КАВИТАЦИОННОЕ ТЕЧЕНИЕ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ЩЕЛИ

Г. Н. Пыхтеев

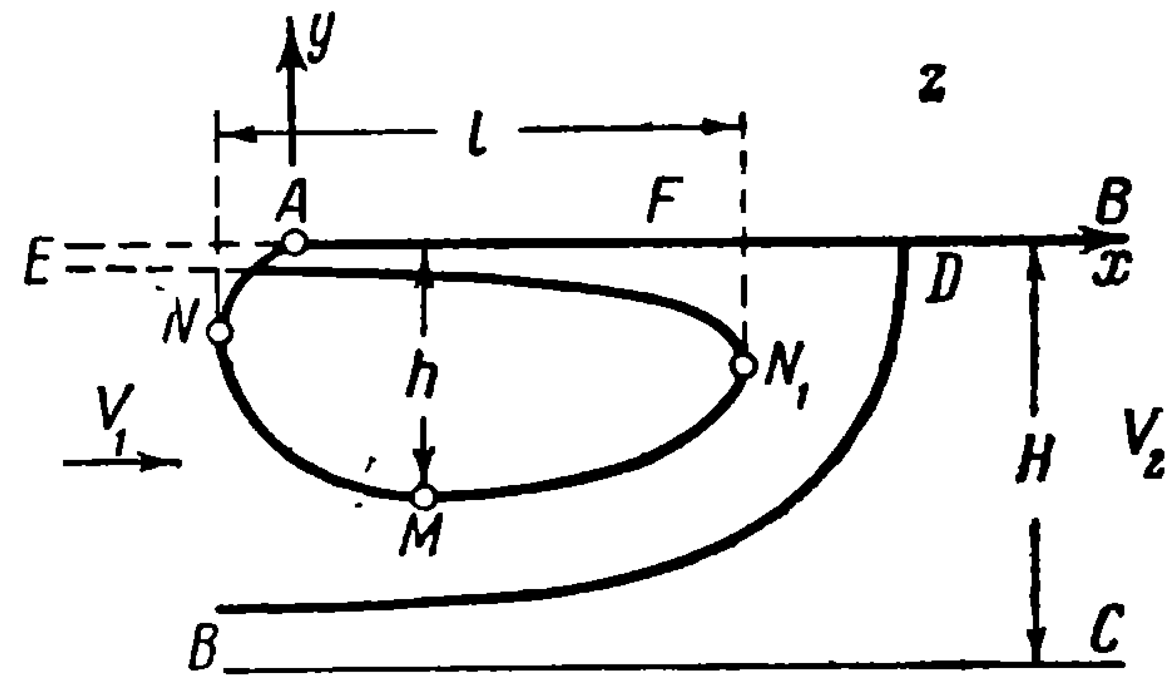
(Москва)

Рассматривается одно кавитационное течение, являющееся обобщением известного течения в насадок Борда [1], которое может быть использовано при теоретическом изучении щелевой кавитации [2].

1. Постановка задачи. Пусть плоский поток идеальной несжимаемой невесомой жидкости втекает в бесконечно длинную щель, внутри которой образуется кавитационная каверна — область постоянного давления, ограниченная линией тока, которая отрывается от края щели и уходит на второй лист римановой поверхности. Схема такого кавитационного течения изображена на фиг. 1, где буквами V_1, V_2 и H обозначены соответственно скорость набегающего потока на бесконечности, скорость в щели на бесконечности и ширина щели. Искомый поток имеет две критические точки (положение их заранее неизвестно), обозначенные на фиг. 1 буквами D и F. Для размеров каверны введены обозначения: l — расстояние между двумя параллельными касательными, проведенными в точках N и N_1 каверны, h — ордината точки M, имеющей касательную, параллельную верхней стенке.

Постоянную величину скорости на границе каверны и полный расход протекающей через щель жидкости обозначим соответственно буквами V_0 и Q.

Рассматриваемое течение является, как уже указывалось выше, обобщением одного известного течения, рассмотренного Кирхгофом [1]. Оно отличается от последнего тем, что вместо классической схемы Кирхгофа — Гельмгольца [1] берется схема, предложенная в работах [3,4], а также тем, что здесь скорость на бесконечности $V_1 \neq 0$.



Фиг. 1

Введем два безразмерных геометрических параметра

$$\lambda = \frac{l}{H}, \qquad e = 1 - \frac{h}{H} \tag{1.1}$$

и назовем λ относительной длиной каверны, а e — коэффициентом сжатия потока.

Если задать какие-нибудь две безразмерные физические величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, характеризующие поток, то по физическому смыслу задачи все остальные гидродинамические параметры потока (в частности, λ и e) должны быть определены через $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

В качестве $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ можно взять числа кавитации

$$\varkappa_1 = \frac{p_1 - p_0}{{}^1/_2 \rho V_1^2}, \qquad \varkappa_2 = \frac{p_2 - p_0}{{}^1/_2 \rho V_2^2} \tag{1.2}$$

где p_0 — давление в каверне, p_1 и p_2 — соответственно давление на бесконечности перед щелью и в щели.

Рассматриваемая задача состоит в следующем: найти комплексный потенциал искомого течения $W = W(z) = \varphi + i\psi$, где φ — потенциал скорости, ψ — функция тока, и определить зависимость λ и e от двух безразмерных величин $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

2. Определение комплексного потенциала. Будем искать зависимость $W = W(z)$ в параметрической форме:

$$W = W(\zeta), \qquad z = z(\zeta) \tag{2.1}$$

где $\zeta = \xi + i\eta$ — комплексная переменная, изменяющаяся в первом квадранте верхней полуплоскости $\xi\eta$. Положим в точке A потока $W = 0$. Область изменения W будет представлять собой полуплоскость с двумя разрезами (фиг. 2). Отобразив область W на область ζ с соответствием точек, указанным на фиг. 2, 3, получим (2.2)

$$W(\zeta) = \frac{Q}{\pi(d^2 + f^2 - \varepsilon^2)}\left[\zeta^2 - 1 - (d^2 + f^2 - \varepsilon^2)\ln\frac{\zeta^2 - \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2} + \frac{f^2 d^2}{\varepsilon^2}\ln\frac{\zeta^2 - \varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)\zeta^2}\right]$$

Для определения $z(\zeta)$ введем вспомогательную функцию

$$\chi(\zeta)=\ln\frac{1}{V_0}\frac{dW}{dz}=\ln\frac{V}{V_0}-i\vartheta \tag{2.3}$$

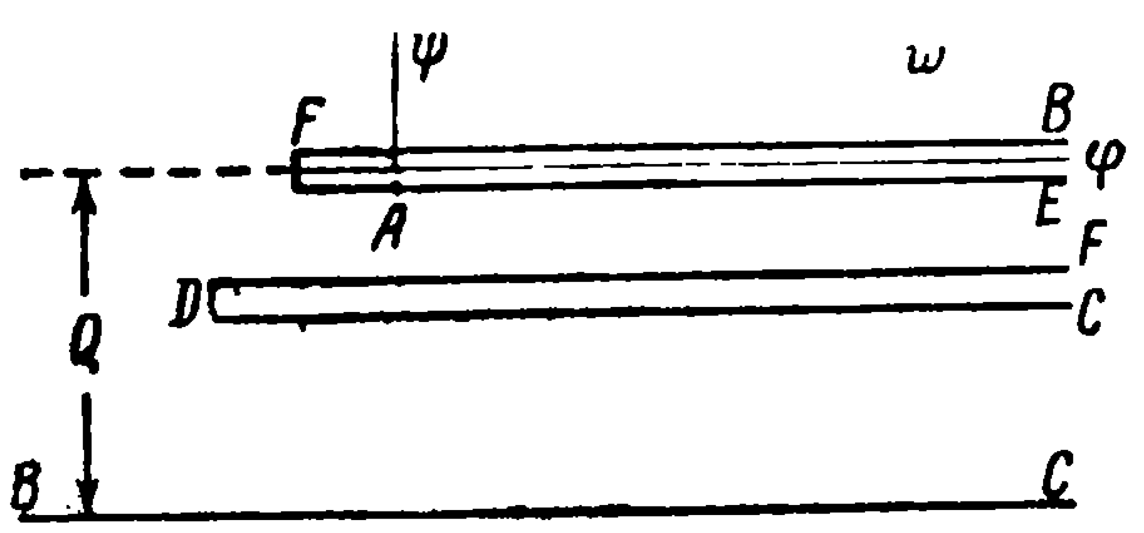
и заметим, что

$$z(\zeta)=\frac{Q}{\pi(d^2+f^2-\varepsilon^2)}\int\limits_1^{\zeta}\frac{(\zeta^2-d^2)(\zeta^2-f^2)}{\zeta(\zeta^2-\varepsilon^2)}e^{-\chi(\zeta)}d\zeta \tag{2.4}$$

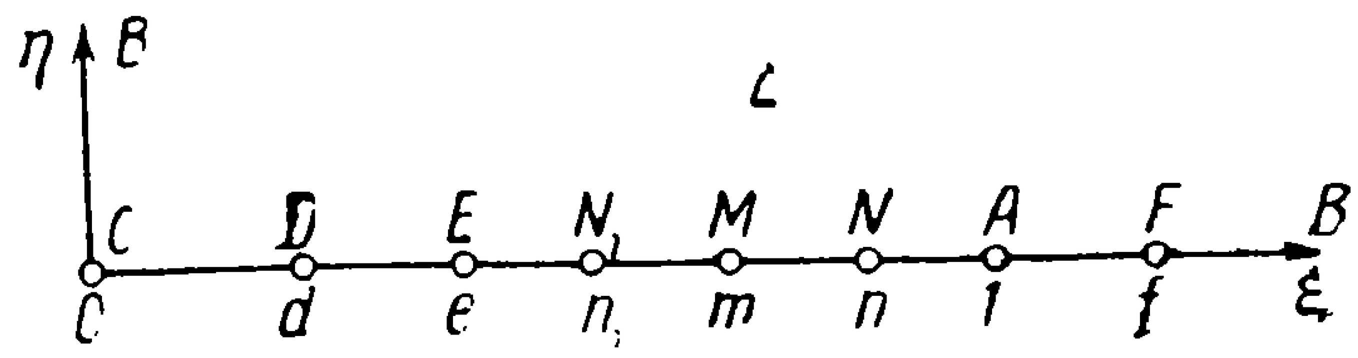
Легко видеть, что $\chi(\zeta)$ — функция, аналитическая всюду в области изменения ζ, за исключением точек $\zeta=f$ и $\zeta=d$, в которых она имеет логарифмические особенности. На границах области изменения ζ функция $\chi(\zeta)$ удовлетворяет следующим краевым условиям:

$$\begin{array}{lll}
\operatorname{Im}\chi=0 & \text{при} \begin{cases}\zeta=\xi, & 0\leqslant\xi\leqslant d,\quad f\leqslant\xi\leqslant\infty\\ \zeta=i\eta, & 0\leqslant\eta\leqslant\infty\end{cases} \\
\operatorname{Im}\chi=-\pi & \text{при}\ \zeta=\xi, & d\leqslant\xi\leqslant\varepsilon\\
\operatorname{Im}\chi=\pi & \text{при}\ \zeta=\xi, & 1\leqslant\xi\leqslant f\\
\operatorname{Re}\chi=0 & \text{при}\ \zeta=\xi, & \varepsilon\leqslant\xi\leqslant 1
\end{array} \tag{2.5}$$

Таким образом, для определения функции $\chi(\zeta)$ нужно решить смешанную краевую задачу (2.5), которую легко свести к смешанной краевой задаче для верхней полуплоскости.



Фиг. 2



Фиг. 3

Пользуясь формулами, дающими решение общей смешанной краевой задачи для полуплоскости [5,6], и применяя их к нашему случаю (2.5), получим

$$\chi(\zeta)=\ln\frac{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(\zeta^2-f^2)(\zeta^2-d^2)}{(\sqrt{\zeta^2-\varepsilon^2}+\beta\sqrt{\zeta^2-1})^2(\sqrt{\zeta^2-1}+\alpha\sqrt{\zeta^2-\varepsilon^2})^2}\qquad(0\leqslant\alpha,\ \beta\leqslant 1) \tag{2.6}$$

Нетрудно убедиться, что найденная функция $\chi(\zeta)$ удовлетворяет всем указанным выше условиям. Параметры α и β, входящие в выражение (2.6), связаны с f и d соотношениями

$$f^2=\frac{1-\alpha^2\varepsilon^2}{1-\alpha^2},\qquad d^2=\frac{\varepsilon^2-\beta^2}{1-\beta^2} \tag{2.7}$$

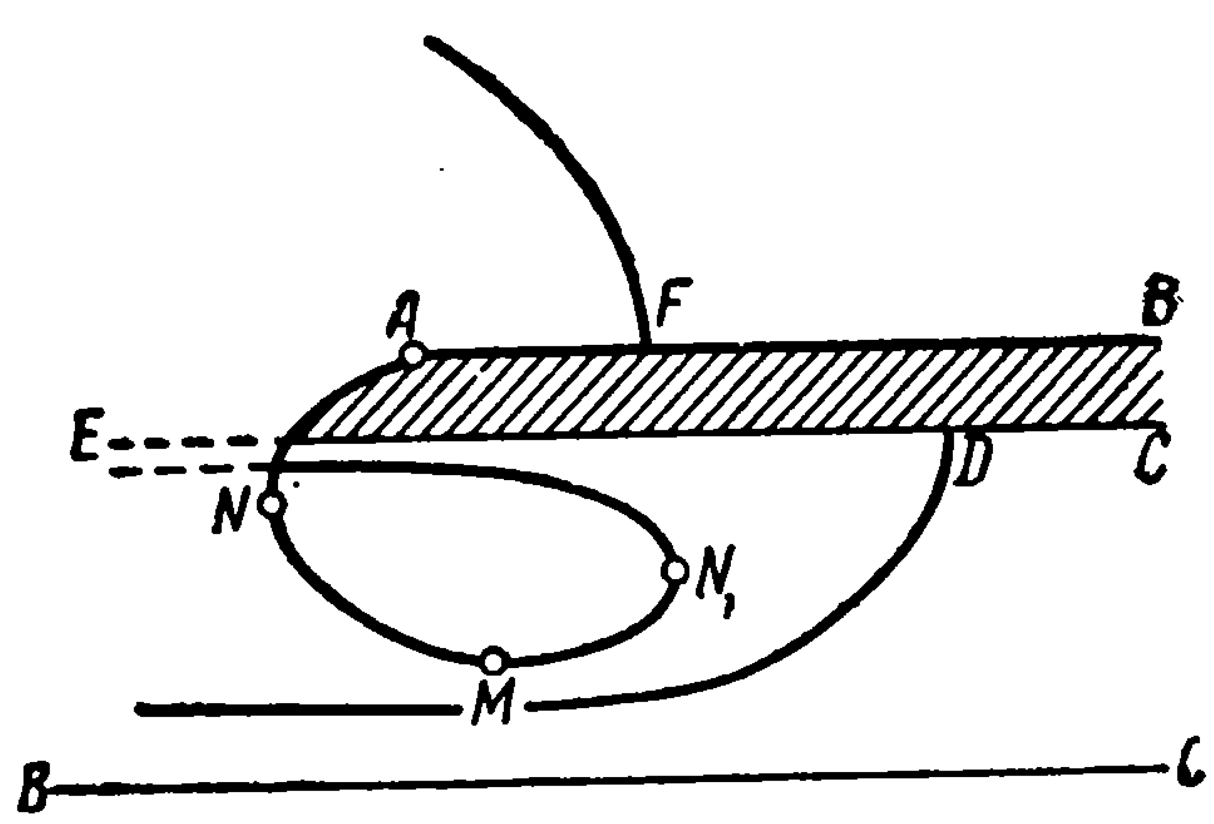
Подставив в (2.4) вместо $\chi(\zeta)$ выражение (2.6), найдем

$$\begin{aligned}z(\zeta)=\frac{2Hq}{\pi}\Big[&\frac{s}{2}(\zeta^2-1)-\frac{c}{2}\ln\frac{\zeta^2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}+\frac{b}{2\varepsilon^2}\ln\frac{1-\varepsilon^2/\zeta^2}{1-\varepsilon^2}+\\
&+(\beta+\alpha)(1+\alpha\beta)\sqrt{(\zeta^2-1)(\zeta^2-\varepsilon^2)}-a\ln\frac{\sqrt{\zeta^2-1}+\sqrt{\zeta^2-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}+\\
&+2\frac{r}{\varepsilon}\ln\frac{\sqrt{\zeta^2-\varepsilon^2}+\varepsilon\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta\sqrt{1-\varepsilon^2}}\Big]\end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\begin{aligned}&a=(1+\alpha\beta)(\alpha(1+\varepsilon^2)+\beta(3-\varepsilon^2)),\quad b=(1+\alpha\beta)^2\varepsilon^2+(\beta+\alpha\varepsilon)^2\\
&c=(1+\alpha\beta)^2+2(\alpha+\beta)(\beta+\alpha\varepsilon^2)-(\alpha+\beta)^2\varepsilon^2,\quad r=(1+\alpha\beta)(\beta+\alpha\varepsilon^2)\\
&q=1:(a+c),\quad s=(1+\alpha\beta)^2+(\alpha+\beta)^2\end{aligned} \tag{2.9}$$

3. Определение параметров. При произвольных значениях параметров α, β и ε, которые вошли в формулы (2.2), (2.8), (2.9), полученное решение является более общим, чем предполагалось при постановке задачи. Действительно, легко видеть, что формулы, дающие решение задачи, не изменились бы, если бы линия AFB, с одной стороны, и линия EDC, с другой стороны, представляли две твердые параллельные стенки, не совпадающие между собой (фиг. 4).



Фиг. 4

Следовательно, необходимо потребовать выполнение условия $\operatorname{Im} z(\zeta) = 0$ на EDC или, как это следует из (2.8), условия

$$R(\alpha, \varepsilon)\beta^2 + \varepsilon T(\alpha, \varepsilon)\beta - \alpha\varepsilon^2 = 0$$

где

$$R(\alpha, \varepsilon) = (1+\varepsilon)^2 + (2+\varepsilon)\varepsilon\alpha$$

$$T(\alpha, \varepsilon) = 2 + (1-\alpha)\varepsilon$$

Разрешая это квадратное уравнение относительно β, получим

$$\beta = \frac{\sqrt{T^2(\alpha, \varepsilon) + 4\alpha R(\alpha, \varepsilon)} - T(\alpha, \varepsilon)}{2T(\alpha, \varepsilon)} \qquad (3.1)$$

Таким образом, найденное решение содержит два произвольных параметра α и ε. Для определения этих параметров нужно задать указанные выше две физические величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$. Если при помощи комплексного потенциала $W = W(z)$, найденного в параметрической форме (2.1), можно выразить $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ через α и ε, то для определения параметров α и ε будем иметь два уравнения:

$$\varkappa_1 = \varkappa_1(\alpha, \varepsilon;\ \beta(\alpha, \varepsilon)), \qquad \varkappa_2 = \varkappa_2(\alpha, \varepsilon;\ \beta(\alpha, \varepsilon))$$

где $\beta(\alpha, \varepsilon)$ — правая часть равенства (3.1).

Пусть $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ — числа кавитации, определяемые формулами (1.2), тогда

$$\varkappa_1 = \frac{(1+\alpha)^2(1+\beta(\alpha, \varepsilon))^2}{(1-\alpha)^2(1-\beta(\alpha, \varepsilon))^2} - 1, \qquad \varkappa_2 = \frac{(1+\alpha\varepsilon)^2(\varepsilon+\beta(\alpha, \varepsilon))^2}{(1-\alpha\varepsilon)^2(\varepsilon-\beta(\alpha, \varepsilon))^2} - 1 \qquad (3.2)$$

В справедливости этих равенств легко убедиться, если учесть, что в силу интеграла Бернулли

$$p_1 - p_0 = \frac{1}{2}\rho(V_0^2 - V_1^2), \qquad p_2 - p_0 = \frac{1}{2}\rho(V_0^2 - V_2^2)$$

и что согласно (2.3)

$$V_1 / V_0 = \exp \chi(\infty), \qquad V_2 / V_0 = \exp \chi(0)$$

4. Форма и размеры каверны. Коэффициент сжатия. Форму каверны характеризует свободная струя $ANMN_1E$, ограничивающая каверну (фиг. 1).

Для того чтобы найти форму свободной струи $X = X(\xi)$, $Y = Y(\xi)$, положим $\zeta = \xi$, $\varepsilon \leqslant \xi \leqslant 1$ в равенстве (2.8) и отделим действительные и мнимые части; получим

$$X(\xi) = \frac{Hq}{\pi}\left[s(\xi^2-1) - c\ln\frac{\xi^2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{b}{\varepsilon^2}\ln\frac{\xi^2-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)\xi^2}\right] \qquad (\varepsilon \leqslant \xi \leqslant 1)$$

$$Y(\xi) = \frac{2Hq}{\pi}\left[(\beta+\alpha)(1+\alpha\beta)\sqrt{(1-\xi^2)(\xi^2-\varepsilon^2)} - \right.$$

$$\left. - a\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi^2-\varepsilon^2}} + 2\frac{r}{\varepsilon}\operatorname{arctg}\varepsilon\sqrt{\frac{1-\xi^2}{\xi^2-\varepsilon^2}}\right] \qquad (4.1)$$

Легко видеть, что свободная струя имеет две касательные, параллельные оси y, в точках $N(X(n), Y(n))$, $N_1(X(n_1), Y(n_1))$, и одну касательную, параллельную оси x, в точке $M(X(m), Y(m))$, при этом

$$n^2,\ n_1^2 = \frac{c + \varepsilon^2 s \pm \sqrt{(c+\varepsilon^2 s)^2 - 4sb}}{2s}, \qquad m^2 = \frac{\beta + \alpha\varepsilon^2}{\alpha + \beta} \qquad (4.2)$$

Из равенства (1.1), полагая $l = X(n_1) - X(n)$, $h = -Y(m)$, при помощи формул (4.1) и (4.2) находим относительную длину каверны:

$$\lambda = \frac{q}{\pi}\left[\frac{b}{\varepsilon^2}\ln\frac{n^2}{n_1^2} + \left(c - \frac{b}{\varepsilon^2}\right)\ln\frac{n^2-\varepsilon^2}{n_1^2-\varepsilon^2} - s(n^2 - n_1^2)\right] \tag{4.3}$$

и коэффициент сжатия

$$e = 1 - \frac{2q}{\pi}\left[a \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1-m^2}{m^2-\varepsilon^2}} - 2\frac{r}{\varepsilon}\operatorname{arc\,tg}\varepsilon\sqrt{\frac{1-m^2}{m^2-\varepsilon^2}} - \right.$$

$$\left. - (\beta+\alpha)(1+\alpha\beta)\sqrt{(1-m^2)(m^2-\varepsilon^2)}\right] \tag{4.4}$$

Относительная ширина каверны h/H определяется из (1.1).

5. **Частные случаи 1°.** Полагая $\alpha = 1$ в формулах (2.7) — (4.4), получим решение задачи об истечении покоящейся на бесконечности жидкости через бесконечно длинную щель с образованием конечной каверны.

В этом случае будем иметь

$$z(\zeta) = \frac{H}{\pi}\left[\sigma(\zeta^2-1) - \frac{1}{2}\ln\frac{\zeta^2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + (1-\tau)\ln\frac{\zeta^2-\varepsilon^2}{(1-\varepsilon^2)\zeta^2} + \right. \tag{5.1}$$

$$\left. + \sigma\sqrt{(\zeta^2-1)(\zeta^2-\varepsilon^2)} - \ln\frac{\sqrt{\zeta^2-1}+\sqrt{\zeta^2-\varepsilon^2}}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} + 2\tau\ln\frac{\sqrt{\zeta^2-\varepsilon^2}+\varepsilon\sqrt{\zeta^2-1}}{\zeta\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]$$

$$W(\zeta) = -\frac{Qd^2}{\pi\varepsilon^2}\left[\left(\frac{\varepsilon^2}{d^2}-1\right)\ln\frac{\zeta^2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} + 2\ln\zeta\right] \tag{5.2}$$

$$\lambda = \frac{1}{\pi}\left[(1-\tau)\ln\frac{n^2}{n_1^2} + \left(\tau - \frac{1}{2}\right)\ln\frac{n^2-\varepsilon^2}{n_1^2-\varepsilon^2} - \sigma(n^2-n_1^2)\right] \tag{5.3}$$

$$e = 1 - \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}} + 2\tau\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\varepsilon\omega} - \frac{1+\varepsilon}{1+\sqrt{2}}\sqrt{\varepsilon\omega}\right) \tag{5.4}$$

где

$$\sigma = 1 : (1 + (\sqrt{2}-1)\varepsilon)^2, \qquad \tau = (1+\varepsilon\sqrt{2}) : (1 + (\sqrt{2}-1)\varepsilon)^2$$

$$\omega = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{2}\varepsilon, \qquad d^2 = 2\varepsilon(1 + (\sqrt{2}-1)\varepsilon) : (\sqrt{2}+1)(1 + (\sqrt{2}-1)^2\varepsilon) \tag{5.5}$$

$$n^2,\ n_1^2 = \frac{2\sigma\varepsilon^2 + 1 \pm \sqrt{(2\sigma\varepsilon^2+1)^2 - 16(1-\tau)\varepsilon^2}}{4\sigma} \tag{5.6}$$

Легко видеть, что в полученном течении скорость на бесконечности перед щелью $V_1 = 0$ и критическая точка F удаляются в бесконечность ($f = \infty$); так как в решение входит только один параметр ε, то для его определения нужно задать одну безразмерную физическую величину $\varkappa = \varkappa(\varepsilon)$.

Если $\varkappa$ — число кавитации $\varkappa = (p_2 - p_0) / 0.5\,\rho V_2^2$, то

$$\varkappa = \frac{2(\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2}\varepsilon)}{(1-\varepsilon)^2}, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{\varkappa-1} - (\sqrt{2}+1)}{1+\sqrt{\varkappa-1}}$$

2°. Другой частный случай получим, если в формулах (2.2) — (2.9), (3.2) — (4.4) положим $\beta = 0$, $\varepsilon = 0$. Тогда будем иметь (5.7)

$$z(\zeta) = \frac{H}{\pi(1+\alpha)}\left[(1+\alpha^2)(\zeta^2-1) - 2\ln\zeta + 2\alpha\left(\zeta\sqrt{\zeta^2-1} + \ln\frac{1}{\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}}\right)\right]$$

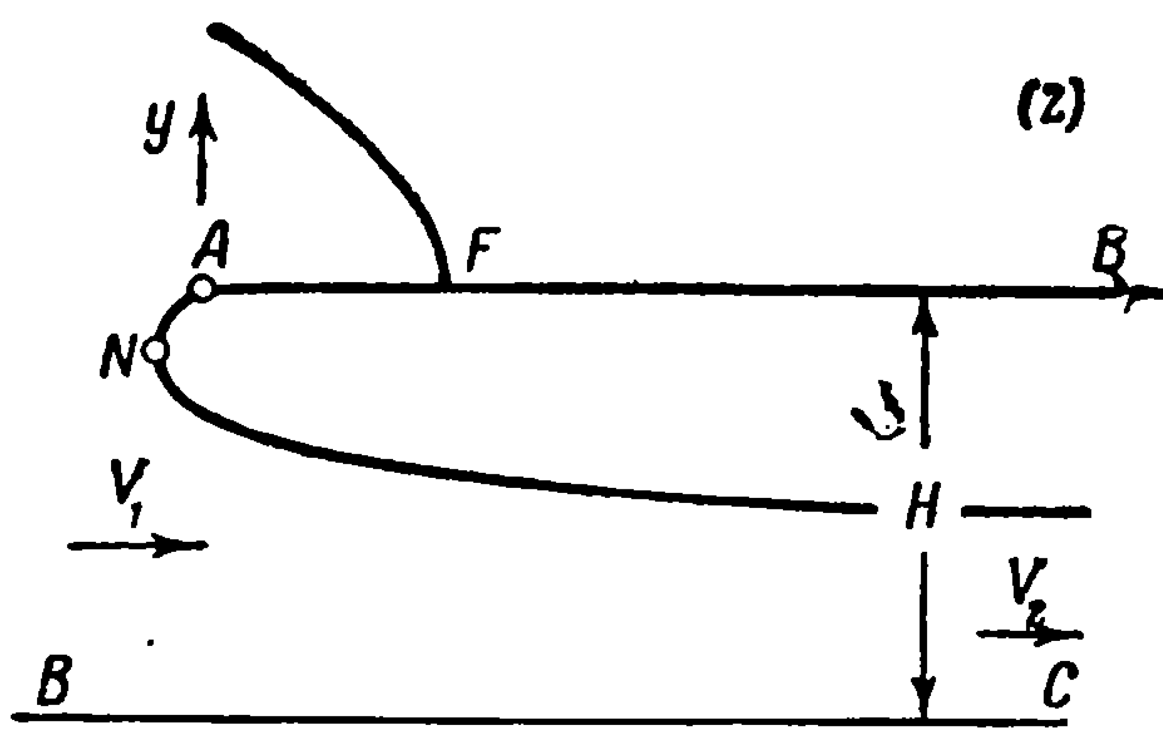
$$w(\zeta) = \frac{Q}{\pi}\left[(1-\alpha^2)(\zeta^2-1) - 2\ln\zeta\right] \tag{5.8}$$

$$\lambda = \infty, \qquad e = 1 : (1+\alpha) \tag{5.9}$$

$$m = 0, \qquad n^2 = 1 : (1+\alpha), \qquad n_1 = 0 \tag{5.10}$$

В полученном течении скорость на бесконечности перед щелью не равна нулю и на стенке AB имеется критическая точка F. Таким образом, формулы (5.7) — (5.10) дают решение задачи об истечении движущейся на бесконечности жидкости в бесконечно длинную щель (фиг. 5). В решение входит один параметр α и, следовательно, для определения этого параметра нужно задать одну безразмерную физическую величину $\varkappa = \varkappa(\alpha)$. Если $\varkappa$ — число кавитации $\varkappa = (p_1 - p_0) / 0.5 \rho V_1^2$, то

$$\varkappa = \frac{4\alpha}{(1-\alpha)^2}, \qquad \alpha = \frac{\varkappa}{2 + \varkappa + 2\sqrt{1+\varkappa}}$$



Фиг. 5

3°. Полагая $\varepsilon = 0$ в формулах (5.1) — (5.6) или $\alpha = 1$ в формулах (5.7) — (5.10), получим

$$z(\zeta) = \frac{H}{\pi}\left(\zeta^2 - 1 - \ln\zeta + \zeta\sqrt{\zeta^2-1} + \ln\frac{1}{\zeta + \sqrt{\zeta^2-1}}\right)$$

$$w(\zeta) = -\frac{2Q}{\pi}\ln\zeta, \qquad e = \frac{1}{2}$$

т. е. решение известной задачи об истечении покоящейся на бесконечности жидкости в бесконечно длинную щель [1].

Поступила 21 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Kirchhoff G. Zur Theorie freier Flussigkeitsstrahlen. Crelle's Journ. fur Math., 70, 1869.
2. Шальнев К. К. Щелевая кавитация. Инж. сб., № 8, 1950.
3. Gilbarg D., Rock D. H. Naval Ordnance Laboratory Memo. 8718, 1945.
4. Эфрос Д. А. Гидродинамическая теория плоского кавитационного течения. Докл. АН СССР, 1946, т. 1, вып. 4.
5. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. Физматгиз, М., 1958.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, М.— Л., 1946.

ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА НЕОГРАНИЧЕННОМ ДИСКЕ, ВРАЩАЮЩЕМСЯ В ГАЗЕ

В. П. Шидловский

(Москва)

В динамике вязкой несжимаемой жидкости известна задача Кармана о неограниченном диске, вращающемся с постоянной угловой скоростью и приводящем в ламинарное движение примыкающее к нему жидкое пространство. Решение этой задачи служит одним из примеров точного решения уравнений Навье — Стокса [1]. Задача о теплопередаче в жидкости при условии постоянства температуры поверхности диска была (также в точной постановке) решена Мильсэпсом и Польгаузеном [2].

Ниже показано, как решение соответствующей газодинамической задачи при определенных условиях и упрощениях может быть сведено к решению двух вышеупомянутых задач.

1. Формулировка задачи. Допустим, что неограниченная плоская пластина (диск) равномерно вращается вокруг оси, перпендикулярной ее плоскости, в пространстве, заполненном вязким газом. Пусть осью вращения диска служит ось z, а его плоскость совпадает с плоскостью $z = 0$. Пользуясь цилиндрической системой координат (r, θ, z), можно записать основные уравнения, определяющие движение и теплопередачу в потоке вязкого газа (см., например, [3]). При этом будем считать выполненными следующие ограничения: газ является совершенным; течение установившееся; параметры течения не зависят от угловой координаты θ; отсутствуют массовые силы; отсутствует массовый приток тепла извне; так называемый «второй коэффициент вязкости» отличается от основного лишь постоянным множителем, $\mu_2 = \alpha\mu$, $|\alpha| = O(1)$.