НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

А. И. Сафрончик

(Саратов)

В работе даются постановка и решение задачи о неустановившемся течении вязко-пластического материала в круглой трубе при переменном перепаде давления. Разрабатывается метод решения осесимметричных «задач с искомой границей» для уравнения теплопроводности. Находится закон изменения «ядра» течения во времени.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим течение вязко-пластического материала в круглой трубе радиуса R под действием заданного перепада давления. Трубу будем предполагать достаточно длинной (чтобы пренебречь влиянием концов), материал, из которого сделана труба, бесконечно жестким, а вязко-пластический материал несжимаемым. Направим ось Oz по оси трубы в направлении движения, а ось Or по направлению одного из радиусов. Уравнение движения в цилиндрических координатах в предположении осевой симметрии имеет вид:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right) + \frac{\tau_0}{r} + P(t) \qquad \left(P(t) = -\frac{\partial p}{\partial z}\right) \tag{1.1}$$

Здесь v — осевая составляющая скорости, ρ — плотность, μ — коэффициент вязкости, $P(t)$ — перепад давления на единицу длины трубы, τ_0 — предельное напряжение сдвига.

Заданный перепад давления предполагается достаточно большим, так что вызываемые им касательные напряжения превосходят предельное напряжение сдвига. Вся область течения разбивается на две: область собственно вязко-пластического течения ($r_0(t) < r < R$), распределение скоростей в которой описывается уравнением (1.1), и область упругого «ядра» ($0 \leqslant r < r_0(t)$), движущуюся как твердое тело. Через $r_0(t)$ обозначен радиус ядра, который является неизвестной функцией времени, подлежащей определению.

Начальное условие принимаем в виде

$$v(r, 0) = F(r) \qquad \text{при } r_0(0) < r < R \tag{1.2}$$

Здесь $r(0)$ — начальный радиус ядра.

На стенке трубы, как и в случае вязкой жидкости, выполняется условие прилипания

$$v(r, t) = 0 \qquad \text{при } r = R \tag{1.3}$$

Так как на границе «ядра» напряжение равно предельному напряжению сдвига, то

$$\frac{\partial v}{\partial r} = 0 \qquad \text{при } r = r_0(t) \tag{1.4}$$

Второе условие на границе ядра получим, рассматривая его как тело переменной массы, меняющейся с изменением площади поперечного сечения. Применяя закон сохранения количества движения к массе единичной длины и учитывая, что масса присоединяется (отделяется) без удара, получим

$$\rho \frac{dv_0(t)}{dt} = P(t) - \frac{2\tau_0}{r_0(t)} \tag{1.5}$$

Здесь $v_0(t)$ — скорость ядра. Проинтегрировав (1.5) по t, будем иметь

$$v_0(t) = v_0(0) + \frac{1}{\rho}\int_0^t P(\sigma)\,d\sigma - \frac{2\tau_0}{\rho}\int_0^t \frac{d\sigma}{r_0(\sigma)} \tag{1.6}$$

Введем безразмерные время y, радиус x и скорость u по формулам

$$y = \frac{\nu}{R^2}t, \qquad x = \frac{r}{R}, \qquad u = \frac{v}{V}$$

Уравнение (1.1) и краевые условия приведем к безразмерному виду

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{S}{x} + P_*(y) \quad \text{при } y > 0, \ \delta(y) < x < 1 \tag{1.7}$$

Для построения решения достаточно предполагать краевые условия выполняющимися при предельном переходе

$$\lim_{y \to +0} U(x, y) = \frac{F(Rx)}{V} = \Phi(x) \qquad \text{при } \delta_0 < x < 1 \tag{1.8}$$

$$\lim_{x \to 1-0} U(x, y) = 0, \qquad \lim_{x \to \delta(y)+0} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (y > 0) \tag{1.9}$$

$$\lim_{x \to \delta(y)+0} U(x, y) = \Phi(\delta_0) + \int_0^y \left[P_*(\sigma) - \frac{2S}{\delta(\sigma)}\right] d\sigma \qquad (y > 0) \tag{1.10}$$

Здесь $P_*(y)$ — безразмерный перепад давления на единицу длины трубы, S — параметр Сен-Венана, $\delta(y)$ — безразмерный радиус ядра

$$P_*(y) = \frac{R^2}{\mu V} P(t), \qquad S = \frac{\tau_0 R}{\mu V}, \qquad \delta(y) = \frac{r_0(t)}{R} \tag{1.11}$$

§ 2. **Построение решения**. Для решения сформулированной задачи с неизвестной подвижной границей воспользуемся методом, который был предложен Колоднером для линейных задач [1]. Будем искать решение краевой задачи (1.7) — (1.10) в виде

$$U(x, y) = -Sx + \int_0^y P_*(\sigma)\, d\sigma + K(x, y) + \lambda(x, y) \tag{2.1}$$

Функцию $K(x, y)$ подберем так, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial K}{\partial x} \tag{2.2}$$

и условию

$$\lim_{y \to +0} K(x, y) = Sx + \Phi(x) \qquad \text{при } \delta_0 < x < 1 \tag{2.3}$$

В качестве такой функции можно взять, например,

$$K(x, y) = \frac{1}{2y} \int_{\delta_0}^1 \xi \left[S\xi + \Phi(\xi)\right] I_0\left(\frac{x\xi}{2y}\right) \exp \frac{-(x^2 + \xi^2)}{4y}\, d\xi \tag{2.4}$$

Легко проверить, что при $y > 0$ и любом x функция $K(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.2). Покажем, что условие (2.3) также выполняется. Так как нас будут интересовать значения функции $K(x, y)$ при малых значениях y, то Бесселеву функцию под знаком интеграла можно заменить ее асимптотическим представлением

$$I_0(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z$$

Тогда, вводя новую переменную интегрирования

$$\alpha = \frac{x - \xi}{2\sqrt{y}}$$

будем иметь при $\delta_0 < x < 1$

$$\lim_{y \to +0} K(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \lim_{y \to +0} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{x + 2\alpha\sqrt{y}}\, [S(x + 2\alpha\sqrt{y}) +$$

$$+ \Phi(x + 2\alpha\sqrt{y})]\, e^{-\alpha^2} d\alpha = Sx + \Phi(x) \qquad \left(\theta_1 = \frac{\delta_0 - x}{2\sqrt{y}}, \quad \theta_2 = \frac{1 - x}{2\sqrt{y}}\right) \tag{2.5}$$

Возможность предельного перехода под знаком интеграла следует из непрерывности $\Phi(x)$.

На концах интервала предел зависит от способа приближения к точкам $M_1(1,0)$ и $M_2(\delta_0, 0)$. При подходе по прямым $x = 1$ и $x = \delta_0$ он равен $1/2\, S$ и $1/2\,[S\delta_0 + \Phi(\delta_0)]$ соответственно. Для функции $\lambda(x, y)$ будем иметь следующую краевую задачу:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \lambda}{\partial x} \qquad \text{при } y > 0,\ \delta(y) < x < 1 \tag{2.6}$$

$$\lim_{y \to +0} \lambda(x, y) = 0 \qquad \text{при } \delta_0 < x < 1 \tag{2.7}$$

$$\lim_{x \to 1-0} \lambda(x, y) = S - \int_0^y P_*(\sigma)\, d\sigma - \tag{2.8}$$

$$- \frac{1}{2y}\int_{\delta_0}^1 \xi\, [S\xi + \Phi(\xi)]\, I_0\left(\frac{x\zeta}{2y}\right) \exp\frac{-(1+\xi^2)}{4y}\, d\xi = f(y)$$

$$\lim_{x \to \delta(y)+0} \lambda(x, y) = \Phi(\delta_0) + S\delta(y) - 2S \int_0^y \frac{d\sigma}{\delta(\sigma)} - \qquad (y > 0) \tag{2.9}$$

$$- \frac{1}{2y}\int_{\delta_0}^1 \xi\, [S\xi + \Phi(\xi)]\, I_0\left(\frac{\xi\delta(y)}{2y}\right) \exp\frac{-[\xi^2 + \delta^2(y)]}{4y}\, d\xi = \varphi(y)$$

$$\lim_{x \to \delta(y)+0} \frac{\partial \lambda}{\partial x} = S - \frac{1}{4y^2}\int_{\delta_0}^1 \xi\, [S\xi + \Phi(\xi)] \left\{\xi I_1\left(\frac{\xi\delta(y)}{2y}\right) - \right. \qquad (y > 0) \tag{2.10}$$

$$\left. - \delta(y)\, I_0\left(\frac{\xi\delta(y)}{2y}\right)\right\} \exp\frac{-[\xi^2 + \delta^2(y)]}{4y}\, d\xi = \psi(y)$$

Решение краевой задачи (2.6) — (2.10) будем искать в виде суммы регулярного решения (2.6) $\theta(x, y)$, удовлетворяющего условиям

$$\theta(x, 0) = 0, \qquad \theta(1, y) = f(y) - N(1, y), \qquad |\theta(0, y)| \leqslant C \tag{2.11}$$

и нерегулярного $N(x, y)$, которое, кроме нулевого начального условия, удовлетворяет еще двум условиям скачка на произвольной кривой $x = \delta(y)$: (2.12)

$$\lim_{x \to \delta(y)+0} N(x, y) - \lim_{x \to \delta(y)-0} N(x, y) = \varphi(y) \qquad \lim_{x \to \delta(y)+0} \frac{\partial N}{\partial x} - \lim_{x \to \delta(y)-0} \frac{\partial N}{\partial x} = \psi(y)$$

и условиям

$$|N(0, y)| \leqslant A, \qquad N(\infty, y) = 0 \tag{2.13}$$

Регулярное решение ищется в области $T\,\{0 \leqslant y \leqslant y_0,\ 0 \leqslant x \leqslant 1\}$. Относительно области существования нерегулярного решения предположим следующее. Обозначим через D_+ область $\{0 < y \leqslant y_0,\ \delta(y) < x < \infty\}$, а через D_- область $\{0 < y \leqslant y_0,\ 0 \leqslant x < \delta(y)\}$, дополнительную к D_+, и пусть $\bar{D}$ будет замыканием $D_- + D_+$ в множестве $E\,\{0 \leqslant y \leqslant y_0,\ 0 \leqslant x < \infty,\ |x - \delta_0| + |y| > 0\}$, а D внутренностью $\bar{D}$. Очевидно, что ни D, ни $\bar{D}$ не зависят от выбора $\delta(y)$. Ниже будет показано, что существует единственное ограниченное решение краевой задачи (2.12) — (2.13) в области D.

Построение регулярного решения. С физической точки зрения регулярное решение можно понимать как распределение температур в бесконечном стержне с коэффициентом температуропроводности, равным единице, имеющем в начальный момент нулевую температуру, и, на поверхности которого поддерживается температура

$$\alpha(y) = f(y) - N(1, y)$$

Известно, что такое решение может быть записано в виде

$$\theta(x, y) = \alpha(y) - 2\alpha(0) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k x)}{\alpha_k J_1(\alpha_k)} \exp(-\alpha_k^2 y) -$$

$$-2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0(\alpha_k x)}{\alpha_k J_1(\alpha_k)} \exp(-\alpha_k^2 y) \int_0^y \alpha'(\sigma) \exp(\alpha_k^2 \sigma)\, d\sigma \qquad (2.14)$$

где α_k — корни уравнения $J_0(\alpha) = 0$, а $J_0(\alpha)$ и $J_1(\alpha)$ — бесселевы функции нулевого и первого порядков.

Построение нерегулярного решения. Построение нерегулярного решения основано на свойствах плоских тепловых потенциалов простого и двойного слоев от источников, распределенных равномерно по кругу. Покажем, что нерегулярное решение можно представить в виде комбинации тепловых потенциалов, так что будут выполнены все краевые условия. Пусть

$$N(x, y) = K_1(x, y) + K_2(x, y) \qquad (2.15)$$

где

$$K_1(x, y) = \frac{1}{4} \int_0^y \frac{\varphi(\eta)\,\delta(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ x I_1\left(\frac{x\delta(\eta)}{2(y-\eta)}\right) - \delta(\eta) I_0\left(\frac{x\delta(\eta)}{2(y-\eta)}\right)\right\} \times$$

$$\times \exp\frac{-[x^2 + \delta^2(\eta)]}{4(y-\eta)}\, d\eta - \frac{1}{2}\int_0^y \frac{\varphi(\eta)\,\delta(\eta)\,\delta'(\eta)}{y-\eta} \times$$

$$\times I_0\left(\frac{x\delta(\eta)}{2(y-\eta)}\right) \exp\frac{-[x^2+\delta^2(\eta)]}{4(y-\eta)}\, d\eta. \qquad (2.16)$$

$$K_2(x, y) = -\frac{1}{4}\int_0^y \frac{2\psi(\eta)\,\delta(\eta)}{y-\eta} I_0\left(\frac{x\delta(\eta)}{2(y-\eta)}\right) \exp\frac{-[x^2+\delta^2(\eta)]}{4(y-\eta)}\, d\eta \qquad (2.17)$$

Легко проверить, что $K_1(x, y)$ удовлетворяет уравнению (2.6) при $x \neq \delta(y)$, нулевому начальному условию и условиям при $x = 0$ и $x \to \infty$. При этом предполагается, что функция $\delta(y)$ непрерывно дифференцируема, нигде не обращается в нуль и что ее производная $\delta'(y) \leqslant c / \sqrt{y}$. Функция $\Phi(x)$ непрерывна, дифференцируема, а $\Phi'(x)$ удовлетворяет условию Липшица в интервале $\delta_0 \leqslant x \leqslant 1$. Покажем, что функция $K_1(x, y)$ на кривой $x = \delta(y)$ имеет скачок, равный $\varphi(y)$, а ее производная $\partial K_1(x, y) / \partial x$ — скачок, равный $-{}^1/_2\, \varphi(y) / \delta(y)$.

Разобьем интервал интегрирования на два: от нуля до $y - \varepsilon$ и от $y - \varepsilon$ до y; тогда, заменяя в интервале $(y - \varepsilon < \eta < y)$ Бесселеву функцию ее асимптотическим разложением

$$I_\eta(z) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z$$

будем иметь

$$K_1(x, y) = \frac{1}{4}\int_0^{y-\varepsilon} \frac{\varphi(\eta)\,\delta(\eta)}{(y-\eta)^2} \left\{ y I_1\left(\frac{x\delta(\eta)}{2(y-\eta)}\right) - \delta(\eta) I_0\left(\frac{x\delta(\eta)}{2(y-\eta)}\right)\right\} \times$$

$$\times \exp\frac{-[x^2+\delta^2(\eta)]}{4(y-\eta)}\, d\eta - \frac{1}{2}\int_0^{y-\varepsilon} \frac{\varphi(\eta)\,\delta(\eta)\,\delta'(\eta)}{y-\eta} I_0\left(\frac{x\delta(\eta)}{2(y-\eta)}\right) \times$$

$$\times \exp\frac{-[x^2+\delta^2(\eta)]}{4(y-\eta)}\, d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_{y-\varepsilon}^{y} \varphi(\eta) \sqrt{\delta(\eta)}\, \times$$

$$\times \left\{ \frac{x - \delta(\eta)}{4(y-\eta)^{3/2}} - \frac{\delta'(\eta)}{2(y-\eta)^{1/2}} \right\} \exp\frac{-[x-\delta(\eta)]^2}{4(y-\eta)}\, d\eta \qquad (2.18)$$

Первые два слагаемых не имеют никаких особенностей и являются непрерывно дифференцируемыми функциями, третье слагаемое с точностью до множителя представляет сумму линейных тепловых потенциалов простого и двойного слоев, для которой показано [1,2], что она имеет скачок, равный $\varphi(y)$. Дифференцируя (2.18) по x и используя свойства линейных тепловых потенциалов, можно показать, что $\partial K_1/\partial x$ на кривой $x = \delta(y)$ имеет скачок

$$\lim_{x\to\delta(y)+0}\frac{\partial k_1}{\partial x} - \lim_{x\to\delta(y)-0}\frac{\partial k_1}{\partial x} = -\frac{1}{2}\,\frac{\varphi(y)}{\delta(y)}$$

Произведя такие же преобразования, что и выше, выразим $K_2(x, y)$ через линейный тепловой потенциал простого слоя. Следовательно, сама функция $K_2(x, y)$ будет непрерывной, а ее производная будет на кривой $x = \delta(y)$ иметь скачок

$$\lim_{x\to\delta(y)+0}\frac{\partial k_2}{\partial x} - \lim_{x\to\delta(y)-0}\frac{\partial k_2}{\partial x} = \psi(y) + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi(y)}{\delta(y)}$$

Таким образом, нерегулярное решение удовлетворяет всем поставленным условиям. Доказательство единственности проводится так же, как и в работах [1,2].

Сумма регулярного и нерегулярного решений будет, кроме условий (2.12), удовлетворять условию (2.8), являясь решением уравнения (2.6) в области $\{0<y\leqslant y_0,\ 0\leqslant x<1\}$. Но в это решение входит пока произвольная функция $\delta(y)$. Потребуем теперь, чтобы

$$\lim_{x\to\delta(y)-0}\lambda(x, y) = 0, \qquad \lim_{x\to\delta(y)-0}\frac{\partial\lambda(x, y)}{\partial x} = 0 \tag{2.19}$$

Тогда $\lambda(x, y)$ в области $\{0\leqslant y\leqslant y_0,\ \delta(y)<x<1\}$ будет представлять искомое решение задачи (2.6) — (2.10). Условия (2.19) можно рассматривать как уравнения для определения функции $\delta(y)$. Можно показать, что любое решение первого уравнения (2.19) удовлетворяет одновременно второму и наоборот. Таким образом, если хотя бы одно из уравнений (2.19) имеет единственное решение, то это решение и дает закон изменения границы «ядра» во времени, а (2.1) — распределение скоростей вязкопластического течения.

В заключение отметим, что аналогичная задача рассматривалась Ю. И. Красильниковым [3]. По нашему мнению, полученное им решение не может рассматриваться как точное, так как сама постановка задачи у автора вызывает возражение. Автор вначале предполагает, что вязко-пластическая зона течения занимает все поперечное сечение трубы, и ищет решение уравнения движения, удовлетворяющее начальному условию и условию прилипания к стенке, затем, основываясь на общеизвестном положении о том, что пластическая деформация не может распространяться до оси трубы, предполагает существование ядра течения, границу которого находит из условия отсутствия на ней скоростей скольжения. С физической точки зрения такая постановка задачи означает отрицание влияния границы ядра на развитие течения, что, естественно, сказывается в построенном решении (последняя в него не входит). Для корректной постановки задачи областью существования решения необходимо считать область между стенкой трубы и неизвестным подвижным ядром, на границе которого нужно задать два условия.

Автор приносит благодарность С. В. Фальковичу за указания при выполнении данной работы.

Поступила 21 IX 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Kolodner J. J. Free baundary problem for the heat equation with applications to problems of change of phase. Communications on pure and applied Mathematics, IX, No. 1, 1956.
2. Сафрончик А. И. Неустановившееся течение вязко-пластичного материала между параллельными стенками. 1959, т. XXIII, вып. 5.
3. Красильников Ю. И. Неустановившееся движение вязко-пластической жидкости в круглой трубе. ПММ, 1956, т. XXIII, вып. 5.