К ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЙ ТИПА ПРАНДТЛЯ — МАЙЕРА

К. Б. Павлов

(Москва)

Плоское движение типа Прандтля — Майера является автомодельным: при введении цилиндрической системы координат (ось z совпадает с ребром острого угла на поверхности обтекаемого газом тела) все величины являются функциями только φ. Могут представлять интерес течения, когда в движущемся по направлению к ребру потоке начальное распределение параметров неодинаково; в частности, такие течения могут осуществляться при наличии впереди тела головной ударной волны, интенсивность которой убывает по мере удаления от тела.

Если считать начальное распределение параметров известным и близким к постоянным значениям, то соответствующую задачу можно решать методом возмущений

$$v_r(\varphi) + v_r'(r, \varphi), \qquad v_\varphi(\varphi) + v_\varphi'(r, \varphi) \tag{1}$$

беря за нулевое приближение решение автомодельной задачи [1]

$$v_\varphi = c = c_* \cos n\varphi, \qquad p = p_* (\cos n\varphi)^\lambda \qquad \left(\lambda = \frac{1+n^2}{n^2}\right)$$
$$v_r = \frac{c_*}{n} \sin n\varphi, \qquad \rho = \rho_* (\cos n\varphi)^\mu \qquad \left(\mu = \frac{1-n^2}{n^2}\right) \qquad \left(n^2 = \frac{\gamma - 1}{r+1}\right) \tag{2}$$

Здесь γ — отношение теплоемкостей, звездочка означает значение соответствующей величины в критической точке, остальные обозначения общеизвестны. Для малых величин v_r', v_φ', ρ' можно получить систему линейных уравнений:

$$v_r \frac{\partial \rho'}{\partial R} + v_\varphi \frac{\partial \rho'}{\partial \varphi} + \rho \frac{\partial v_2'}{\partial R} + \rho \frac{\partial v_\varphi'}{\partial \varphi} = \frac{d \ln \rho}{d\varphi} v_\varphi \rho - \frac{d\rho}{d\varphi} v_\varphi' - \rho v_r'$$
$$v_r \frac{\partial v_r'}{\partial R} + v_\varphi \frac{\partial v_r'}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi^2}{\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial R} = v_\varphi v_\varphi' \qquad (R = \lg r) \tag{3}$$
$$v_r \frac{\partial v_\varphi'}{\partial R} + v_\varphi \frac{\partial v_\varphi'}{\partial \varphi} + \frac{v_\varphi^2}{\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial \varphi} = \frac{d \ln \rho}{d\varphi} v_\varphi v_\varphi' + \frac{v_\varphi}{\rho} \left(v_\varphi \frac{d \ln \rho}{d\varphi} - 2 \frac{dv_\varphi}{d\varphi} \right) \rho' - v_\varphi v_r'$$

Решая уравнение (3) относительно производных по R, полученную систему можно записать в форме векторного уравнения [2]

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial R} = A \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} + \Psi \qquad (x_1 = \rho', x_2 = v_r', x_3 = v_\varphi') \tag{4}$$

где $A = \| a_{ij}(\varphi) \|$ — матрица:

$$\| a_{ij} \| = \left\| \begin{matrix} \dfrac{-v_\varphi v_r}{v_r^2 - v_\varphi^2} & \dfrac{\rho v_\varphi}{v_r^2 - v_\varphi^2} & \dfrac{-\rho v_r}{v_r^2 - v_\varphi^2} \\[2ex] \dfrac{v_\varphi^3}{\rho (v_r^2 - v_\varphi^2)} & \dfrac{-v_r v_\varphi}{v_r^2 - v_\varphi^2} & \dfrac{v_\varphi^2}{v_r^2 - v_\varphi^2} \\[2ex] -\dfrac{v_\varphi^2}{\rho v_r} & 0 & -\dfrac{v_\varphi}{v_r} \end{matrix} \right\| \tag{5}$$

Введем вместо $\mathbf{x}$ вектор $\mathbf{y}$ посредством соотношения

$$\mathbf{x} = B\mathbf{y}, \qquad \mathbf{y} = B^{-1}\mathbf{x}$$

где $B = \| b_{ik}(\varphi) \|$ — матрица такая, что $\mathrm{Det}\,| B | \neq 0$, а B^{-1} — обратная матрица; имеем

$$B \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial R} = AB \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} + \Psi_1, \qquad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial R} = B^{-1} AB \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \varphi} + \Psi^2 \tag{6}$$

Находя из характеристического уравнения $\mathrm{Det}\,| A - \lambda | = 0$ собственные значения λ_k

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = -\frac{v_\varphi}{v_r}, \qquad \lambda_3 = -\frac{2 v_r v_\varphi}{v_r^2 - v_\varphi^2} \tag{7}$$

из системы

$$\sum_{j=1}^{3}(a_{ij}-\delta_{ij}\lambda_k)b_{jk}=0,\qquad \delta_{ij}=\begin{cases}0 & (i\neq j)\\ 1 & (i=j)\end{cases}\qquad \begin{pmatrix}i=1,2,3\\ k=1,2,3\end{pmatrix}\tag{8}$$

можно определить элементы b_{ik} такие, что матрица $B^{-1}AB$ будет иметь диагональную форму:

$$\| b_{jk}\| = \left\| \begin{matrix} -\dfrac{\rho}{v_\varphi} & 0 & \dfrac{\rho}{v_\varphi}\dfrac{v_r^2+v_\varphi^2}{v_t^2-v_\varphi^2} \\ 0 & -\dfrac{v_r}{v_\varphi} & -\dfrac{2v_r v_\varphi}{v_r^2-v_\varphi^2} \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| \tag{9}$$

Система (6) может быть приведена к следующему виду:

$$\begin{gathered}\frac{\partial y_1}{\partial R}=-y_1-(1-n^2)y_2-\left(1-\frac{2n^2}{1-n^2\operatorname{ctg}^2 n\varphi}\right)y_3\\ \frac{\partial y_2}{\partial R}+\frac{n}{\operatorname{tg} n\varphi}\frac{\partial y_2}{\partial\varphi}=n^2\left(1-\frac{2}{1+(n^2-1)\cos^2 n\varphi}\right)y_2\\ \frac{\partial y_3}{\partial R}+\frac{2n\operatorname{tg} n\varphi}{\operatorname{tg}^2 n\varphi-n^2}\frac{\partial y_3}{\partial\varphi}=-\frac{(1-n^2)[1-(n^2+1)\cos^2 n\varphi]}{1+(n^2-1)\cos^2 n\varphi}y_2+\frac{2n^2}{1-(n^2+1)\cos^2 n\varphi}y_3\end{gathered}\tag{10}$$

При решении конкретных задач y_2, y_3 и y_1 последовательно определяются из второго, третьего и первого уравнений.

Поступила 28 VII 1959 МВТУ им. Баумана

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехтеоретиздат, § 101, 1954.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Гостехтеоретиздат, т. 4, 1953.

К ТЕОРИИ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ОБТЕКАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА

А. Д. Лисунов

(Новосибирск)

§ 1. Как известно, неустановившееся трехмерное потенциальное движение невязкой сжимаемой жидкости описывается в векторной форме следующим уравнением:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}-a^2\operatorname{div}\mathbf{c}+\mathbf{c}\operatorname{grad}\left(2\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\mathbf{c}^2}{2}\right)=0\tag{1.1}$$

где a — скорость звука, c — вектор скорости воздушного потока.

Предполагая, что воздушный поток обтекает крыло с постоянной скоростью c вдоль оси x в положительном направлении и что возмущения, вносимые крылом, малы, потенциал возмущенной скорости φ_1 в прямоугольной системе координат будет удовлетворять волновому уравнению

$$\beta^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}+\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2}+2\frac{M}{a}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x\partial t}=0\qquad (\beta=\sqrt{M^2-1})\tag{1.2}$$

Здесь M — число Маха невозмущенного потока.

Решением этого уравнения вследствие его линейности является выражение

$$\varphi_1(x,y,z,t)=-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_S\frac{1}{r}[q(\xi,\eta,t-\tau_1)+q(\xi,\eta,t-\tau_2)]\,d\xi d\eta\tag{1.3}$$

где $q(x, y, t)$ — скос потока на поверхности крыла,

$$r=\sqrt{(x-\xi)^2-\beta^2[(y-\eta)^2+z^2]},\qquad \tau_{1,2}=\frac{M}{a\beta^2}(x-\xi)\mp\frac{r}{a\beta^2}\tag{1.4}$$