практического применения; причем по характеру своих предположений теории изотропного упрочнения мало пригодны для описания действительного поведения пластических тел, сопровождаемого непременно анизотропным характером упрочнения. Законы деформационных теории изотропного упрочнения по существу соответствуют природе изотропных нелинейно-упругих тел.

Приведенные результаты показывают, что совместное рассмотрение эффектов анизотропии и упрочнения может привести к упрощению математической задачи.

Поступила 24 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Укр. математ. ж., 1954, т. 6, № 3.
2. Prager W., The theory of plasticity: A survey of recent achivements. Proc. Inst. Mech. Eng., 169, 41, 1955; русск. пер. в книге Прагера В. и Ходжа Ф. Г. «Теория идеально-пластических тел». Изд-во иностр. лит-ры, М., 1956.
3. Кодашевич Ю. И. и Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
4. Shield R., Ziegler H. On Prager's hardening rule. ZAMP, 9a, 1958; русск. пер. Механика. Сб. переводов, № 3, 1959.
5. Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
6. Ивлев Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 3.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

П. С. Куратов, В. И. Розенблюм

(Ленинград)

1. Рассмотрим тело из материала, обладающего ползучестью; пусть оно занимает объем V, ограниченный поверхностью S. На части S_1 поверхности S заданы нагрузки

$$\sigma_x \cos nx + \tau_{xy} \cos ny + \tau_{xz} \cos nz = f_x \qquad (xyz) \tag{1.1}$$

на части S_2 — компоненты вектора скорости

$$v_x = v_x^*, \qquad v_y = v_y^*, \qquad v_z = v_z^* \tag{1.2}$$

В объеме тела имеют место уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \qquad (xyz) \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем символ (xyz) означает, что невыписанные формулы или выражения компонент определяются круговой перестановкой букв x, y, z.

Поверхностные и объемные компоненты нагрузок могут, вообще говоря, зависеть от времени t. Примем, что компоненты скорости деформации

$$\xi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \ldots, \eta_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, \ldots \qquad (xyz) \tag{1.4}$$

определяются уравнениями теории ползучести Л. М. Качанова [1]

$$\xi_x = \frac{1}{E}\left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial t}\right)\right] + \xi_x^c, \qquad \eta_{xy} = \frac{1}{G}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} + \eta_{xy}^c \qquad (xyz) \tag{1.5}$$

где составляющие ползучести $\xi_x^c, \eta_{xy}^c \ldots$ — известные функции напряжений и времени t:

$$\xi_x^c = F(T, t)(\sigma_x - \sigma), \qquad \eta_{xy}^c = 2F(T, t)\tau_{xy} \tag{1.6}$$

(T — интенсивность касательных напряжений).

Начальное упругое напряженное состояние тела (при $t = 0$) будем считать известным:

$$\sigma_x = \sigma_x^\circ(x, y, z), \ldots, \tau_{xy} = \tau_{xy}^\circ(x, y, z) \qquad (xyz) \tag{1.7}$$

2. Рассматриваемый интервал времени точками $t=0,\ t=t_1,\ldots,\ t=t_i,\ldots$ разобьем на малые отрезки Δt (которые, вообще говоря, могут быть не равны между собой).

Дифференцируя во времени статические краевые условия (1.1) и уравнения равновесия (1.3), получаем

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial t}\cos nx+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial t}\cos ny+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial t}\cos nz=\frac{\partial f_x}{\partial t} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial t}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial t}\right)+\frac{\partial F_x}{\partial t}=0 \qquad (xyz) \tag{2.2}$$

Положим в уравнениях (1.4), (1.5) и (2.1), (2.2) $t=t_i$ и заменим производные по времени конечными приращениями

$$\left.\frac{\partial\sigma_x}{\partial t}\right|_{t=t_i}=\frac{\Delta_i\sigma_x}{\Delta t} \qquad (xyz)$$

При этом получаем следующую систему уравнений относительно приращений напряжений и деформаций (индекс i опускаем):

$$\frac{\partial\Delta\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\Delta\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\Delta\tau_{xz}}{\partial z}+\Delta F_x=0 \qquad (xyz) \tag{2.3}$$

$$\Delta\varepsilon_x=\frac{1}{E}\left[\Delta\sigma_x-\nu(\Delta\sigma_y+\Delta\sigma_z)\right]+\delta_x, \qquad \Delta\gamma_{xy}=\frac{1}{G}\Delta\tau_{xy}+\delta_{xy} \qquad (xyz) \tag{2.4}$$

Здесь

$$\Delta F_x=\left(\frac{\partial F_x}{\partial t}\right)_{t=t_i}\Delta t, \qquad \Delta\varepsilon_x=(\xi_x)_{t=t_i}\Delta t, \qquad \delta_x=(\xi_x{}^c)_{t=t_i}\Delta t,$$

$$\delta_{xy}=(\eta_{xy}{}^c)_{t=t_i}\Delta t \qquad \text{и д. т.} \tag{2.5}$$

Краевые условия (2.1), (1.2) дают

$$\Delta\sigma_x\cos nx+\Delta\tau_{xy}\cos ny+\Delta\tau_{xz}\cos nz=\Delta f_x \quad \text{на } S_1 \qquad (xyz) \tag{2.6}$$

$$\Delta u_x=\Delta u_x{}^* \quad \text{на } S_2 \tag{2.7}$$

где $\Delta u_x=v_x|_{t=t_i}\Delta t$, $\Delta u_x{}^*=v_x{}^*|_{t=t_i}\Delta t$ и т. д.— приращения компонент перемещения в объеме и на поверхности за время Δt. Очевидно, что

$$\Delta\varepsilon_x=\frac{\partial\Delta u_x}{\partial x},\ldots,\ \Delta\gamma_{xy}=\frac{\partial\Delta u_x}{\partial y}+\frac{\partial\Delta u_y}{\partial x} \qquad (xyz) \tag{2.8}$$

Таким образом, определение приращений напряжений и деформаций за время Δt приводится к своеобразной линейной задаче, во многом аналогичной задаче термоупругости. Отличие от последней заключается лишь в том, что заданные дополнительные деформации $\delta_x,\ldots,\delta_{xy}$, вычисляемые согласно (1.6), (2,5) по формулам

$$\delta_x=[F(T,t)(\sigma_x-\sigma)]\,\Delta t, \qquad \delta_{xy}=2\,[F(T,t)\,\tau_{xy}]\,\Delta t$$
$$\text{при } t=t_i, \qquad \sigma_x=\sigma_{xi},\ldots \qquad (xyz) \tag{2.9}$$

присутствуют в (2.4) в выражениях как относительных удлинений, так и сдвигов, причем, вообще говоря, $\delta_x\neq\delta_y\neq\delta_z$. Пользуясь (2.9), замечаем, что дополнительные деформации удовлетворяют условию несжимаемости

$$\delta_x+\delta_y+\delta_z=0 \tag{2.10}$$

Нетрудно обнаружить (например, составляя при помощи (2.3), (2.4), (2.6), (2.8), (2.10) уравнения равновесия в перемещениях), что определение перемещений Δu_x, Δu_y, Δu_z в рассматриваемой задаче приводится к обычной изотермической задаче теории упругости с дополнительными нагрузками

$$\delta f_x=\frac{E}{1+\nu}\left[\delta_x\cos nx+\frac{1}{2}(\delta_{xy}\cos ny+\delta_{xz}\cos nz)\right] \qquad (xyz) \tag{2.11}$$

на поверхности S_1 и

$$\delta F_x=-\frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\partial\delta_x}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\delta_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\delta_{xz}}{\partial z}\right)\right] \qquad (xyz) \tag{2.12}$$

в объеме тела.

Расчет неустановившейся ползучести тела приводится, таким образом, к вычислению приращений напряжений и деформаций для последовательных малых интервалов времени Δt. Дополнительные нагрузки на каждом этапе вычисляются согласно формулам (2.9), (2.11), (2.12) по результатам расчета предшествующего интервала. Начальные значения при этом определяются решением (1.7).

В случае равномерного напряженного состояния (например, в задаче о релаксации напряжений в стержне) указанный вычислительный процесс сводится к численному интегрированию исходных уравнений по методу Эйлера [2].

Заметим, что изложенная вычислительная процедура по существу не зависит от конкретного вида формул (1.6) и поэтому может применяться и при использовании других теорий ползучести, например теории упрочнения [3].

3. Решение «псевдотемпературной» задачи теории упругости, к которой свелось интегрирование уравнений ползучести, может быть построено, например, на базе (2.11), (2.12), если известна функция Грина соответствующей упругой задачи. В ряде случаев нетрудно получить необходимое общее решение, основываясь непосредственно на исходных уравнениях.

Рассмотрим, например, неустановившуюся ползучесть скручиваемого круглого стержня радиуса a.

Здесь согласно (2.4)

$$\Delta\gamma_{\varphi z} = \frac{1}{G}\,\Delta\tau_{\varphi z} + \delta(r) \tag{3.1}$$

где $\delta(r) = \delta_{\varphi z}$ следует считать произвольной функцией радиуса r. Полагая, как обычно, $\Delta\gamma_{\varphi z} = r\Delta\theta$ и учитывая, что внешний крутящий момент постоянен, из условия статической эквивалентности находим

$$\Delta\tau_{\varphi z} = G\left[\frac{4r}{a^2}\int_0^a \delta(r)\,r^2 dr - \delta(r)\right] \tag{3.2}$$

4. Заметим, что излагаемый вычислительный процесс может быть обобщен на случай наличия пластических деформаций. Будем исходить из уравнений теории пластического течения

$$d\varepsilon_x{}^p = \Phi(T)(\sigma_x - \sigma)\,dT, \qquad d\gamma_{xy}{}^p = 2\Phi(T)\,\tau_{xy}dT \quad (xyz) \text{ при } T = T_m,\ dT \geqslant 0 \tag{4.1}$$

и

$$d\varepsilon_x{}^p = d\varepsilon_y{}^p = \ldots = d\gamma_{xy}{}^p = 0 \quad \text{при } T \leqslant T_m \text{ или } T = T_m, \text{ но } dT \leqslant 0. \tag{4.2}$$

Здесь T_m — максимальное значение интенсивности T, достигнутое за всю историю нагружения.

Присоединяя к (2.4) конечные приращения пластической деформации, вычисленные согласно (4.1), получим для этапа нагружения

$$\Delta\varepsilon_x = c_{11}\Delta\sigma_x + c_{12}\Delta\sigma_y + \ldots + c_{16}\Delta\tau_{xy} + \delta_x \qquad (xyz) \tag{4.3}$$

где коэффициенты c_{ik} определяются напряженным состоянием в начале рассматриваемого интервала времени Δt.

Мгновенное положение границы области разгрузки определяется условием $\Delta T = 0$. В области разгрузки имеют место уравнения (2.4). Зависимости (4.3) представляют закон деформации некоторого анизотропного тела.

Поступила 18 V 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Качанов Л. М. Некоторые вопросы теории ползучести, ГТТИ, 1949.
2. Розенблюм В. И. О релаксационных испытаниях металлов. Теплоэнергетика 1954, № 10.
3. Работнов Ю. Н. О некоторых возможностях описания неустановившейся ползучести с приложением к исследованию ползучести роторов. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 5.