ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ МИЗЕСА К ЗАДАЧЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЛАМИНАРНОЙ СТРУИ ВДОЛЬ СТЕНКИ

Н. И. Акатнов

(Ленинград)

§ 1. **Постановка задачи.** Пусть имеется полубесконечная пластинка и в ее носике помещен щелевой, бесконечно тонкий источник, из которого вдоль одной из сторон пластинки бьет струя жидкости такой же, как жидкость, которой заполнено пространство, окружающее пластинку. Будем считать, что жидкость в окружающем пространстве движется с постоянной скоростью $u_0 = \text{const}$ в направлении течения струи, образуя спутный поток струи.

Расположим начало O прямоугольных координат в источнике струи, а ось Ox — вдоль пластинки в направлении движения жидкости. Примем, что область движения является пограничным слоем с градиентом давления, равным нулю. Для решения задачи используем уравнение пограничного слоя в форме Мизеса [1]

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial}{\partial \Psi}\left(u \frac{\partial u}{\partial \Psi}\right) \qquad \left(\xi = x, \ldots, \Psi = \int_0^y u\,dy\right) \tag{1.1}$$

Здесь Ψ — функция тока, u — проекция скорости на ось x.

Решение уравнения (1.1) должно удовлетворять граничным условиям вида

$$u = 0 \quad \text{при } \Psi = 0, \qquad u = u_0 \quad \text{при } \Psi = \Psi_\infty \tag{1.2}$$

где объемный расход через данное сечение струи $\Psi_\infty = \infty$ при $u_0 \neq 0$.

Если $u_0 = 0$, т. е. решается задача о распространении струи без спутного потока [2,3], то Ψ_∞ равно величине конечной. Кроме граничных условий (1.2), необходимо еще дополнительное условие для количественного задания интенсивности струи. Такое условие нетрудно получить, если переписать уравнение (1.1) в виде

$$\frac{\partial (u_0 - u)}{\partial \xi} = \nu \frac{\partial}{\partial \Psi}\left[u \frac{\partial (u_0 - u)}{\partial \Psi}\right] \tag{1.3}$$

а затем, умножив уравнение (1.3) на $\Psi d\Psi$, проинтегрировать его по Ψ и ξ, удовлетворяя при этом граничным условиям (1.2). В результате получается интегральное соотношение такого вида:

$$\frac{\nu u_0^2}{2}\,\xi - \int_0^{\Psi_\infty} (u_0 - u)\,\Psi d\Psi = E = \text{const} \tag{1.4}$$

Решая задачу о распространении струи со спутным потоком, необходимо подчинить решение уравнения (1.1) граничным условиям (1.2) и интегральному условию (1.4) при заданном $E = E_0$.

§ 2. **Распространение струи без спутного потока.** Решение задачи при $u_0 = 0$ должно удовлетворять уравнению (2.1), граничным условиям (1.2) и интегральному условию (1.4), которое при $u_0 = 0$ принимает вид:

$$\int_0^{\Psi_\infty} u\Psi d\Psi = E_0 \tag{2.1}$$

Имея в виду, что Ψ — функция тока, нетрудно убедиться в том, что условие (2.1) совпадает с ранее выведенным интегральным условием в работах [2,3].

Будем искать решение уравнения (1.1) в виде

$$u = \sqrt{\frac{E_0}{\nu\xi}}\,\varphi(\eta_1), \qquad \eta_1 = \Psi\,(E_0 \nu \xi)^{-1/4} \tag{2.2}$$

Для определения функции φ получим дифференциальное уравнение

$$2(\varphi^2)'' + \eta_1 \varphi' + 2\varphi = 0 \tag{2.3}$$

Это уравнение нужно решать при граничных условиях

$$\varphi = 0 \quad \text{при } \eta_1 = 0, \qquad \varphi = 0 \quad \text{при } \eta_1 = \eta_\infty \tag{2.4}$$

и соблюдении интегрального условия (2.1).

Частное решение уравнения (2.3), автоматически удовлетворяющее первому граничному условию (2.4), находится в замкнутом виде и после удовлетворения второму граничному условию (2.4) принимает вид:

$$\varphi = \frac{1}{6}\eta_\infty^2(\sqrt{t} - t^2) \qquad (t = \eta_1 / \eta_\infty) \tag{2.5}$$

Удовлетворяя интегральному условию (2.1), найдем, что $\eta_\infty = 2.515$ и решение уравнения (2.3) окончательно примет вид:

$$\varphi = 1.054(\sqrt{t} - t^2) \tag{2.6}$$

Вспоминая, что Ψ — функция тока и, следовательно,

$$y = \int_0^\Psi \frac{d\Psi}{u} \tag{2.7}$$

можно перейти от переменных Мизеса к переменным (x, y). Подставляя выражение (2.6) в формулу (2.7) и выражая Ψ через η_1, найдем связь между параметром t и переменными (x, y) в виде

$$\frac{2}{\eta_\infty}\ln\frac{1+\sqrt{t}+t}{(1-\sqrt{t})^2} + \frac{12}{\sqrt{3}\eta_\infty}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3t}}{\sqrt{t}+2} = y\sqrt[4]{\frac{E_0}{\nu^3x^3}} \tag{2.8}$$

Исключая из (2.6) и (2.8) параметр t, можно найти безразмерный профиль (фиг. 1) продольных скоростей в физической плоскости где

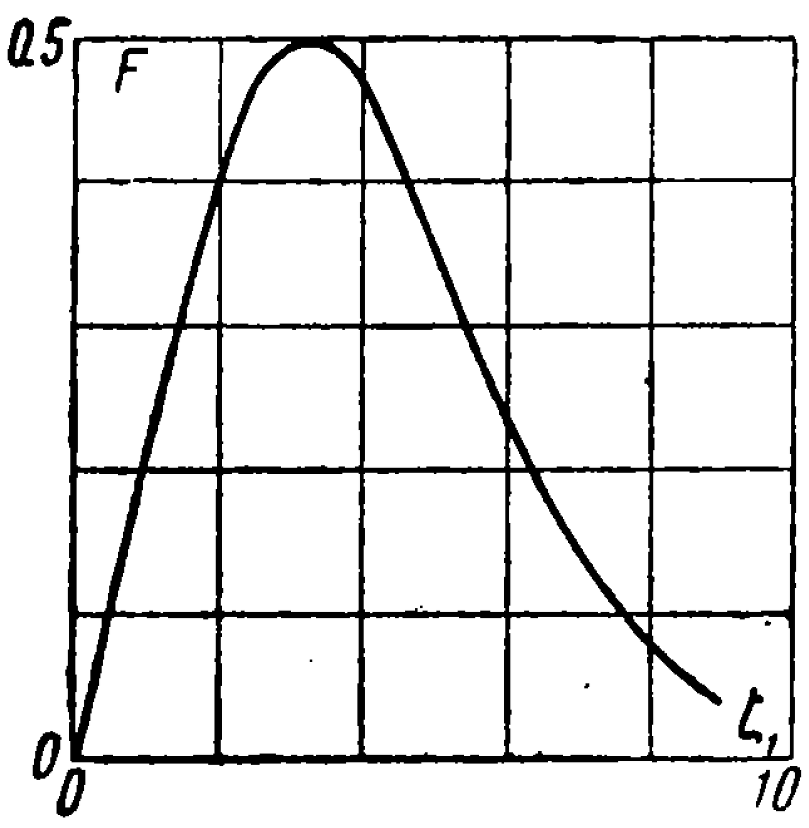
$$\varphi(t) = F(\zeta_1) \qquad \left(\zeta_1 = y\sqrt[4]{\frac{E_0}{\nu^3x^3}}\right)$$

Таким образом, для скорости жидкости в струе имеем формулу

$$u = \sqrt{\frac{E_0}{\nu x}}\,F\left(y\sqrt[4]{\frac{E_0}{\nu^3x^3}}\right) \tag{2.9}$$

Напряжение трения на стенке равно

$$\tau_w = 0.221\,\mu\sqrt[4]{\frac{E_0^3}{\nu^5x^5}}\ldots \tag{2.10}$$



Фиг. 1

§ 3. **Асимптотическое решение задачи о распространении струи со спутным потоком.** Решение задачи при $u_0 \neq 0$ удается найти только при больших значениях ξ в виде разложения решения в ряд. Для удобства введем вместо величины E_0 в выражении (1.4) другую величину, имеющую размерность длины

$$L_0 = \frac{E_0}{\nu u_0^2} \tag{3.1}$$

тогда интегральное соотношение (1.4) приобретает вид

$$\int_0^{\Psi_\infty = \infty} (u_0 - u)\,\Psi d\Psi = \nu u_0^2\left(\frac{1}{2}\xi - I_0\right) \tag{3.2}$$

Решение уравнения (1.1) будем искать в виде ряда

$$\frac{u}{u_0} = f_0(\eta_2) + \frac{f_1(\eta_2)}{(\xi / L_0)} + \frac{f_2(\eta_2)}{(\xi / L_0)^2} + \ldots \qquad \left(\eta_2 = \frac{\Psi}{\sqrt{\nu u_0(\xi + L_0)}}\right) \tag{3.3}$$

Подставляя разложение (3.3) в уравнение (1.1), получим систему дифференциальных уравнений для определения коэффициентов разложения (3.3) такого вида:

$$\begin{gathered}(f_0^2)'' + \eta_2 f_0' = 0\\ (f_0 f_1)'' + \frac{1}{2}\eta_2 f_1' + f_1 = 0\\ \left(f_0 f_2 + \frac{1}{2}f_1^2\right)'' + \frac{1}{2}\eta_2 f_2' + 2f_2 + f_1 = 0\end{gathered} \tag{3.4}$$

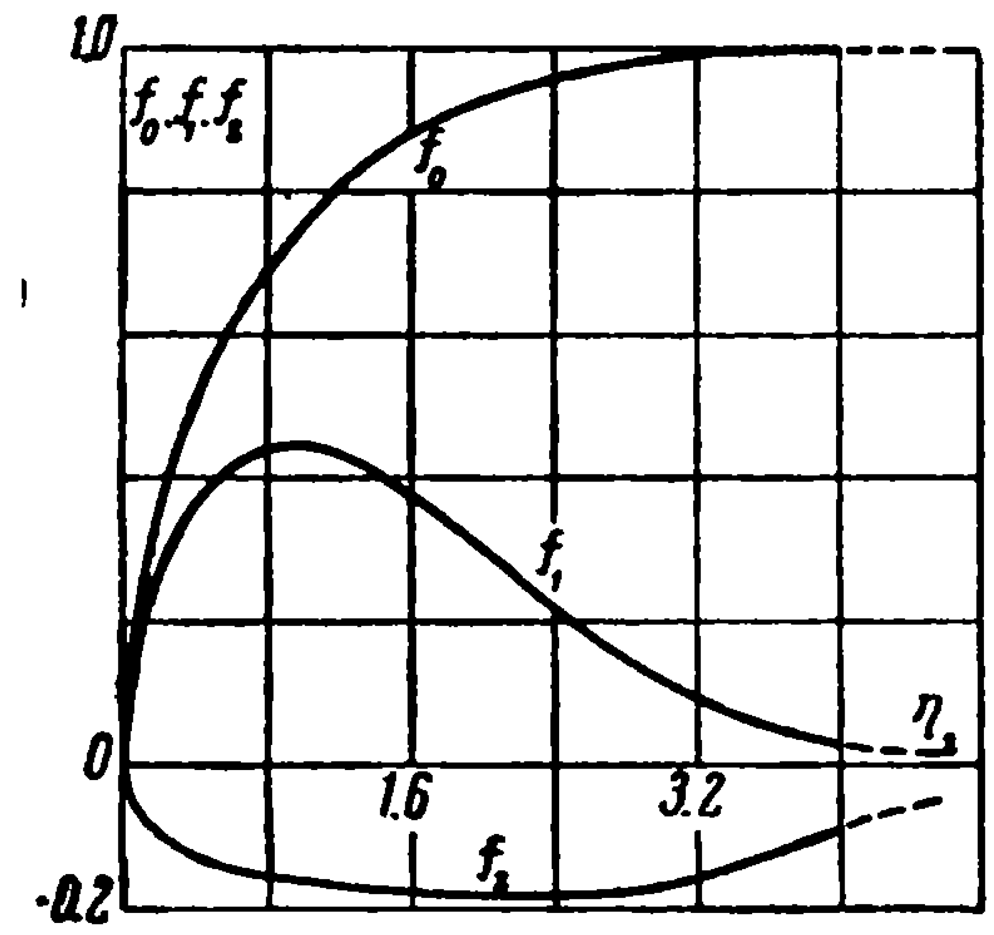
Соответствующие граничные условия, которые получаются при подстановке разложения (3.3) в граничные условия (2.2), имеют вид:

$$f_0 = f_1 = f_2 = \ldots = 0 \quad \text{при } \eta_2 = 0, \qquad f_0 = 1,\ f_1 = f_2 = \ldots = 0 \text{ при } \eta_2 = \infty \tag{3.5}$$

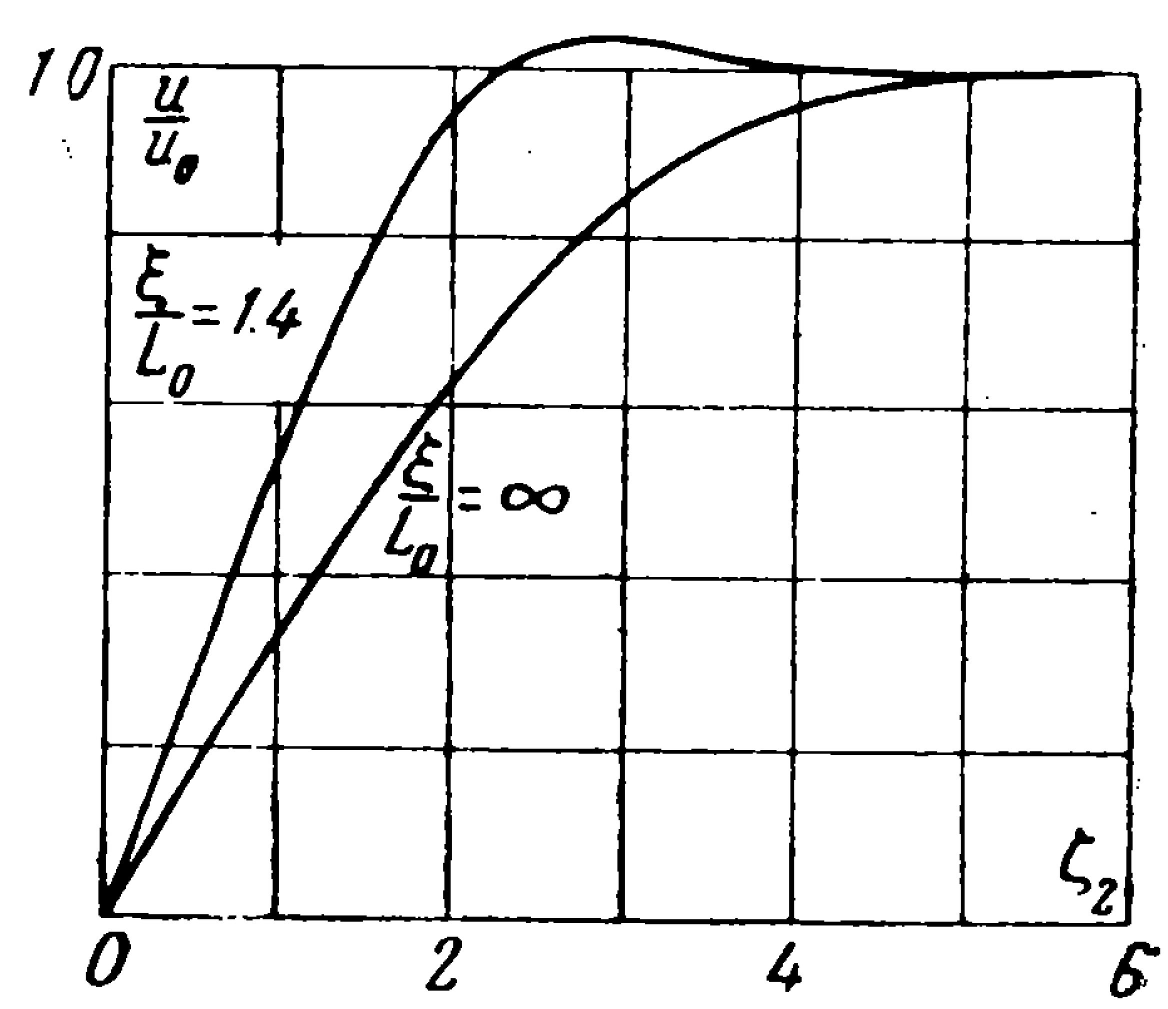
Решения дифференциальных уравнений (3.4) должны, кроме того, удовлетворять системе интегральных условий

$$\int_0^\infty (1 - f_0)\, \eta_2 d\eta_2 = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^\infty f_1 \eta_2 d\eta_2 = \frac{3}{2}, \qquad \int_0^\infty f_2 \eta_2 d\eta_2 = -\frac{3}{2} \tag{3.6}$$

Заметим, что в большом удалении от источника струи вниз по потоку вследствие уменьшения интенсивности струи течение вблизи пластинки будет представлять собой пограничный слой на пластинке, продольно обтекаемой потоком постоянной скорости. Поэтому решение (3.3) при $\xi \to \infty$ должно стремиться к решению Блязиуса [4].



Фиг. 2



Фиг. 3

Нетрудно убедиться в том, что решение (3.3) действительно удовлетворяет этому условию, так как дифференциальное уравнение и граничные условия, из которых определяется f_0 — первый член разложения (3.3), в точности соответствуют уравнению и граничным условиям в задаче Блязиуса, пересчитанным к переменным Мизеса. Решение уравнения Блязиуса затабулировано и его остается только пересчитать к переменным Мизеса. Численная проверка показывает, что это решение автоматически удовлетворяет первому интегральному условию системы (3.6).

Функции $f_1(\eta_2)$ и $f_2(\eta_2)$, которые соответствуют добавочной скорости из-за наличия струи, были найдены путем численного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений системы (3.4) при удовлетворении граничным условиям (3.5) и интегральным условиям (3.6). Графики функций f_0, f_1, f_2 представлены на фиг. 2.

Возвращаясь в физическую плоскость (x, y), при помощи выражения

$$\zeta_2 = y \sqrt{\frac{u_0}{\nu (x + L_0)}} = \int_0^{\eta_2} \frac{d\eta_2}{f_0 + (L_0 / \xi) f_1 + (L_0^2 / \xi^2) f_2 + \ldots} \tag{3.7}$$

можно найти профиль скоростей u / u_0. На фиг. 3 построен график профиля скоростей в физической плоскости для $\xi / L_0 = 1.40$, и для сравнения здесь же приведен профиль скоростей при $\xi / L_0 = \infty$, т. е. профиль Блязиуса.

Поступила 6 I 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. К теории плоских ламинарных и турбулентных струй. Тр. ЛПИ, № 176, 1955.
2. Акатнов Н. И. Распространение плоской ламинарной струи несжимаемой жидкости вдоль твердой стенки. Тр. ЛПИ, № 5, 1953.
3. Glauert M. Wall Jet. Journ. of Fluid Mec., № 1, 1956.
4. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. Гостехиздат, М., 1957, стр. 519.