{H}$ лежит в плоскости течения, то из второго уравнения (1) следует, что $\mathbf{W}\times\mathbf{H} = \mathrm{const}$. Если $\mathbf{W} \parallel \mathbf{H}$ в одной точке, то $\mathbf{W} \parallel \mathbf{H}$ во всем поле течения. Можно записать

$$\mathbf{H} = k(x, y)\,\rho\mathbf{W} \qquad (2)$$

где $k(x, y)$ — коэффициент пропорциональности.

Из первого и третьего уравнений системы (1) заключаем, что $k(x, y) = \mathrm{const}$ вдоль линии тока. Вектор $\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H}$ перпендикулярен линии тока. Следовательно, вдоль линий тока справедлива формула Бернулли

$$w\,dw + \frac{dp}{\rho} = 0 \qquad (3)$$

Положим $p = p(\rho)$, и пусть формула (3) будет справедлива в любом направлении в области течения. Будем в дальнейшем также считать, что $k = \mathrm{const}$ во всем течении, что, в частности, имеет место при невозмущенном поступательном потоке на бесконечности. На основании (3) имеем

$$\rho = \rho(w), \qquad p = -\int \rho(w)\,w\,dw \qquad (4)$$

из чего следует

$$\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p = -\operatorname{grad}\frac{w^2}{2} \qquad (5)$$

С другой стороны, $(\mathbf{W}\cdot\nabla)\mathbf{W} = \operatorname{rot}\mathbf{W}\times\mathbf{W} + \operatorname{grad}{}^1/_2\,\mathbf{W}^2$. Поэтому последнее уравнение системы (1) преобразуется к виду

$$\operatorname{rot}\mathbf{W}\times\mathbf{W} = -\frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{H}\times\operatorname{rot}\mathbf{H} \qquad (6)$$

Проектируя уравнения (6) на оси координат x, y и учитывая формулу (2) получим

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k^2}{4\pi}\left(\frac{\partial\rho v}{\partial x} - \frac{\partial\rho u}{\partial y}\right), \quad \text{или} \quad \frac{\partial v^*}{\partial x} - \frac{\partial u^*}{\partial y} = 0 \qquad (7)$$