О СВОЙСТВАХ СООТНОШЕНИЙ ЗАКОНА АНИЗОТРОПНОГО УПРОЧНЕНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Д. Д. Ивлев

(Москва)

А. Ю. Ишлинский в работе [1] предложил вариант теории пластичности, предположив, что граница текучести перемещается как твердое тело. Позднее В. Прагер [2] независимо обсуждал те же идеи применительно к кинематическим моделям, интерпретирующим поведение пластических систем. В работах [3, 4] исследовались возможности аналитической формулировки закона анизотропного упрочнения, предложенного А. Ю. Ишлинским и В. Прагером. Ниже исследуется закон анизотропного упрочнения в формулировке работы [4].

Показано, что вариант анизотропно упрочняющегося тела, предложенный в (4), приводит к уравнениям гиперболического типа, распространяющим качественные особенности течения идеально-пластического материала на случай упрочняющихся тел. В заметке рассматриваются соотношения, соответствующие плоскому деформированному состоянию, а также пространственной задаче. В последнем случае предполагается, что напряженное состояние соответствует ребру призмы условия текучести, обобщающей согласно [4] условие пластичности Треска.

Рассмотрим вначале случай плоской деформации. Исходные соотношения могут иметь вид [4]:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}=0 \tag{1}$$

$$[(\sigma_x-c\varepsilon_x)-(\sigma_y-c\varepsilon_y)]^2+4(\tau_{xy}-c\varepsilon_{xy})^2=4k^2,\qquad k,\ c=\text{const} \tag{2}$$

$$\frac{d\varepsilon_x}{(\sigma_x-c\varepsilon_x)-(\sigma_y-c\varepsilon_y)}=\frac{d\varepsilon_y}{(\sigma_y-c\varepsilon_y)-(\sigma_x-c\varepsilon_x)}=\frac{d\varepsilon_{xy}}{2(\tau_{xy}-c\varepsilon_{xy})} \tag{3}$$

К условиям (1)—(3) следует присоединить соотношения неразрывности деформаций

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial y}+\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\omega}{\partial y}+\frac{\partial\varepsilon_y}{\partial x}-\frac{\partial\varepsilon_{xy}}{\partial y}=0 \tag{4}$$

где

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),\qquad \omega=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

Для дальнейшего обозначим $\varepsilon_x=-\varepsilon_y=\varepsilon$, $\varepsilon_{xy}=\gamma$. Условию (2) удовлетворим, полагая

$$\sigma_x=p+k\cos 2\theta+c\varepsilon,\qquad \sigma_y=p-k\cos 2\theta-c\varepsilon,\qquad \tau_{xy}=k\sin 2\theta+c\gamma \tag{5}$$

Подставив соотношения (5) в уравнения (1), будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{\partial p}{\partial x}-2k\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}+2k\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}+c\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+c\frac{\partial\gamma}{\partial y}=0\\ \frac{\partial p}{\partial y}+2k\cos 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial x}+2k\sin 2\theta\frac{\partial\theta}{\partial y}-c\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+c\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0\end{gathered} \tag{6}$$

К уравнениям (6) присоединим соотношения (3) и (4), которые примут вид:

$$d\varepsilon\sin 2\theta-d\gamma\cos 2\theta=0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial\omega}{\partial y}-\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}-\frac{\partial\gamma}{\partial y}=0 \tag{8}$$

Легко убедиться, что пять уравнений (6), (7) и (8) относительно пяти неизвестных p, θ, ε, γ, ω принадлежат к гиперболическому типу, характеристики которых запишутся в виде

$$dy-\operatorname{tg}\left(\theta\pm\tfrac{1}{4}\pi\right)dx=0 \tag{9}$$

Положим

$$d\xi=dy\cos\left(\theta+\tfrac{1}{4}\pi\right)-dx\sin\left(\theta+\tfrac{1}{4}\pi\right)\qquad d\eta=dy\cos\left(\theta-\tfrac{1}{4}\pi\right)-dx\sin\left(\theta-\tfrac{1}{4}\pi\right)$$

Вдоль характеристик имеют место соотношения, обобщающие известные соотношения Г. Генки:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} - 2k\frac{\partial \theta}{\partial \xi} - c\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \eta}\cos 2\theta + \frac{\partial \gamma}{\partial \eta}\sin 2\theta\right) = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial \eta} + 2k\frac{\partial \theta}{\partial \eta} - c\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi}\cos 2\theta + \frac{\partial \gamma}{\partial \eta}\sin 2\theta\right) = 0 \tag{10}$$

Заметим, что $d\varepsilon\cos 2\theta + d\gamma\sin 2\theta = d\gamma^*$, где $d\gamma^*$ — деформация сдвига вдоль характеристик.

Из уравнения (7) следует, что имеют место соотношения Г. Гейрингер, утверждающие отсутствие удлинения вдоль характеристик.

Перейдем к соотношениям пространственной задачи. Согласно [4] и [5] условие пластичности запишем в виде

$$[(\sigma_x - c\varepsilon_x) - (\sigma - c\varepsilon) + 2/3k]\,[\sigma_y - c\varepsilon_y) - (\sigma - c\varepsilon) + 2/3\,k] = (\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy})^2 \quad (xyz) \tag{11}$$

где $\sigma = {}^1/_3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$, $\varepsilon = {}^1/_3(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$. Символ (xyz) означает, что недостающие соотношения получаются путем круговой перестановки индексов.

Далее следует использовать замену переменных

$$\sigma_x = p + 2k\cos^2\theta_x + c\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = 2k\cos\theta_x\cos\theta_y + c\varepsilon_{xy} \quad (xyz) \tag{12}$$

Подставляя выражения (12) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad (xyz) \tag{13}$$

и присоединяя условие $\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$, соотношения закона пластического течения [6]

$$d\varepsilon_x + d\varepsilon_y + d\varepsilon_z = 0$$

$$\begin{gathered}
d\varepsilon_x + d\varepsilon_{xy}\frac{\sigma_y - c\varepsilon_y - \sigma + 2/3\,k}{\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy}} + d\varepsilon_{xz}\frac{\sigma_z - c\varepsilon_z - \sigma + 2/3\,k}{\tau_{xz} - c\varepsilon_{xz}} = \\
= d\varepsilon_{xy}\frac{\sigma_x - c\varepsilon_x - \sigma + 2/3\,k}{\tau_{xy} - c\varepsilon_{xy}} + d\varepsilon_y + d\varepsilon_{yz}\frac{\sigma_z - c\varepsilon_z - \sigma + 2/3\,k}{\tau_{yz} - c\varepsilon_{yz}} = \\
= d\varepsilon_{xz}\frac{\sigma_x - c\varepsilon_x - \sigma + {}^2/_3\,k}{\tau_{xz} - c\varepsilon_{xz}} + d\varepsilon_{yz}\frac{\sigma_y - c\varepsilon_y - \sigma + 2/3\,k}{\tau_{yz} - c\varepsilon_{yz}} + d\varepsilon_z
\end{gathered} \tag{14}$$

а также условия совместности деформаций

$$\frac{\partial \omega_x}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \omega_x}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (xyz) \tag{15}$$

получим систему тринадцати уравнений относительно тринадцати неизвестных p, θ, ε_x, ε_{xy}, ω_x (xyz). Легко убедиться, что эта система принадлежит к гиперболическому типу, а ее характеристический определитель запишется в виде

$$(\operatorname{grad}\psi\mathbf{n})\,[(2\operatorname{grad}\psi\mathbf{n})^2 - (\operatorname{grad}\psi)^2] = 0 \tag{16}$$

где ψ — уравнение характеристической поверхности, $\mathbf{n} = \cos\theta_x\mathbf{i} + \cos\theta_y\mathbf{j} + \cos\theta_z\mathbf{k}$.

Таким образом, показано, что обобщение соотношений теории идеальной пластичности, предложенное в [4], позволяет распространить качественные особенности решений теории идеального пластического тела на случай анизотропно упрочняющегося материала. В определенной мере это обстоятельство соответствует экспериментальным данным: образование линий Людерса, поверхностей скольжения.

Известно, что соотношения законов деформационных теорий изотропного упрочнения приводят к уравнениям эллиптического типа, сложным с точки зрения практического применения; причем по характеру своих предположений теории изотропного упрочнения мало пригодны для описания действительного поведения пластических тел, сопровождаемого непременно анизотропным характером упрочнения. Законы деформационных теории изотропного упрочнения по существу соответствуют природе изотропных нелинейно-упругих тел.

Приведенные результаты показывают, что совместное рассмотрение эффектов анизотропии и упрочнения может привести к упрощению математической задачи.

Поступила 24 XI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Общая теория пластичности с линейным упрочнением. Укр. математ. ж., 1954, т. 6, № 3.
2. Prager W., The theory of plasticity: A survey of recent achivements. Proc. Inst. Mech. Eng., 169, 41, 1955; русск. пер. в книге Прагера В. и Ходжа Ф. Г. «Теория идеально-пластических тел». Изд-во иностр. лит-ры, М., 1956.
3. Кодашевич Ю. И. и Новожилов В. В. Теория пластичности, учитывающая микронапряжения. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
4. Shield R., Ziegler H. On Prager's hardening rule. ZAMP, 9a, 1958; русск. пер. Механика. Сб. переводов, № 3, 1959.
5. Ивлев Д. Д. Об общих уравнениях теории идеальной пластичности и статики сыпучей среды. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 1.
6. Ивлев Д. Д. О соотношениях, определяющих пластическое течение при условии пластичности Треска и его обобщениях. Докл. АН СССР, 1959, т. 124, № 3.

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ УРАВНЕНИЙ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

П. С. Куратов, В. И. Розенблюм

(Ленинград)

1. Рассмотрим тело из материала, обладающего ползучестью; пусть оно занимает объем V, ограниченный поверхностью S. На части S_1 поверхности S заданы нагрузки

$$\sigma_x \cos nx + \tau_{xy} \cos ny + \tau_{xz} \cos nz = f_x \qquad (xyz) \tag{1.1}$$

на части S_2 — компоненты вектора скорости

$$v_x = v_x^*, \qquad v_y = v_y^*, \qquad v_z = v_z^* \tag{1.2}$$

В объеме тела имеют место уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0 \qquad (xyz) \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем символ (xyz) означает, что невыписанные формулы или выражения компонент определяются круговой перестановкой букв x, y, z.

Поверхностные и объемные компоненты нагрузок могут, вообще говоря, зависеть от времени t. Примем, что компоненты скорости деформации

$$\xi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \ldots, \quad \eta_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}, \ldots \qquad (xyz) \tag{1.4}$$

определяются уравнениями теории ползучести Л. М. Качанова [1]

$$\xi_x = \frac{1}{E}\left[\frac{\partial \sigma_x}{\partial t} - \nu\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial t}\right)\right] + \xi_x^c, \qquad \eta_{xy} = \frac{1}{G}\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial t} + \eta_{xy}^c \qquad (xyz) \tag{1.5}$$

где составляющие ползучести ξ_x^c, η_{xy}^c ...— известные функции напряжений и времени t:

$$\xi_x^c = F(T, t)(\sigma_x - \sigma), \qquad \eta_{xy}^c = 2F(T, t)\tau_{xy} \tag{1.6}$$

(T — интенсивность касательных напряжений).

Начальное упругое напряженное состояние тела (при $t = 0$) будем считать известным:

$$\sigma_x = \sigma_x^*(x, y, z), \ldots, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^\circ(x, y, z) \qquad (xyz) \tag{1.7}$$