Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

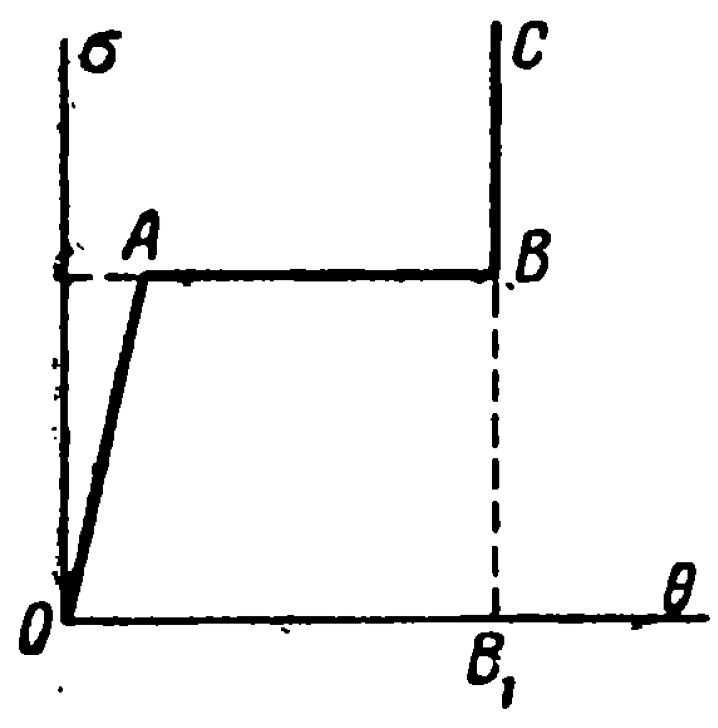
ОБ ИЗЛУЧЕНИИ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ПРИ СФЕРИЧЕСКОМ ВЗРЫВЕ В ГРУНТЕ

Н. В. Зволинский

(Москва)

Излагается дальнейшее развитие работы [1]. По сравнению с упомянутой работой в настоящей статье рассматривается не жестко-пластическая, а упруго-пластическая среда (по отношению к эффекту упаковки), а течение среды в несжимаемом состоянии наделяется свойством, сходным с внутренним трением. Наличие начального упругого участка на диаграмме (σ, θ) позволяет рассмотреть весь процесс распространения взрывной волны, включая излучение упругой волны. Ниже рассматривается эта задача со сферической симметрией.

§ 1. Свойства среды должны быть заданы законом объемной деформации и законом деформации при формоизменении. Закон объемной деформации (диаграмма $\sigma - \theta$) задается в виде ломаной линии (фиг. 1).



Фиг. 1

Предполагается, что среда может находиться только в двух состояниях: упругом начальном (отрезок OA) и упакованном, несжимаемом (B_1BC); переход ко второму состоянию происходит мгновенно при $\sigma = \sigma_s$ (это предположние, вообще говоря, требует доказательства). Через σ обозначено среднее напряжение, через θ — дилатация. Линия $OABC$ соответствует активной стадии (стадии нагрузки). Разгрузка в упругой стадии представляет собой обратимый процесс, в неупругой разгрузка происходит без изменения объема (прямая CBB_1). В упругой стадии (линия OA) формоизменение подчиняется закону Гука. При течении в состоянии несжимаемости затрачивается пластическая работа. Необходимо сделать некоторое предположение о том, какова эта работа. При пластическом течении металлов влияние среднего напряжения на пластическую работу оказывается незначительным. Для мягкого грунта такое предположение представляется мало приемлемым; в этом последнем случае более правдоподобно считать, что пластическая работа возрастает с повышением среднего напряжения. Экспериментов в этом направлении пока еще мало. Я предлагаю в качестве гипотезы (которая должна быть проверена опытом) считать, что при сферической симметрии изменение элементарной пластической работы при переходе от одного состояния к смежному пропорционально изменению наибольшего сдвига. Коэффициент пропорциональности предполагаю некоторой функцией от среднего напряжения. Эта функция должна быть определена из опыта. Математическое выражение гипотезы есть

$$\delta A = \iiint m(\sigma)\,|\,\delta\gamma\,|\,dV \tag{1.1}$$

Здесь A — пластическая работа, δA — ее изменение при переходе к смежному состоянию, $\delta\gamma$ — наибольший сдвиг при этом переходе. Пока нет экспериментальных сведений о функции $m(\sigma)$, приходится делать простейшие целесообразные предположения. В настоящей статье я считаю, что $m(\sigma)$ — линейная функция [1].

Это предположение приводит к пластической среде, предложенной впервые А. Ю. Ишлинским [2]. Аналогичное предположение о свойстве грунта сделал А. С. Компанеец в работе [3]. В дальнейшем для описанной сплошной среды рассматривается задача распространения сферической волны, вызванной взрывом заряда, заполняющего сферическую полость (каверну). Предполагается, что продукты ВВ при $t = 0$ занимают начальный объем каверны; расширение совершается по адиабатическому закону. Волновой процесс в каверне не рассматриваем.

§ 2. Относим движение к сферической системе координат, центр которой поместим в центре сферической полости; обозначим текущий радиус через r, пусть $u(r, t)$ — радиальное смещение, $v(r, t)$ — радиальная скорость, σ_r, σ_α, σ_β — компоненты напряжения; при условии сферической симметрии $\sigma_\beta = \sigma_\alpha$ и для среднего напряжения получим

$$\sigma = \frac{1}{3}(\sigma_r + 2\sigma_\alpha)$$

Как в упругой, так и в пластической стадии уравнение движения имеет вид:

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\alpha)}{r} = \rho_{1,2}\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{dv}{\partial r}\right) \tag{2.1}$$

Для упругой среды $\rho_{1,2} = \rho_1$. К уравнению (2.1) надо присоединить закон Гука

$$\sigma_r = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \sigma_\alpha = \lambda\theta + 2\mu\frac{u}{\partial r} \qquad \left(\theta = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2u}{r}\right)$$

В упругой стадии, как обычно, не делаем различия между эйлеровым и лагранжевым описанием процесса, т. е. $\partial u / \partial t = dv / dt$.

В пластической стадии в силу несжимаемости имеем

$$v = \frac{C(t)}{r^2}$$

где $C(t)$ — произвольная функция. Учитывая, что при этом

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = -\frac{3C(t)}{r^3}$$

и рассматривая пластическое течение элементарного сферического слоя, на основании баланса энергии необходимо, чтобы

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{3m(\sigma)}{r} = \rho_2\frac{dv}{dt} \tag{2.2}$$

Сопоставляя с (2.1), найдем

$$\sigma_r - \sigma_\alpha = \frac{3}{2}m(\sigma) \tag{2.3}$$

что представляет собой некоторое «условие пластичности». Пока нет необходимых результатов опыта, будем полагать

$$\frac{3}{2}m(\sigma) = m_0\sigma + m_1$$

---

[1] С. С. Григоряном предложена модель грунта весьма общего вида [4]. Схема, рассматриваемая в данной статье, является ее частным случаем.

Отсюда получается

$$\sigma_\alpha = \frac{(1 - m_0')\,\sigma_r - m_1}{1 + 2m_0'}, \qquad m_0' = \frac{m_0}{3}$$

В настоящей работе принимается для m_0' значение $^1/_4$. Это приводит к правдоподобному результату

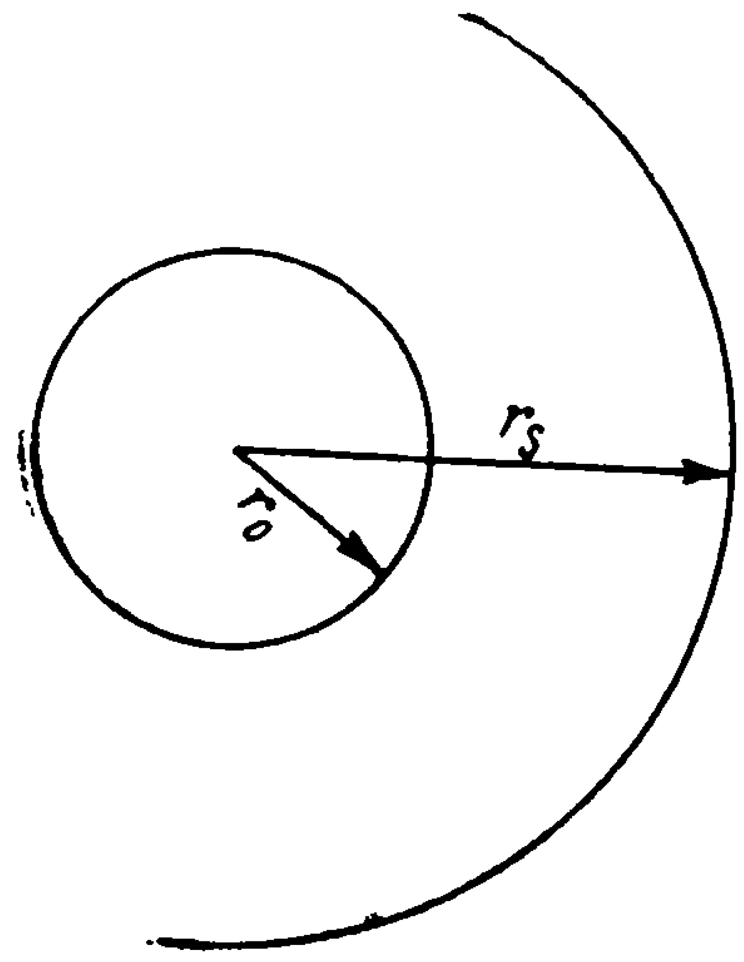
$$\sigma_\alpha = \frac{1}{2}\,\sigma_r - \frac{2}{3}\,m_1 \tag{2.4}$$

Константа m_1 имеет размерность напряжения; целесообразно считать, что $m_1 > 0$.

Примем адиабатический закон расширения продуктов взрыва, тогда для напряжения σ_0 на стенках каверны имеем

$$\sigma_0(r_0) = \sigma_0(a)\left(\frac{a}{r_0}\right)^{3\gamma} \tag{2.5}$$

где a — начальный радиус полости, а γ — показатель адиабаты.



Фиг. 2

Начальное напряжение $\sigma_m = \sigma_0(a)$ предполагается достаточно большим, способным вызвать в окрестности каверны упаковку грунта, которая затем продолжает распространяться. При сделанных выше гипотезах процесс распространения взрывной волны может быть описан следующими последовательными стадиями:

1) ударная волна упаковки распространяется по невозмущенной среде;

2) по невозмущенной среде распространяется упругая волна; за ней идет зона упаковки, границей служит ударный фронт, упаковка грунта продолжается;

3) по невозмущенной среде распространяется упругая волна; за ней следует упакованная зона, границей является контактный развыв. Пластическое течение продолжается, но новой упаковки среды не происходит;

4) упакованная зона остановилась; от нее оторвался задний фронт упругой волны, которая уходит в бесконечность.

§ 3. Составим уравнения и краевые условия для описания каждой из указанных стадий (вопрос о единственности решения задачи пока не рассматривался).

Рассмотрим первую стадию (фиг. 2). Радиус ударной волны обозначим через r_s. Механические условия на ударной волне сводятся к следующим двум:

$$v_2(r_s, t) = \alpha r_s', \qquad \sigma_2(r_s, t) = -\alpha\rho_1 r_s'^2, \qquad \alpha = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \tag{3.1}$$

Индекс 2 относится к упакованному состоянию грунта, индекс 1 — к упругому. Штрих означает производную по времени.

В принятом описании грунт представляет среду с разделяющейся энергией; поэтому механические условия на ударной волне не связаны с энергетическим, которое должно служить для проверки баланса энергии на ударной волне.

Уравнение движения (2.1) совместно с условием несжимаемости и «условием пластичности» (2.3) даст следующее выражение для радиальной компоненты напряжения:

$$\sigma_r = \rho_2 C'(t) \frac{\ln r}{r} + \frac{2\rho_2}{3} \frac{C^2(t)}{r^4} + \frac{C_1(t)}{r} - m' \qquad \left(m' = \frac{4}{3} m_1\right) \tag{3.2}$$

Здесь $C(t)$ и $C_1(t)$ — произвольные функции времени. Функции $C(t)$ и $C_1(t)$, равно как и две другие функции $r_0(t)$ и $r_s(t)$, должны быть найдены из краевых условий. Два условия (3.1) на ударной волне уже выписаны: два других условия ставятся на подвижной границе каверны:

$$v(r_0, t) = r_0'(t), \qquad \sigma(r_0, t) = \sigma_0(r_0) \tag{3.3}$$

Одну из четырех искомых функций можно принять за основную неизвестную, для которой путем исключения остальных получим одно уравнение. За основную неизвестную принимаем r_s^3 и обозначаем эту величину буквой z. Для z получается обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, нелинейное, в которое время не входит явно. Если поменять роли переменных, приняв за независимое переменное z, а за искомую функцию $z' = dz/dt$, то для z'^2 получим линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dz'^2}{dz} + P(z) z'^2 = Q(z) \tag{3.4}$$

Здесь

$$P(z) = \frac{2\rho_1}{3\rho_2} \frac{1 + \dfrac{2a^3}{\alpha z + \beta}}{z \ln \dfrac{z}{\alpha z + \beta}}, \qquad Q(z) = \frac{18}{\alpha\rho_2} \frac{m' z^{1/3} - (\alpha z + \beta)^{1/3}(\sigma_0 + m')}{\ln \dfrac{z}{\alpha z + \beta}}$$

Уравнение (3.4) надо интегрировать на полубесконечном отрезке $(a^3, +\infty)$. Начальное условие (при $z = a^3$) получается, если во вторых равенствах (3.1) и (3.3) перейти к пределу, полагая $r_0 \to a$ и $r_s \to a$. Таким образом, получим

$$z'^2(a^3) = -\frac{9a^4}{\alpha\rho_1}\sigma_m \tag{3.5}$$

Функция σ_0, входящая в $Q(z)$, зависит от z и согласно (2.5) выражается формулой

$$\sigma_0(r_0) = \sigma_m \left(\frac{a^3}{\alpha z + \beta}\right)^\gamma \tag{3.6}$$

Уравнение (3.4) интегрируется в квадратурах; вычисление неопределенных интегралов в элементарных функциях не получается. Интегралы могут быть вычислены приближенно различными способами. Однако, прежде чем производить приближенные числовые расчеты, надо выяснить качественные свойства уравнения (3.4). Рассматривая поле направлений, определяемое этим уравнением, можно доказать, что решение уравнения (3.4), соответствующее начальному условию (3.5), с увеличением z монотонно убывает (по крайней мере, начиная с некоторого значения z). Далее, оценивая $|Q(z)|$, можно показать, что $\lim z'^2 = 0$ при $z \to \infty$. Это значит, что скорость движения фронта ударной волны убывает, приближаясь к нулю. Такой вывод заставляет заключить, что первый режим движения не может продолжаться все время. После того как скорость ударной волны сделается равной, а затем и меньшей скорости звука в невозмущенной среде, впереди ударной волны должна появиться упругая (звуковая) волна, т. е. наступит второй режим движения.

§ 4. Новый режим движения будет отличаться условиями на ударной волне, которая теперь распространяется по зоне упругого возмущения.

Вместо условий (3.1) получим

$$\sigma_2(r_s, t) = \sigma_1(r_s, t) - \frac{\alpha\rho_2^2}{\rho_1}[r_s' - v_2(r_s, t)]^2 \tag{4.1}$$

$$v_2(r_s, t) = v_1(r_s, t)\frac{\rho_1}{\rho_2} + \alpha r_s' \tag{4.2}$$

В пластической зоне напряжение σ_r по-прежнему выражается формулой (3.2). Условия (3.3) на границе каверны также сохраняются.

В упругой зоне радиальные напряжения и скорость выражаются соответственно формулами

$$\sigma_r = \frac{\lambda + 2\mu}{a_0^2 r} F''\left(t - \frac{r}{a_0}\right) + \frac{4\mu}{a_0 r^2} F'\left(t - \frac{r}{a_0}\right) + \frac{4\mu}{r^3} F\left(t - \frac{r}{a_0}\right) \tag{4.3}$$

$$v = -\frac{1}{a_0 r} F''\left(t - \frac{r}{a_0}\right) - \frac{1}{r^2} F'\left(t - \frac{r}{a_0}\right) \tag{4.4}$$

где a_0 — скорость звука в упругой среде.

Передний фронт упругой зоны не создает никаких дополнительных условий; единственным требованием является его распространение «вдоль характеристики», т. е. со звуковой скоростью.

Подводя итоги изложенной постановке задачи для второго режима движения, приходим к выводу, что здесь требуется определить пять неизвестных функций $C(t)$, $C_1(t)$, $r_0(t)$, $r_s(t)$, $F(t)$, в то время как имеются всего четыре уравнения (4.2), (4.1) и (3.3). Дополнительное условие можно получить из соображений устойчивости ударной волны. Известно, что независимо от термодинамических свойств среды [5] ударная волна распространяется со сверхзвуковой скоростью по области, лежащей впереди ее фронта, и с дозвуковой — по области, расположенной позади. Это условие необходимо для устойчивости режима движения. Позади фронта среда несжимаема, скорость распространения звука бесконечна и потому соответствующее требование всегда выполняется. По смыслу второго режима движения при этом режиме скорость ударной волны относительно частиц, расположенных впереди фронта, всегда меньше скорости звука в области перед фронтом. Это значит, что при $0 < \sigma_1 < \sigma_s$ движение будет заведомо неустойчивым. Если движение во втором режиме все же реализуется, то это может быть при одном лишь предположении, а именно, что

$$\sigma_1 = \sigma_s \tag{4.5}$$

Это предположение и примем в качестве недостающего условия (непосредственное доказательство устойчивости движения в этом случае должно быть сделано дополнительно) [1].

Сделаем еще следующее упрощение. Второй режим наступает тогда, когда радиус фронта ударной волны уже значительно (в несколько раз)

[1] См. также [6]

превосходит начальный радиус каверны. При этом естественно заменить формулы (4.3) и (4.4) следующими приближенными[1]:

$$\sigma_r \approx \frac{\lambda+2\mu}{a_0^2 r} F''\left(t-\frac{r}{a_0}\right), \qquad v \approx -\frac{1}{a_0 r} F''\left(t-\frac{r}{a_0}\right) \tag{4.6}$$

Из предположения (4.5) с учетом соотношения

$$\frac{\sigma_r}{\sigma} = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+{}^2/_3\mu}$$

вытекает, что граничные значения σ_r и v на фронте ударной волны со стороны упругой области будут

$$\sigma_1(r_s, t) = \frac{\lambda+2\mu}{\lambda+{}^2/_3\mu}\sigma_s, \qquad v_1(r_s, t) = \frac{a_0\sigma_s}{\lambda+2\mu} \tag{4.7}$$

Поскольку теперь граничные значения впереди фронта ударной волны известны, для определения четырех функций $C(t)$, $C_1(t)$, $r_0(t)$, $r_s(t)$ достаточно четырех уравнений (4.2), (4.1), (3.3). Неизвестная функция $F''(t)$ находится затем из функционального уравнения

$$F''\left(t-\frac{r_s(t)}{a_0}\right) = \frac{a_0^2\sigma_s}{\lambda+{}^2/_3\mu} r_s(t) \tag{4.8}$$

Условия (3.3) и (4.2) в развернутом виде

$$C(t) = r_0^2 r_0', \qquad C(t) = \alpha r_s^2 r_s' + \frac{\rho_1}{\rho_2} v_1$$

Отсюда

$$d(r_0^3) = \left(\alpha + \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{v_1}{r_s'}\right) d(r_s^3) \tag{4.9}$$

В начале второго режима v_1/r_s' величина очень малая, в конце приближается к единице. В первом приближении мы примем

$$d(r_0^3) = \alpha d(r_s^3) \tag{4.10}$$

Это оправдывается тем соображением, что в расширении каверны основную роль должна играть упаковка грунта, а тот вклад, который вносит в это расширение упругая податливость внешней области, не может быть значительным. (Это предположение относится к камуфлетному взрыву. При участии свободной поверхности механизм расширения каверны может быть другой.)

Интегрирование уравнения (4.10) с учетом начального условия, требующего непрерывности r_0 как функции от r_s, приводит к результату

$$r_0^3 = \alpha r_s^3 + \beta$$

Теперь можно, как и в предыдущем параграфе, ввести в качестве независимого переменного $z = r_s^3$, а в качестве искомой функции z'^2. Для этой функции получим уравнение

$$\frac{dz'^2}{dz}\ln\frac{z}{z_0} + \frac{2\rho_1}{3\rho_2}\frac{z'^2}{z}\left(1+\frac{2a^3}{z_0}\right) = \frac{18}{\alpha\rho_2}\left(\frac{\lambda+2\mu}{\lambda+{}^2/_3\mu}\sigma_s + m'\right)z^{1/_3} - \frac{18}{\alpha\rho_2}[\sigma_0(r_0) + m']\, z_0^{1/_3} -$$
$$-\frac{4\rho_1}{\alpha\rho_2} v_1 \frac{z'}{z^{1/_3}}\left[\ln\frac{z}{z_0} - \alpha - 2\alpha\left(\frac{z}{z_0}\right)\right] - \frac{18\rho_1}{\alpha\rho_2} v_1^2 z^{1/_3}\left[\alpha + \frac{2\rho_1}{3\rho_2}\left(1-\frac{z}{z_0}\right)\right] \tag{4.11}$$

[1] Это упрощение тем справедливее, чем короче длительность второго режима движения. В дальнейшем желательно это предположение заменить более точным.

Здесь $z_0 = \alpha z + \beta$, а функция σ_0 выражается формулой (3.6). Это уравнение первого порядка относительно z'^2 нелинейное. Начальным условием является условие непрерывности z' при переходе от первого режима движения ко второму. Непрерывность z' следует из того, что правые части дифференциальных уравнений (3.4) и (4.11) хотя и различаются, но изменения эти при смене режимов движения на носят «импульсного» характера. Для уравнения (4.11) можно построить изоклины с тем, чтобы выяснить качественный характер движения во втором режиме. Исследование показывает, что в этом режиме z' (а следовательно, и скорость фронта r_s') будет монотонно убывать, приближаясь к нулю.

§ 5. Нетрудно показать, что описанный режим движения не может продолжаться вплоть до остановки. Действительно, прежде чем r_s обратится в нуль, наступит равенство $r_s' = v_1$, а в силу закона сохранения массы

$$(r_s' - v_1)\rho_1 = (r_s' - v_2)\rho_2$$

при этом должно быть $r_s' = v_2$. Таким образом, в указанный момент ударная волна, полностью истощившись, прекращает свое существование. Однако движение еще не прекратилось. Естественно описывать следующий, третий, этап движения как движение с контактным разрывом, когда на границе, отделяющей упакованную область от упругой, как скорости, так и напряжения равны.

Краевые условия на контактном разрыве выразятся при этом следующим образом:

$$\sigma_2(r_s, t) = \sigma_1(r_s, t), \qquad v_2(r_s, t) = v_1(r_s, t) \tag{5.1}$$

К ним надо присоединить условие, в силу которого поверхность контактного разрыва состояла бы из одних и тех же частиц:

$$r_s' = v_1(r_s, t) \tag{5.2}$$

Условия (3.3) на границе каверны остаются прежними. Таким образом, мы имеем здесь пять соотношений для определения величин

$$C(t), \quad C_1(t), \quad r_0(t), \quad r_s(t), \quad v_1(r_s, t), \quad \sigma_1(r_s, t)$$

Последние две функции v_1 и σ_1 не независимы. В самом деле, с принятой точностью

$$\sigma_1(r_s, t) = -(\lambda + 2\mu)\frac{v_1(r_s, t)}{a_0}$$

Число уравнений соответствует числу неизвестных, которые и могут отсюда быть найдены. Вводя, как и раньше, $z = r_s^3$, получаем для этой неизвестной функции дифференциальное уравнение

$$\frac{dz'^2}{dz}\ln\frac{z}{z-\beta_0} - \frac{4\beta_0 z'^2}{3z(z-\beta_0)} = -\frac{18}{\rho_2}\sigma_m\frac{a^{3\gamma}}{(z-\beta_0)^{\gamma-1/3}} -$$

$$-\frac{6(\lambda+2\mu)}{a_0\rho_2}\frac{z'}{z^{1/3}} - \frac{18m'}{\rho_2}\left[z^{1/3} - (z-\beta_0)^{1/3}\right] \tag{5.3}$$

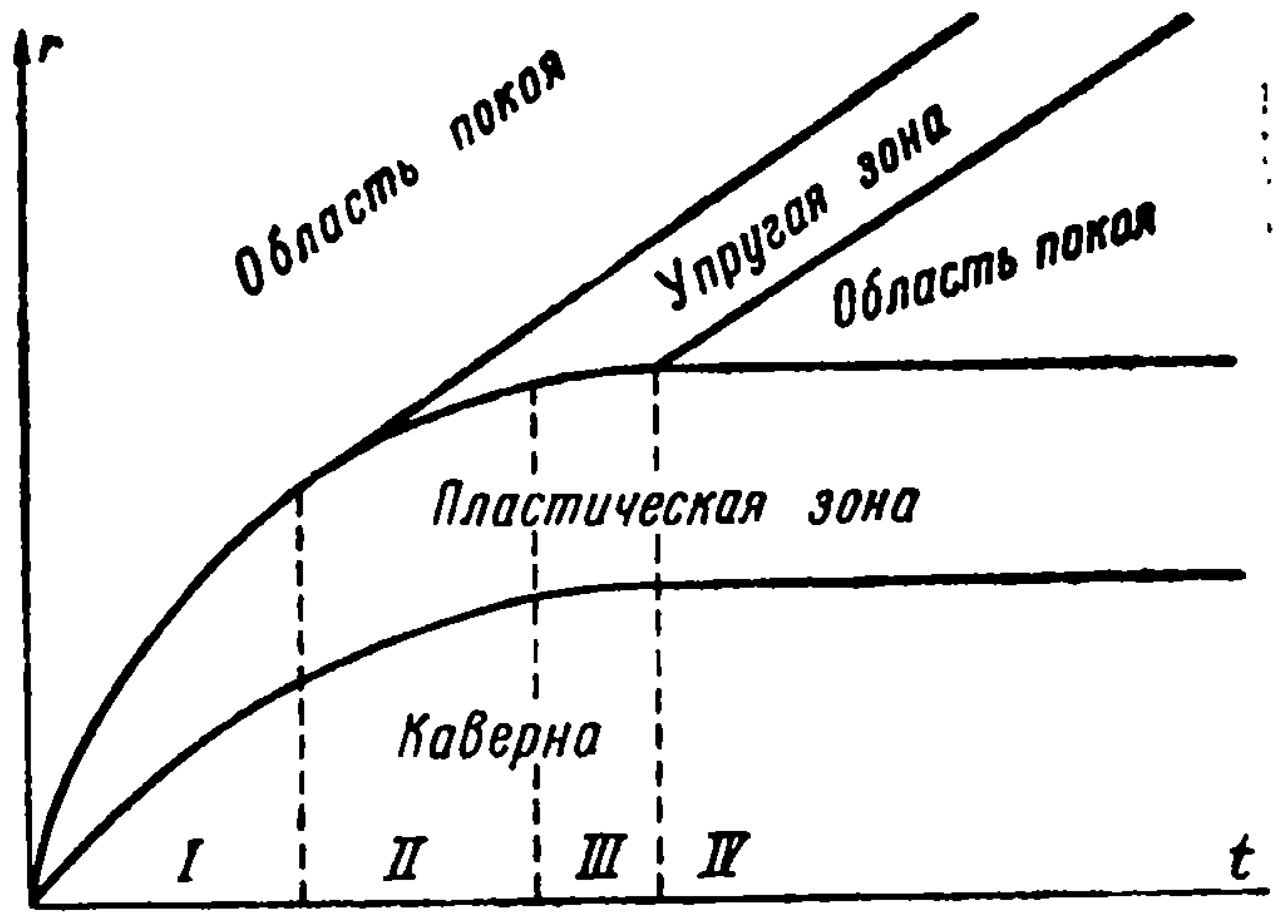
Здесь β_0 — умноженный на $^3/_4\pi$ объем среды, упакованной за все течение процесса. Начальное условие z'^2 вытекает из непрерывности этой функции при переходе от второго режима движения к третьему.

Исследование уравнения (5.3) показывает, что z'^2 обращается в нуль при некотором конечном значении z. Это соответствует остановке движения пластического слоя. На этом заканчивается третий этап движения.

После того как найден z'^2 в функции z, может быть определен закон движения поверхности разрыва (ударного или контактного). Действительно, если

$$z'^2 = f(z), \quad \text{то} \quad \int\limits_{a^*}^{z} \frac{d\zeta}{\sqrt{f(\zeta)}} = t$$

при условии, что время отсчитывается от момента взрыва. Надо заметить, что хотя принципиально этот третий режим движения неизбежен, однако длительность его и практическое значение, по-видимому, ничтожны.



Фиг. 3

§ 6. Остается рассмотреть последний этап движения, возникающий после остановки пластической зоны. На этом этапе движение происходит только во внешней области, где распространяется упругая волна. Ее распространение определяется тем «начальным» распределением скоростей, которое имеет место в момент остановки пластической зоны. При этом у нее образуется задний фронт, который отрывается от границы уплотненной зоны, и упругая волна уходит в бесконечность. Эта часть задачи решается известным способом.

В результате изложенного анализа в зависимости от принятых значений параметров могут быть определены моменты перехода одного режима движения в другой, радиус и объем упакованной зоны, радиус каверны, энергия излученной упругой волны и энергия, необратимо потерянная на пластическую деформацию. Однако решение всех этих вопросов требует выполнения численных расчетов. Кинематическая картина распространения границы каверны и границы уплотненной среды может быть качественно представлена на фиг. 3, где по оси абсцисс отложено время, а по оси ординат — границы соответствующих областей при всех четырех рассмотренных режимах движения.

Я рад выразить признательность А. А. Грибу и С. С. Григоряну за обсуждение настоящей работы.

Поступила 12 X 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю., Зволинский Н. В., Степаненко И. З. К динамике грунтовых масс. ДАН, 1954, т. 95, № 4.
2. Ишлинский А. Ю. О плоском движении песка. Укр. математ. журнал, 1954, т. 6, № 4.
3. Компанеец А. С. Ударные волны в пластической уплотняющейся среде. ДАН, 1956, т. 109, № 1.
4. Григорян С. С. Об общих уравнениях динамики грунтов. ДАН, 1959, т. 124, № 2.
5. Ландау Л. Д. Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гос. изд-во техн.-теорет. лит-ры, изд. 2-е, 1954.
6. Баренблатт Г. И. О распространении мгновенных возмущений в среде с нелинейной зависимостью напряжений от деформации. ПММ, 1953, т. XVII, вып. 4.