Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СООБРАЖЕНИЙ ПОДОБИЯ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПРИ РАСЧЕТЕ ОБОЛОЧЕК

И. В. Свирский

(Казань)

Эта статья является развитием работы [1]; идеи статьи имеют связь, с одной стороны, с работой китайского ученого Чена [2], в которой предлагается определять прогибы круглой пластины путем разложения нагрузки в ряд по степеням прогиба центра пластины, а с другой стороны, — с работой Х. М. Муштари [3] о полунелинейной трактовке задач определения прогиба оболочек. В работе [3] нелинейные уравнения линеаризуются относительно высших гармоник прогиба в функции усилия, а нелинейность относительно главной гармоники прогиба, имеющей наибольшую амплитуду, учитывается. Это позволяет уловить главные части нелинейности, связанные с большими прогибами, и сильно упростить вычисления.

На каждом шаге последовательных прибижений, приведенных в нашей работе, уравнения также оказываются сравнительно хорошо удовлетворенными относительно главных гармоник наибольшей амплитуды, определение высших гармоник прогиба и функции усилий сводится к решению линейных уравнений; так как высшие гармоники обычно бывают малыми и их частота высокой, то при их определении автор пренебрегает кривизной оболочки и нелинейностью задачи.

1. Уравнения теории пологих оболочек можно кратко записать так [4]:

$$\triangle^2\Phi = Eh\left\{\tfrac{1}{2}[w, w] + [w, w^\circ]\right\} \tag{1.1}$$

$$D\triangle^2 w + [w^\circ, \Phi] + [w, \Phi] = pP \qquad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\right) \tag{1.2}$$

При этом использованы обозначения

$$[w, \Phi] = 2w_{xy}\Phi_{xy} - w_{yy}\Phi_{xx} - w_{xx}\Phi_{yy}, \qquad [w, w] = 2(w_{xy}{}^2 - w_{xx}w_{yy})$$

$$w_{xx} = \partial^2 w/\partial x^2, \qquad \Delta^2 w = w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy}$$

Здесь E — модуль упругости, h — толщина оболочки, ν — коэффициент Пуассона, w° — высота оболочки над плоскостью основания до деформации, w — прогиб, p — амплитуда нагрузки оболочки, P — функция формы нагрузки, Φ — функция напряжений, через которую легко выражаются мембранные усилия T_x, T_y, T_{xy} и деформации срединной поверхности ε_x, ε_y, ε_{xy}; например,

$$T_x = \Phi_{yy}, \qquad \varepsilon_x = \frac{1}{Eh}(\Phi_{yy} - \nu\Phi_{xx}) = u_{1x} + \tfrac{1}{2}w_x{}^2 + w_x w_x{}^0 \tag{1.3}$$

где u_1 и u_2 — компоненты перемещения в касательных плоскостях к оболочке.

Легко получить нужную нам теорему подобия [4, 5]. Введем обозначения

$$v^\circ = w^\circ/h, \quad v = w/h, \quad u_1^* = u_1/h^2, \quad \Phi^* = \Phi/Eh^3, \quad u_2^* = u_2/h^2$$

Здесь v° — приведенное возвышение оболочки над плоскостью основания, v — приведенный прогиб. Разделим уравнения (1.1) и (1.3) на Eh^3, уравнение (1.2) на Eh^4, а уравнение (1.4) на h^2; получим

$$\Delta^2\Phi^* = \frac{1}{2}[v, v] + [v, v^\circ]$$

$$\frac{1}{12(1-\nu^2)}\Delta^2 v + [v^\circ, \Phi^*] + [v, \Phi^*] = \frac{p}{Eh^4}P$$

$$T_x^* = T_x/Eh^3 = \Phi_{yy}^*, \qquad \Phi_{yy}^* - \nu\Phi_{xx}^* = u_{1x}^* + \frac{1}{2}v_x^2 + v_x v_x^\circ$$

Используя эти соотношения, можно заключить, что две оболочки, имеющие одинаковые относительные возвышения v° над основаниями, отличающиеся лишь модулем упругости и толщиной и имеющие одинаковые остальные геометрические размеры, будут испытывать одинаковые приведенные прогибы $v = w/h$, если только приведенные поперечные нагрузки p/Eh^4 и приведенные касательные перемещения краев оболочек u_1/h^2 и u_2/h^2 одинаковы, а продольные краевые нагрузки относятся между собой, как величины Eh^3.

2. Учитывая приведенную выше теорему подобия, можно сделать вывод, что для получения зависимости между приведенной величиной нагрузки p/Eh^4 и относительным прогибом w/h достаточно исследовать оболочку любой произвольной толщины и любого модуля упругости. Используя это обстоятельство для ускорения сходимости последовательных приближений, на каждом шаге приближений будем менять не только прогибы, но и нагрузку, толщину и модуль упругости оболочки, изменяя их таким образом, чтобы получить наиболее точное выполнение уравнений.

Все геометрические размеры, кроме толщины оболочки, будем сохранять неизменными.

3. **Описание метода.** Рассмотрим пологую оболочку, свободно опертую или защемленную по краям, при поперечном нагружении. Используя соотношение $w^\circ = hv^\circ$, приведем уравнения (1.1) и (1.2) к виду

$$\Delta^2\Phi = Eh\left\{\frac{1}{2}[w, w] + h[v^\circ, w]\right\}$$
$$\Delta^2 w = D^{-1}\{-h[v^\circ, \Phi] - [w, \Phi] + pP\} \tag{3.1}$$

Подставляя сюда $h = \sqrt{12(1-\nu^2)D/Eh}$, получим

$$\Delta^2\Phi = Eh\left\{\frac{1}{2}[w, w] + \sqrt{12(1-\nu^2)D/Eh}\,[v^\circ, w]\right\} \tag{3.2}$$

$$\Delta^2 w = D^{-1}\{-[w, \Phi] + pP - \sqrt{12(1-\nu^2)D/Eh}\,[v^\circ, \Phi]\} \tag{3.3}$$

Зададимся произвольными значениями $Eh = (Eh)_0$ и каким-либо подходящим выражением для прогиба $w = w_0$ оболочки в исходном приближении и определим из уравнения

$$\Delta^2\Phi_0 = (Eh)_0\left\{\frac{1}{2}[w_0, w_0] + \sqrt{12(1-\nu^2)D/(Eh)_0}\,[v^\circ, w_0]\right\} \tag{3.4}$$

функцию Φ_0, удовлетворяющую условиям закрепления краев оболочки. Подставляя полученное значение в (3.3), решим относительно w_n при $n = 1$ уравнение

$$\Delta^2 w_n = D^{-1}\{-[w_{n-1}, \Phi_{n-1}] + P_n p - \sqrt{12(1-\nu^2)D/(Eh)_{n-1}}\,[v^\circ, \Phi_{n-1}]\} \tag{3.5}$$

Его решение представим в виде $w_n = w_n' + p_n w_n''$, где w_n'' — часть прогиба, зависящая от внешней нагрузки p_n,

Эту величину будем определять из условия равенства в n-м и $(n+1)$-м приближениях некоторого обобщенного перемещения (w, φ); символ (w, φ) обозначает скалярное произведение функции прогиба на некоторую подходящим образом подобранную функцию φ, рассматриваемых как векторы функционального пространства. В качестве такого обобщенного перемещения выгодно выбрать обобщенное перемещение, для которого жесткость оболочки наименьшая. Так как наименьшей жесткостью обладает обычно лишь одно из ортогональных, между собой обобщенных, перемещений, то при равенстве обобщенных перемещений малой жесткости будут мало отличаться между собой полные перемещения.

Однако, как это будет показано далее, сходимость будет достаточно хорошей даже в случае, когда функция φ не соответствует наименьшей жесткости оболочки. Можно, например, для упрощения вычислений в качестве функции φ принять функцию Дирака и определять величину p_n из условия равенства прогиба центра оболочки a в двух последовательных приближениях:

$$w_n(a) = w_n'(a) + p_n w_n''(a) = w_{n-1}(a), \quad p_n = \{w_{n-1}(a) - w_n'(a)\} / w_n''(a) \tag{3.6}$$

Следующие приближения для Φ получаются путем решения при $n = 1$ уравнения

$$\Delta^2\Phi_n = (Eh)_n\left\{\tfrac{1}{2}[w_n, w_n] + \sqrt{12(1-\nu^2)D/(Eh)_n}\,[v^0, w_n]\right\} \tag{3.7}$$

Решение будет зависеть от жесткости растяжения $(Eh)_n$. Эту последнюю величину будем определять так, чтобы выполнялось условие

$$(\Phi_n, \varphi) = (\Phi_{n-1}, \psi) \tag{3.8}$$

где ψ — некоторая функция. Используя соотношения

$$h_n = \sqrt{12(1-\nu^2)D/(Eh)_n}, \qquad E_n = (Eh)_n / h_n \qquad (D = E_0 h_0^3 / 12[1-\nu^2]) \tag{3.9}$$

будем определять соответствующие значения толщины h_n и модуля упругости E_n оболочки в n-м приближении, при этом цилиндрическая жесткость — $E_n h_n^2 (1-\nu^2)$ будет одинакова для всех приближений.

Так как решение уравнения (3.7) определяется лишь с точностью до линейной функции координат, которая не влияет на величины мембранных усилий (мембранные усилия определяются вторыми производными, эти производные от линейной функции равны нулю), то функцию ψ будем подбирать ортогональной к линейным функциям

$$(1,\ \psi) = 0, \qquad (x,\ \psi) = 0, \qquad (y,\ \psi) = 0 \tag{3.10}$$

В результате описанного выше процесса последовательных приближений можно получить достаточно точно соответствующие значения прогиба, нагрузки и функции усилий для оболочки некоторой толщины (толщина оболочки и ее модуль упругости определяются в процессе вычислений). Изменяя исходное приближение w_0, можно установить непрерывный ряд соответствующих друг другу значений приведенных прогибов и приведенных нагрузок. Аналогично получаются следующие приближения.

Для пояснения изложенного выше рассмотрим решение уравнения

$$\Delta^2 w_n = f_n \tag{3.11}$$

методом Фурье; через f_n обозначена правая часть уравнения (3.5). Разложим функцию f_n по собственным функциям оператора Δ^2, т. е. по функциям φ_i, удовлетворяющим граничным условиям закрепления оболочки и уравнениям

$$\Delta^2 \varphi_i = \lambda_i \varphi_i \quad (i = 1.2,\ldots). \qquad f_n = \sum_1^\infty f_{ni}\,\varphi_i \tag{3.12}$$

Решение уравнения (3.11) будем разыскивать в виде

$$w_n = \sum_1^\infty w_{ni}\,\varphi_i \tag{3.13}$$

Подставляя (3.13) и f_n согласно (3.12) в уравнение (3.11), получим, учитывая первое соотношение (3.12):

$$\sum_1^\infty w_{ni}\,\lambda_i\varphi_i = \sum_1^\infty f_{ni}\,\varphi_i \tag{3.14}$$

Приравнивая коэффициенты при φ_i в обеих частях этого уравнения, имеем

$$w_{ni}\,\lambda_i = f_{ni}\,, \qquad w_{ni} = \frac{f_{ni}}{\lambda_i}\,, \qquad w_n = \sum_1^\infty \frac{f_{ni}}{\lambda_i}\,\varphi_i \tag{3.15}$$

Обычно собственные значения оператора Δ^2 образуют быстро возрастающую последовательность; так что величина λ_1 первого собственного значения оказывается значительно меньшей по абсолютной величине, чем остальные собственные значения λ_2, λ_3.

Поэтому первое слагаемое суммы (3.15) часто будет по величине больше, чем сумма остальных членов ряда. Для достижения более скорой сходимости желательно на каждом шаге приближений так изменять нагрузку, чтобы при этом оставался неизменным коэффициент f_{n1}, остальные коэффициенты, будучи малыми, ввиду этого будут меняться мало. При этом последовательные приближения будут близки одно к другому, а это будет означать быструю сходимость приближений.

Так как точное значение собственной функции φ_1 нам неизвестно, то мы при проведении вычислений регулируем нагрузку так, чтобы осталась постоянной величина

$$J_n = (w_n\varphi) = \sum_1^{\infty} \frac{f_{ni}}{\lambda_i}(\varphi_i \varphi) \tag{3.16}$$

Так как первое собственное значение часто является величиной, много меньшей, чем остальные собственные значения, то приближенно справедливо равенство

$$(w_n,\ \varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{ni}}{\lambda_i}(\varphi_i,\varphi) \approx \frac{f_{n1}}{\lambda_i}(\varphi_i,\varphi) \tag{3.17}$$

В силу этого приближенного уравнения равенство величин $f_{n,i} = f_{(n-1),i}$ можно приближенно заменить равенством скалярных произведений $(w_n,\ \varphi) = (w_{n-1},\ \varphi)$.

Это оправдывает предложенную процедуру корректирования нагрузки. Следует заметить, что равенство (3.17) будет тем более точным, чем функция φ ближе к первой собственной функции. В качестве этой функции можно рекомендовать принять функцию w_0, которая в качестве главной компоненты имеет первую собственную функцию φ_1, однако если это при практических вычислениях затруднительно, то этой рекомендации можно не придерживаться.

Аналогичным образом при каждом шаге приближений можно корректировать толщину оболочки h так, чтобы оставалась по возможности неизменной компонента разложения функции усилия по собственным функциям, соответствующая наименьшему, отличному от нуля, собственному значению (линейная функция от координат является собственной функцией нулевому собственному значению оператора Δ^2).

Можно ожидать, что описанный выше способ последовательных приближений будет давать более быстро сходящиеся последовательности приближенных значений и его область сходимости будет более широкой, чем у ранее известных способов. Этого можно ожидать, так как при описанном выше способе при каждом шаге приближений остаются неизменными компоненты перемещения и компоненты функций усилий малой жесткости и меняются лишь компоненты прогиба и функции усилий по высшим собственным функциям большой жесткости, которые вообще имеют малую величину, поэтому можно ожидать, что их изменения при каждом шаге приближений также будут малы, т. е. процесс будет быстро сходящимся.

Очевидно, что преимущества описанного выше метода перед прежними методами последовательных приближений могут проявиться лишь для таких задач, для которых первое ненулевое собственное значение оператора Δ^2 имеет значительно меньшую величину, чем остальные ненулевые собственные значения.

§ 4. Применение метода последовательных приближений можно несколько облегчить, видоизменив его и придав ему форму метода разложения в ряд по степеням малого параметра.

Представим уравнения (3.2) и (3.3) в следующем виде:

$$\Delta^2\Phi = \mu Eh\left\{\tfrac{1}{2}[w,w] + \sqrt{12(1-\nu^2)D/Eh}\ [v^\circ,\ w]\right\} \tag{4.1}$$

$$\Delta^2 w = \mu D^{-1}\{-[w,\ \Phi] - \sqrt{12(1-\nu^2)D/Eh}\,[v^\circ,\ \Phi]\} + D^{-1}pP \tag{4.2}$$

Будем разыскивать величины w, Φ и Eh в виде степенных рядов

$$p = p_0 + \mu p_1 + \mu^2 p_2 + \ldots,\qquad w = w_0 + \mu w_1 + \mu^2 w_2 + \ldots,$$
$$\Phi = \mu\Phi_1 + \mu^2\Phi_2 + \ldots,\qquad Eh = B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \ldots \tag{4.3}$$

где B_0 — произвольное положительное число.

Подставляя эти выражения в уравнения (4.1) и (4.2) и сравнивая коэффициенты разложения в ряды Маклорена по степеням μ в левых и правых частях уравнений, мы можем получить ряд рекуррентных уравнений для последовательного определения коэффициентов рядов (4.3).

Кроме этих уравнений, следует использовать соотношения

$$(w_0 + \mu w_1 + \ldots \mu^{n-1} w_{n-1}, \varphi) = (w_0 + \mu w_1 + \ldots + \mu^{n-1} w_{n-1} + \mu^n w_n, \varphi)$$

$$(\mu\Phi_1 + \ldots + \mu^{n-1}\Phi_{n-1}, \psi) = (\mu\Phi_1 + \ldots + \mu^{n-1}\Phi_{n-1} + \mu^n\Phi_n, \psi)$$

т. е. уравнения

$$(w_n, \varphi) = 0 \quad \text{при } n > 0 \qquad (\varphi_n, \psi) = 0 \quad \text{при } n > 1$$

которые служат для определения коэффициентов p_i и B_i. Пример применения метода разложения по малому параметру будет приведен в следующем разделе.

5. Для того чтобы сравнить различные варианты методов последовательных приближений, рассмотрим одну из немногих задач, имеющих точное решение,— задачу Бубнова о цилиндрическом изгибе бесконечно длинной в одном направлении пластины, опертой по длинным краям так, что эти края не могут перемещаться, но могут свободно поворачиваться. Начало координат расположим на середине пластины, ось x — параллельно коротким сторонам пластины.

Мембранное усилие T_x, возникающее в пластине, определяется ее относительным удлинением [4]

$$T_x = \frac{Eh}{(1-\nu^2)\,l}\int_{-l}^{l}\frac{w_x^2}{2}\,dx, \quad T_y = \nu T_x \tag{5.1}$$

эти усилия одинаковы во всех точках пластины. Функция напряжения имеет вид;

$$\Phi = T_x\frac{1}{2}y^2 + \nu T_x\frac{1}{2}x^2 \tag{5.2}$$

Уравнение равновесия и граничные условия, как известно, имеют вид:

$$Dw_{xxxx} = p + T_x w_{xx}, \qquad w(l) = w(-l) = w_{xx}(l) = w_{xx}(-l) = 0 \tag{5.3}$$

В качестве исходного приближения для прогиба выберем функцию прогиба, рассчитанную по элементарной теории бесконечно малых прогибов пластин, не учитывающей мембранные напряжения:

$$w_0(x) = w_0\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 5\right] \tag{5.4}$$

Задаваясь произвольным значением E_0 и h_0, вычислим при помощи формулы (5.1) приближенное значение T_{x0} мембранного усилия:

$$T_{x0} = \frac{(Eh)_0}{(1-\nu^2)\,l}\int_{-l}^{l}\frac{w_{0x}^{\;2}}{2}\,dx = \frac{15{,}54\,(Eh)_0 w_0^{\;2}}{(1-\nu^2)\,l^2} \qquad ((Eh)_0 = E_0h_0) \tag{5.5}$$

Это значение подставим в правую часть первого уравнения (5.3) и решим его при граничных условиях (5.3) относительно w. Получим

$$Dw_{1xxxx} = p + T_{x0}w_{0xx}, \qquad D = E_0h_0^3/(1-\nu^2) \tag{5.6}$$

$$w_1(x) = l^2D^{-1}T_{x0}w_0\left[\frac{1}{30}\left(\frac{x}{l}\right)^6 - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{5}{2}\left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{61}{30}\right] + \frac{1}{24}D^{-1}l^4p_1\left[\left(\frac{x}{l}\right)^4 - 6\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 5\right] \tag{5.7}$$

Из условия равенства прогибов середины пластины в исходном и первом приближениях $w_1(0) = w_0(0)$ определяем величину нагрузки p_1:

$$-\frac{61}{30} l^2 D^{-1} T_{x0} w_0 + \frac{5}{24} D^{-1} l^4 p_1 = 5w_0, \qquad p_1 = 24D\,(w_0/l^4) + 9.76 T_{x0}\,(w_0/l_2) \tag{5.8}$$

Подставляя это выражение в (5.7), найдем поправку $\delta_1(x)$ к исходному приближению $w_0(x)$; получим

$$w_1(x) = w_0(x) + \delta_1(x), \qquad \delta_1(x) = D^{-1} T_{x0} l^2 w_0 \left[\frac{1}{3}\left(\frac{x}{l}\right)^6 - \frac{7}{75}\left(\frac{x}{l}\right)^4 + \frac{3}{50}\left(\frac{x}{l}\right)^2\right]. \tag{5.9}$$

Далее в формуле (5.1) полагаем $Eh = (Eh)_1$ и вычислим при помощи (5.5) и (5.10) новое приближение для мембранного усилия:

$$T_{x1} = \frac{(Eh)_1}{(1-\nu^2)\,l} \int_{-l}^{l} \frac{1}{2} w_{1x}{}^2 dx = \frac{(Eh)_1}{(1-\nu^2)\,l} \left\{ \int_{-l}^{l} \frac{1}{2} w_{ax}{}^2 dx + \int_{-l}^{l} w_{0x}(x)\,\delta_{1x} dx + \int_{-l}^{l} \frac{1}{2} \delta_{1x}{}^2 dx \right\} \tag{5.10}$$

$$T_{x1} = \frac{(Eh)_1}{(1-\nu^2)} \{0.000345\,(l^2 D^{-1} T_{x0})^2 + 0.04464 l^2 D^{-1} T_{x0} + 15.54\}\, w_0{}^3 \tag{5.11}$$

Если в соответствии с идеями метода разложения по степеням малого параметра пренебречь в формуле (5.10) интегралом квадрата малой поправки $\delta_x{}^2$ по сравнению с другими членами как величиной высшего порядка малости, то получим формулу

$$T_{x1} = \frac{(Eh)_1}{1-\nu^2} \{0.04464 l^2 D^{-1} T_{x0} + 15.54\}\, w_0{}^2 \tag{5.12}$$

Согласно формуле (5.2) значения функций усилий в исходном и первом приближениях равны соответственно величинам

$$\Phi_0 = T_{x0}\left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}\nu x^2\right), \qquad \Phi_1 = T_{x1}\left(\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}\nu x^2\right)$$

Уравнение (3.8) в нашем случае сведется к равенству

$$T_{x1}\left(\left[\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}\nu x^2\right], \psi\right) = T_{x0}\left(\left[\frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{2}\nu x^2\right], \psi\right) \quad \text{или} \quad T_{x1} = T_{x0} \tag{5.13}$$

Подставляя в это последнее соотношение (5.12) и (5.5), получаем уравнение для определения величины $(Eh)_1$:

$$\frac{(Eh)_1}{(1-\nu^2)\,l^2} (0.4464 l^2 D^{-1} T_{x0} + 15.54)\, w_0{}^2 = \frac{(Eh)_0}{(1-\nu^2)\,l^2} 15.54 w_0{}^2$$

Решая это уравнение относительно $(Eh)_1$ и заменив T_{x0} его выражением (5.5), имеем

$$(Eh)_1 = (Eh)_0 \left[1 + \frac{0.4874}{1-\nu^2}\left(\frac{w_0}{h_0}\right)^2\right]^{-1} \tag{5.14}$$

Далее по формулам (3.9) определяем толщину и модуль упругости пластины во втором приближении:

$$h_1 = \sqrt{12\,(1-\nu^2)\,D/(Eh)_0}, \qquad E_1 = (Eh)_1/h_1 \tag{5.15}$$

Пользуясь формулами (5.5), (5.7) и (5.15), можно, задаваясь рядом возрастающих значений w_0, вычислить соответствующие приближенные значения прогибов, нагрузок, мембранных усилий, толщин пластин и их модулей упругости. Таким образом, получается решение задачи не для одной фиксированной пластины, а при разных нагрузках для разных пластин; однако этого вполне достаточно, чтобы по точкам построить график зависимости между приведенной нагрузкой $p_1/E_1 h^4$, приведенными прогибами w_1 и приведенными мембранными напряжениями $T_1/E_1 h^3$.

Используя предыдущие соотношения, можно вывести следующее приближенное соотношение между прогибом середины пластины и ее нагрузкой:

$$\frac{p_1}{E_1 h_1^4} = 0.4395\,\frac{w_1(0)}{h'} + 1.3335\,\frac{w_1(0)^3/h_1^3}{1 - 0.02143\,(w_1(0)/h_1)^2} \tag{5.16}$$

Однако пользоваться этой формулой совсем не обязательно, можно с таким же успехом строить графики зависимости между приведенным прогибом и приведенной нагрузкой так, как это было указано выше.

В таблице даны результаты вычислений значений приведенных нагрузок $p^\circ = pl^4/Eh^4$, вызывающих различные относительные прогибы середины пластины; в первой графе указаны относительные прогибы середины пластины, во второй — соответствующие точные значения приведенной нагрузки, в третьей и четвертой — приближенные значения нагрузок, вычисленные методом Чена [2] путем разложения нагрузки по степеням относительных прогибов во втором и третьем приближениях, в пятой графе указаны значения нагрузок, подсчитанные во втором приближении по описанному выше методу при помощи формулы (5.16).

Рядом с приближенными значениями расположены их относительные погрешности в процентах.

w/h	P° точное	P° [1] 2-ое приближение		P° [1] 3-е приближение		P° (5.16) 2-ое приближение	
0.365(4)	0.225(9)	0.225(7),	0.1%	0.226,	0.05%	0.225(8),	0.05%
0.728	0.843	0.835,	1	0.845(6),	0.4	0.841(4),	0.25
1.087	2.24	2.19,	2.7	2.20,	0.9	2.23,	0.5
1.44	4.8(0)	4.6(4),	3.3	4.9(5).	3.1	4.8(3),	0.6
1.7(8)	8.9(3)	8.4(0),	6	9.3(0),	4.5	8.9(6),	0.(4)
2.1(4)	15.(0)	14.2,	6	16.4,	9	15.6,	4
2.5(6)	23.(4)	22(0),	6	26(9),	17	25(3),	8
3.2(2)	48.(8)	46(0),	6	63(2),	3(0)	58(9),	2(0)

6. В качестве следующего примера рассмотрим задачу определения прогибов круглой пластины радиуса a, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой p. Края пластины предполагаются неподвижно защемленными, это значит, что повороты и перемещения краев пластины предполагаются равными нулю. Обозначим r — расстояние до центра пластины, w — прогиб, N — величина радиального мембранного усилия, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, h — толщина пластины.

Если ввести новую координату

$$x = 1 - (r^2/a^2) \tag{6.1}$$

то, как показано в работе [2], уравнение совместности и соответствующее ему граничное условие можно представить в виде

$$[(1-x),\ N]_{xx} = -\tfrac{1}{2}\,Ehw_x^2 \qquad 2N_x - (1-\nu)N = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{6.2}$$

Величина радиального мембранного усилия N связана с функцией усилий Φ соотношением

$$N = \Phi_r/r = -2\Phi_x/a^2 \tag{6.3}$$

Уравнения равновесия и граничные условия для прогиба имеют вид (см. [1]):

$$-[(1-x)\,w_x]_{xx} = \frac{3(1-\nu^2)}{4}\,\frac{a^4 p}{Eh^3} - 3(1-\nu^2)\,Nw_x, \qquad w = w_{1x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{6.4}$$

В качестве исходного приближения для формы прогиба примем форму прогиба пластины при бесконечно малых нагрузках: она определяется из уравнений (6.4), если в них положить $N = 0$:

$$w_0(x) = w_0 x^2 \tag{6.5}$$

Подставим это значение $w_0(x)$ вместо w в правую часть уравнения (6.2), подставим вместо E и h произвольные положительные числа E_0 и h_0 и решим полученное уравнение относительно N:

$$N_0 = E_0 h_0 w_0^2 \frac{1}{6}\left[\frac{2}{1-\nu} + x + x^2 + x^3\right] \tag{6.6}$$

Соответствующее значение функции усилий определяется путем решения уравнения [см. (6.3)]$-2\Phi_{0x} / a^2 = N_0$.

Решение этого уравнения имеет вид:

$$\Phi_0(x) = -\frac{1}{2}a^2\int_0^x N_0 dx + \Phi_0(0) \tag{6.7}$$

$$\Phi_0(x) = -E_0 h_0 a^2 \frac{1}{12}\left(\frac{2}{1-\nu}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right) + c$$

Подставим выражения (6.5) и (6.6) вместо w и N в правую часть уравнения (6.4) и решим полученное уравнение относительно w_1; величину нагрузки $p = p_1$ в первом приближении подберем так, чтобы прогибы центра пластины в первом и исходном приближениях совпадали; в результате вычислений получим выражения: прогиба

$$w_1(x) = w_0(x) + \delta_1 w(x) \tag{6.8}$$

$$\delta_1 w(x) = \frac{w_0^3}{h^2}(1-\nu^2)x^2(1-x)\left[\frac{83-43\nu}{1-\nu} + 23x + 8x^2 + 2x^3\right] \tag{6.9}$$

нагрузки

$$p_1 = \frac{16}{3}\frac{E_0 h_0^3}{a^4(1-\nu^2)}\left\{w_0 + \frac{1+\nu}{360}(173-73\nu)\frac{w_0^3}{h_0^2}\right\} \tag{6.10}$$

Далее согласно формуле (3.4) определяем величину Φ_1 путем решения уравнения

$$[(1-x)N_1]_{xx} = -\frac{1}{2}E_1 h_1 w_1^2, \qquad 2N_{1x} - (1-\nu)N_1 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \tag{6.11}$$

и последующего определения величины Φ из уравнения [см. (6.3)]

$$-\frac{2\Phi_{1x}}{a^2} = N_1, \qquad \Phi_1(x) = -\frac{a^2}{2}\int_0^x N_1 dx + \Phi_1(0) \tag{6.12}$$

Если подставить в уравнение (6.11) выражения (6.8) и (6.9) и в соответствии с методом малого параметра пренебречь квадратами малой поправки и ее производных, то можно получить из (6.12)

$$\begin{aligned}\Phi_1 = -\frac{1}{2}a^2E_1h_1\Bigg\{&\frac{1}{6}\left(\frac{2}{1-\nu}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right)w_0^2 + \\ &+ \frac{(1-\nu^2)}{h^2 7560}w_0^4\left[\frac{160-104\nu}{(1-\nu)^2}x + \frac{80-52\nu}{1-\nu}\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right) - \right. \\ &\left.- \frac{501-249\nu}{5(1-\nu)}x^5 - \frac{123}{6}x^6 - \frac{39}{7}x^7 - \frac{9}{8}x^8\right]\Bigg\} + \Phi_1(0)\end{aligned} \tag{6.13}$$

Величину E_1h_1 определяем из условия равенства средних величин усилий N в исходном и первом приближениях:

$$\frac{1}{a}\int_0^a N_0 dx = \frac{1}{a}\int_0^a N_1 dx$$

Согласно (6.7) и (6.12) это уравнение сводится к условию

$$-\frac{1}{2a^3}\{\Phi_0(a) - \Phi_0(0)\} = -\frac{1}{2a^3}\{\Phi_1(a) - \Phi_1(0)\} \tag{6.14}$$

что соответствует уравнению (3.8) при

$$\psi(x) = -\frac{1}{2a^3}\{\delta(x-a) - \delta(x)\}$$

где $\delta(x)$ — функция Дирака — Дирихле.

Если подставить в уравнение (6.14) ранее полученные выражения для функций усилия, то получим при $\nu = 0.3$ соотношение

$$0.657E_0h_0w_0^2 = E_1h_1\left(0.657w_0^2 + 0.0257\frac{w_0^4}{h_0^2}\right) \qquad (6.15)$$

Так как мы условились менять величины E и h так, чтобы при этом цилиндрическая жесткость не изменялась:

$$E_0h_0^3 = E_1h_1^3, \ \ldots \qquad (6.16)$$

то, деля соответствующие члены уравнения (6.15) на члены уравнения (6.16), получим

$$\frac{0.657w_0^2}{h_0^2} = \frac{1}{h_1^2}\left(0.657w_0^2 + 0.0257\frac{w_0^4}{h_0^2}\right), \qquad h_0^2 = h_1^2 - 0.0392w_0^2 \qquad (6.17)$$

Если заменить согласно (6.16) в формуле (6.10) $E_0h_0^3$ на $E_1h_1^3$ и выразить в той же формуле величину h_0^2 через h_1^2 по (6.17), то можно получить при $\nu = 0.3$

$$\frac{p_1}{E_1h_1^4} = \frac{5.86}{a^4}\left\{\frac{w_0}{h_1} + 0.544\left(\frac{w_0}{h_1}\right)^3\left[1 - 0.0392\left(\frac{w_0}{h_1}\right)^2\right]^{-1}\right\} \qquad (6.18)$$

7. Для случаев опирания оболочки, при которых уравнения линейной теории оболочек легко решаются, можно применять более быстро сходящийся способ последовательных приближений.

Для этого сделаем подстановку $\Phi^* = \Phi\sqrt{Eh}$ и приведем систему уравнений (3.2) и (3.3) путем перенесения всех линейных членов налево к виду

$$\Delta^2\Phi^* - \sqrt{12(1-\nu^2)D}\,[v,\ w] = \tfrac{1}{2}\sqrt{Eh}\,[w,\ w] \qquad (7.1)$$

$$D\Delta^2 w + \sqrt{12(1-\nu^2)D}\,[v,\ \Phi^*] = P - \sqrt{Eh}\,[w,\ \Phi^*] \qquad (7.2)$$

и будем последовательно решать системы уравнений

$$\Delta^2\Phi^*_{n-1} - \sqrt{12(1-\nu^2)D}\,[v,\ w_{n+1}] = \tfrac{1}{2}\sqrt{(Eh)_{n-1}}\,[w_n,\ w_n] \qquad (7.3)$$

$$D\Delta^2 w_{n-1} + \sqrt{12(1-\nu^2)D}\,[v,\ \Phi^*_{n+1}] = p_{n+1}P - \sqrt{Eh_{n+1}}\,[w_n,\ \Phi^*_n] \qquad (7.4)$$

При этом величины $(Eh)_{n+1}$ и p_{n+1} на каждом шаге приближений регулируются так, чтобы оставались неизменными величины

$$(\Phi^*_{n+1},\ \psi) = (\Phi^*_n,\ \psi), \qquad (w_{n+1},\ \varphi) = (w_n,\ \varphi)$$

Описанные выше методы могут без изменения их применяться для определения прогибов оболочек при продольных краевых нагрузках. Применение метода возмущений и метода последовательных приближений к продольному изгибу без использования теоремы подобия для улучшения сходимости дано в работах [6, 7].

Поступила 19 I 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Свирский И. В. Различные варианты метода последовательных приближений и метода возмущений. Изв. Казанск. фил. АН СССР, вып. 12, стр. 29—41, 1948.
2. Chien W. Z. Large Deflection of a Circular Elamped Plate under Uniform Pressure. Chinese J. of Phys., vol. 7, № 2, 1947.
3. Муштари Х. М. Средний прогиб пологой оболочки, прямоугольной в плане и опирающейся на гибкие в своей плоскости ребра. Изв. Казанск. фил. АН СССР, сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 12, стр. 53—62, 1958.
4. Муштари Х. М. и Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек Таткнигоиздат, 1957.
5. Вольмир А. С. Гибкие пластинки и оболочки. ГИТТЛ, М., 1956.
6. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу об устойчивости пластин ПММ, т. XX, вып. 1, 1956.
7. Алексеев С. А. Послекритическая работа гибких упругих пластинок ПММ, т. XX, вып. 6, стр. 673—679, 1956.