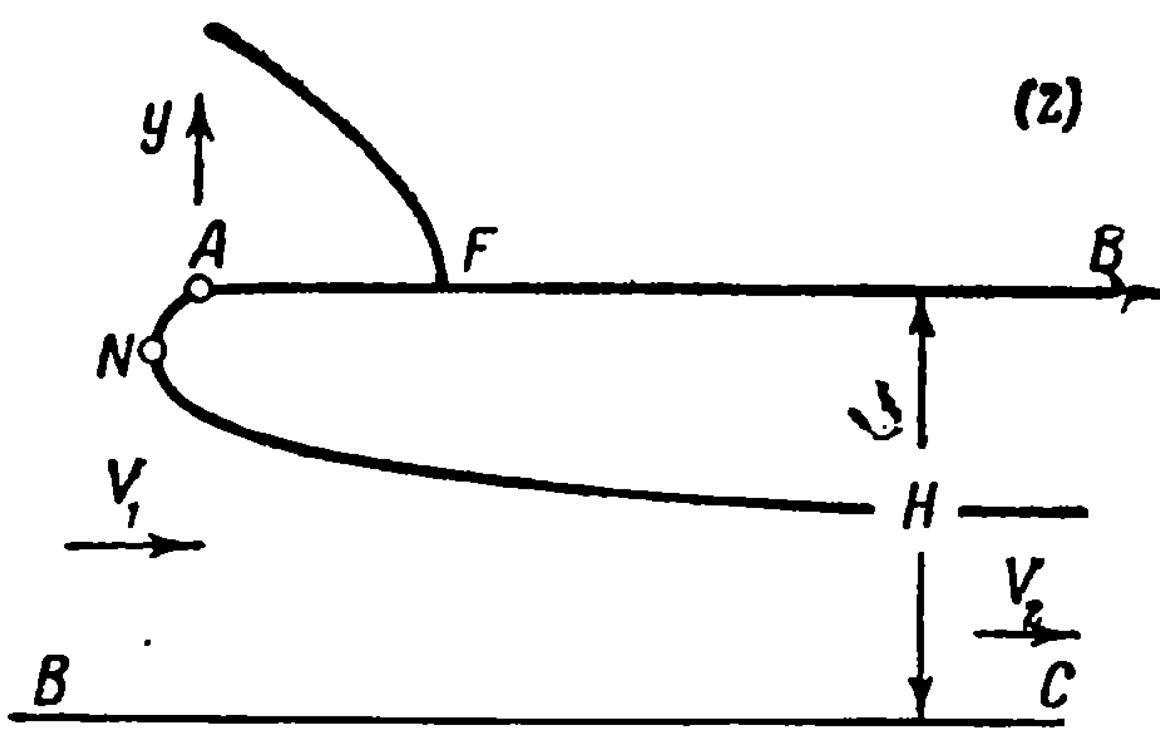
В полученном течении скорость на бесконечности перед щелью не равна нулю и на стенке AB имеется критическая точка F. Таким образом, формулы (5.7) — (5.10) дают решение задачи об истечении движущейся на бесконечности жидкости в бесконечно длинную щель (фиг. 5). В решение входит один параметр α и, следовательно, для определения этого параметра нужно задать одну безразмерную физическую величину $\varkappa = \varkappa(\alpha)$. Если $\varkappa$ — число кавитации $\varkappa = (p_1 - p_0) / 0.5 \rho V_1^2$, то

$$\varkappa = \frac{4\alpha}{(1-\alpha)^2}, \qquad \alpha = \frac{\varkappa}{2 + \varkappa + 2\sqrt{1+\varkappa}}$$



Фиг. 5

3°. Полагая $\varepsilon = 0$ в формулах (5.1) — (5.6) или $\alpha = 1$ в формулах (5.7) — (5.10), получим

$$z(\zeta) = \frac{H}{\pi}\left(\zeta^2 - 1 - \ln\zeta + \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1} + \ln\frac{1}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}\right)$$

$$w(\zeta) = -\frac{2Q}{\pi}\ln\zeta, \qquad e = \frac{1}{2}$$

т. е. решение известной задачи об истечении покоящейся на бесконечности жидкости в бесконечно длинную щель [1].

Поступила 21 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Kirchhoff G. Zur Theorie freier Flussigkeitsstrahlen. Crelle's Journ. fur Math., 70, 1869.
2. Шальнев К. К. Щелевая кавитация. Инж. сб., № 8, 1950.
3. Gilbarg D., Rock D. H. Naval Ordnance Laboratory Memo. 8718, 1945.
4. Эфрос Д. А. Гидродинамическая теория плоского кавитационного течения. Докл. АН СССР, 1946, т. 1, вып. 4.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1958.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, М.— Л., 1946.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ДИСКЕ, ВРАЩАЮЩЕМСЯ В ГАЗЕ

В. П. Шидловский

(Москва)

В динамике вязкой несжимаемой жидкости известна задача Кармана о неограниченном диске, вращающемся с постоянной угловой скоростью и приводящем в ламинарное движение примыкающее к нему жидкое пространство. Решение этой задачи служит одним из примеров точного решения уравнений Навье — Стокса [1]. Задача о теплопередаче в жидкости при условии постоянства температуры поверхности диска была (также в точной постановке) решена Мильсэпсом и Польгаузеном [2].

Ниже показано, как решение соответствующей газодинамической задачи при определенных условиях и упрощениях может быть сведено к решению двух вышеупомянутых задач.

1. Формулировка задачи. Допустим, что неограниченная плоская пластина (диск) равномерно вращается вокруг оси, перпендикулярной ее плоскости, в пространстве, заполненном вязким газом. Пусть осью вращения диска служит ось z, а его плоскость совпадает с плоскостью $z = 0$. Пользуясь цилиндрической системой координат (r, θ, z), можно записать основные уравнения, определяющие движение и теплопередачу в потоке вязкого газа (см., например, [3]). При этом будем считать выполненными следующие ограничения: газ является совершенным; течение установившееся; параметры течения не зависят от угловой координаты θ; отсутствуют массовые силы; отсутствует массовый приток тепла извне; так называемый «второй коэффициент вязкости» отличается от основного лишь постоянным множителем, $\mu_2 = \alpha\mu$, $|\alpha| = O(1)$.

Граничные условия для температуры и составляющих вектора скорости в случае задачи о диске будут иметь следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&T(r,\theta,0)=T_w, && u_r(r,\theta,0)=0, && u_\theta(r,\theta,0)=r\omega, && \\
&T(r,\theta,\infty)=T_\infty, && u_r(r,\theta,\infty)=0, && u_\theta(r,\theta,\infty)=0, && u_z(r,\theta,0)=0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

2. Переход к безразмерным переменным и упрощение уравнений. Введем два дополнительных допущения, а именно, будем считать число Прандтля $\sigma=\mu c_p/\lambda$ постоянным и примем следующий закон зависимости вязкости от температуры:

$$\mu/\mu_\infty=(T/T_\infty)^n$$

Далее выберем масштабы искомых переменных в виде величин, порядок которых соответствует порядку максимальных значений самих переменных; масштаб для осевой скорости выбирается при этом по аналогии с решением для несжимаемой жидкости. Независимые переменные также приводятся к безразмерной форме, причем масштаб длин в осевом направлении соответствует порядку толщины гидродинамического вязкого слоя в несжимаемой жидкости. Что же касается масштаба длин в радиальном направлении, то он выбирается из условия сохранения минимального числа безразмерных параметров в уравнениях.

Таким образом, безразмерные переменные вводятся при помощи формул:

$$
r=\frac{\sqrt{c_pT_\infty}}{\omega}\,\bar r,\qquad z=\sqrt{\frac{\nu_\infty}{\omega}}\,\bar z,\qquad u_r=\omega rF,\qquad u_\theta=\omega rG,\qquad u_z=\sqrt{\nu_\infty\omega}\,N \tag{2.1}
$$

$$
\mu=\mu_\infty Q^n,\qquad T=T_\infty Q,\qquad \rho=\rho_\infty D,\qquad p=\rho_\infty c_pT_\infty P
$$

Здесь F, G, N, Q, D, P являются, вообще говоря, функциями r и z.

Исследуемые уравнения в безразмерной форме будут иметь вид (черточки над r и z опущены):

уравнение неразрывности

$$
\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2DF)}{\partial r}+\frac{\partial(DN)}{\partial z}=0 \tag{2.2}
$$

уравнения движения в проекциях на три направления

$$
\begin{aligned}
D\left[F\frac{\partial(rF)}{\partial r}+N\frac{\partial F}{\partial z}-G^2\right]&=\\
=-r^{-1}\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{2}{3K}r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left\{Q^n\left[3\frac{\partial(rF)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial(r^2F)}{\partial r}-\frac{\partial N}{\partial z}\right]\right\}&+\\
+\frac{\partial}{\partial z}\left[Q^n\left(\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{1}{K}r^{-1}\frac{\partial N}{\partial r}\right)\right]+\frac{2}{K}Q^nr^{-2}\left[\frac{\partial(rF)}{\partial r}-F\right]&
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$
\begin{aligned}
D\left[F\frac{\partial(rG)}{\partial r}+N\frac{\partial G}{\partial z}+FG\right]=\frac{\partial}{\partial z}\left(Q^n\frac{\partial G}{\partial z}\right)+\frac{1}{K}r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left\{Q^n\left[\frac{\partial(rG)}{\partial r}-G\right]\right\}&+\\
+\frac{2}{K}Q^nr^{-2}\left[\frac{\partial(rG)}{\partial r}-G\right]&
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{K}D\left(rF\frac{\partial N}{\partial r}+N\frac{\partial N}{\partial z}\right)=-\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{1}{K}\frac{\partial}{\partial z}\left\{Q^n\left[2\frac{\partial N}{\partial z}-r^{-1}\frac{\partial(r^2F)}{\partial r}\right]\right\}&+\\
+\frac{1}{K}r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left\{Q^nr\left[\frac{\partial(rF)}{\partial z}+\frac{1}{K}\frac{\partial N}{\partial r}\right]\right\}&
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

уравнение энергии

$$
\begin{aligned}
D\left(rF\frac{\partial Q}{\partial r}+N\frac{\partial Q}{\partial z}\right)-\left(rF\frac{\partial P}{\partial r}+N\frac{\partial P}{\partial z}\right)=\frac{1}{K\sigma}r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}\left(rQ^n\frac{\partial Q}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial z}\left(Q^n\frac{\partial Q}{\partial z}\right)&+\\
+Q^n\left\{\frac{2}{K}\left[\left(\frac{\partial(rF)}{\partial r}\right)^2+F^2+\left(\frac{\partial N}{\partial z}\right)^2\right]+r^2\left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)^2+\left(r\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{1}{K}\frac{\partial N}{\partial r}\right)^2\right.&+\\
\left.+\frac{1}{K}\left[\frac{\partial(rG)}{\partial r}-G\right]^2\right\}+\frac{\alpha}{K}Q^n\left[\frac{\partial(rF)}{\partial r}+F+\frac{\partial N}{\partial z}\right]^2&
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

уравнение состояния

$$
P=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}DQ \tag{2.7}
$$

В уравнениях (2.3) — (2.6) содержится безразмерный параметр K, определяемый равенством

$$K = c_p T_\infty \nu_\infty^{-1} \omega^{-1} \tag{2.8}$$

Эта величина является основным параметром подобия данной задачи и может рассматриваться как комбинация базирующихся на окружной скорости диска чисел Маха и Рейнольдса

$$K = \frac{1}{\varkappa - 1} R_\infty(r) M_\infty^{-2}(r)$$

Существует очень широкий класс течений, отвечающих условию $K \gg 1$.

Уравнения, получаемые из уравнений (2.2) — (2.7) в предельном случае, при $K \to \infty$, назовем уравнениями пограничного слоя на вращающемся диске. В частности, из уравнения (2.5) и из условия постоянства давления на бесконечности следует, что во всем потоке

$$P = \text{const} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \tag{2.9}$$

Граничные условия (1.1) в безразмерной форме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} &Q(r, 0) = Q_w, \quad F(r, 0) = 0, \quad G(r, 0) = 1, \\ &Q(r, \infty) = 1, \quad F(r, \infty) = 0, \quad G(r, \infty) = 0, \end{aligned} \quad N(r, 0) = 0 \tag{2.10}$$

3. Построение точного решения уравнений пограничного слоя. Для построения решения системы уравнений (2.2) — (2.7) при $K \to \infty$ проведем преобразование, аналогичное преобразованию Дородницына для двумерного пограничного слоя в газе [4]. А именно, введем вместо r и z новые независимые переменные

$$\eta = r, \qquad \zeta = \int_0^z D dz \tag{3.1}$$

Введем также новую искомую величину H, заменяющую функцию N

$$H = ND + \eta F \frac{\partial \zeta}{\partial r} \tag{3.2}$$

а показатель степени n в законе зависимости вязкости от температуры будем считать равным единице; уравнения (2.2) — (2.4) и (2.6) приводятся к форме:

$$\frac{1}{\eta}\frac{\partial(\eta^2 F)}{\partial \eta} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0, \quad F\frac{\partial(\eta F)}{\partial \eta} + H\frac{\partial F}{\partial \zeta} - G^2 = \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2}, \quad F\frac{\partial(\eta G)}{\partial \eta} + H\frac{\partial G}{\partial \zeta} + FG = \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2}$$

$$\eta F\frac{\partial Q}{\partial \eta} + H\frac{\partial Q}{\partial \zeta} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial^2 Q}{\partial \zeta^2} + \eta^2\left[\left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \zeta}\right)^2\right] \tag{3.3}$$

Граничные условия (2.10) заменяются теперь такими условиями:

$$\begin{aligned} &Q(\eta, 0) = Q_w, \quad F(\eta, 0) = 0, \quad G(\eta, 0) = 1, \\ &Q(\eta, \infty) = 1, \quad F(\eta, \infty) = 0, \quad G(\eta, \infty) = 0, \end{aligned} \quad H(\eta, 0) = 0 \tag{3.4}$$

Функция D не входит в систему уравнений (3.3) и может быть определена из уравнений (2.7) и (2.9):

$$D = 1/Q \tag{3.5}$$

Внимательное ознакомление с системой (3.3) позволяет установить, что, во-первых, функции $F(\eta, \zeta)$, $G(\eta, \zeta)$ и $H(\eta, \zeta)$ могут быть найдены независимо от вида функции $Q(\eta, \zeta)$ из первых трех уравнений системы, четвертое же уравнение позволяет найти $Q(\eta, \zeta)$; во-вторых, если считать, что функции F, G и H не зависят от η, то упомянутые первые три дифференциальные уравнения системы становятся обыкновенными и принимают точно такой же вид, как и соответствующие уравнения в задаче Кармана для несжимаемой жидкости:

$$2F + H' = 0, \qquad F'' - HF' - F^2 = -G^2, \qquad G'' - HG' - 2FG = 0 \tag{3.6}$$

с граничными условиями

$$F(0) = 0, \quad F(\infty) = 0, \quad G(0) = 1, \quad G(\infty) = 0, \quad H(0) = 0 \tag{3.7}$$

Результаты численного решения этой системы приводятся во многих монографиях и учебниках (см., например, [5]).

Последнее уравнение системы (3.3) может быть решено при помощи приема, предложенного Мильсэпсом и Польгаузеном [2]. Этот прием не является универсальным, но пригоден при используемом условии постоянства температуры поверхности диска, а также при некоторых других вариантах граничного условия для температуры. Следуя Мильсэпсу и Польгаузену, представим функцию Q в виде трехчлена

$$Q(\eta, \zeta) = (Q_w - 1) Q_1(\zeta) + \eta^2 S(\zeta) + 1 \tag{3.8}$$

После этого упомянутое уравнение распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения с соответствующими граничными условиями:

$$Q_1'' - \sigma H Q_1' = 0, \qquad Q_1(0) = 1, \qquad Q_1(\infty) = 0 \tag{3.9}$$

$$S'' - \sigma H S' + \sigma H' S = -\sigma (F'^2 + G'^2), \qquad S(0) = 0, \qquad S(\infty) = 0 \tag{3.10}$$

Решения обоих уравнений известны из цитированной работы [2]. Таким образом, получено точное решение уравнений пограничного слоя на вращающемся диске с граничными условиями (2.10) для $n = 1$ и для конечного числа Прандтля σ.

4. Некоторые числовые результаты. Используя построенное решение, можно дать конкретную оценку влияния трения и теплопередачи на течение в пограничном слое диска. Сделаем это применительно к газу с числом Прандтля $\sigma = 0.72$.

Напряжение трения на поверхности диска выражается в размерной форме, как

$$\tau_{z\theta} = \left(\mu \frac{\partial u_\theta}{\partial z}\right)_w = \rho_\infty \sqrt{\nu_\infty \omega^3} r G'(0) \tag{4.1}$$

Коэффициент момента сил трения для одной стороны диска радиусом r_0 равен:

$$C_M = -\frac{2}{\rho_\infty^2 r_0^3 \omega^2 \pi r_0^2} \int_0^{r_0} 2\pi r^2 \tau_{z\theta} dr = -\frac{G'(0)}{\sqrt{R_\infty(r_0)}} = \frac{0.616}{\sqrt{R_\infty(r_0)}} \tag{4.2}$$

Аналогично этому поток тепла в направлении диска за счет теплопроводности, отнесенный к единице времени и к единице площади диска, можно выразить так:

$$q_z = \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z}\right)_w = \lambda_\infty (T_w - T_\infty) \sqrt{\frac{\omega}{\nu_\infty}} \left[Q_1'(0) + \frac{\omega^2 r^2}{c_p (T_w - T_\infty)} S'(0) \right] \tag{4.3}$$

Тогда имеем безразмерный коэффициент теплоотдачи с одной стороны диска

$$C_E = -\frac{r_0}{\pi r_0^2 \lambda_\infty |T_w - T_\infty|} \int_0^{r_0} 2\pi r q_z dr =$$

$$= \operatorname{sign}(T_w - T_\infty) r_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu_\infty}} \left[Q_1'(0) + \frac{\omega^2 r_0^2}{2 C_p T_\infty} \frac{T_\infty}{T_w - T_\infty} S'(0) \right] =$$

$$= \operatorname{sign}(T_w - T_\infty) r_0 \sqrt{\frac{\omega}{\nu_\infty}} \left(0.329 - 0.108 \frac{\omega^2 r_0^2}{C_p T_\infty} \frac{T_\infty}{T_w - T_\infty}\right) \tag{4.4}$$

Формулы (4.1) и (4.2), характеризующие влияние сил трения, по своей структуре аналогичны соответствующим формулам для случая несжимаемой жидкости: что же касается влияния теплопередачи, определяемого формулами (4.3) и (4.4), то оно проявляется здесь несколько иначе, чем в несжимаемой жидкости. Первое отличие состоит в том, что параметром, от которого зависит вид функций Q_1 и S, служит здесь обычное число Прандтля σ, а не модифицированное, как в задаче Мильсэпса и Польгаузена: второе отличие связано с отсутствием в (4.3) и (4.4) членов, содержащих производные введенной упомянутыми авторами функции Q_2.

Поступила 4 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Karman T. Laminare und Turbulente Reibung. ZAMM, 1921, Band 1, стр. 235.
2. Millsaps K., Pohlhausen K. Heat Transfer by Laminar Flow from a Rotating Plate. Journ. of the Aeronaut. Sci., 1952, Vol. 19, № 2.
3. Pai S.— I. Viscous Flow Theory (I — Laminar Flow). Princeton, 1956.
4. Дородницын А. А. Пограничный слой в сжимаемом газе. ПММ, 1942, т. VI, стр. 449.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., 1954.