

## ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СООТНОШЕНИЙ В ЗАДАЧАХ О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИЛЬНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

Г. Г. Черный

(Москва)

Исследование неавтономных движений газа, возникающих при распространении в нем сферических, цилиндрических или плоских ударных волн, связано с проведением сложных и громоздких вычислений, которые фактически выполнены лишь в небольшом числе случаев (например, в задаче о точечном взрыве [1]). В работах [2-4] предложен приближенный метод расчета таких движений, пригодный при сильном уплотнении газа в ударной волне, т. е. при распространении по газу ударных волн большой интенсивности. Этот метод основан на представлении газодинамических величин в виде рядов специального вида по степеням параметра  $\varepsilon$ , характеризующего отношение плотности газа перед волной к плотности газа за волной. Последовательные члены рядов находятся из уравнений путем квадратур. При сохранении двух первых членов рядов параметры газа в возмущенной области за ударной волной выражены в работе [4] через функцию  $R^*(t)$ , описывающую закон распространения ударной волны. Для определения этой функции в задачах о движениях, возникающих при взрыве в газе и при расширении в газе подвижной границы (поршня), можно использовать закон сохранения энергии в интегральной форме, применив его ко всей области возмущенного движения газа [3].

Полная энергия движущегося газа (сумма его внутренней и кинетической энергии) в каждый момент времени должна равняться энергии  $E$ , выделившейся при взрыве, начальной энергии газа, вовлеченного в движение, и работы, совершенной поршнем. Принимая для внутренней энергии единицы массы газа выражение  $(\gamma - 1)^{-1} p / \rho$  (где  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\gamma$  — отношение теплоемкостей), получим

$$\int_{v^*}^{v^0} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial R}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \right] \rho dv = E + \int_{v^*}^{v^0} \frac{p_1}{\gamma - 1} dv + \int_0^t p^0 dv^0(t) \quad (1)$$

Здесь  $v^* - v^0$  — объем, занятый движущимся газом  $v^0$  — объем, вытесненный поршнем,  $p_1$  — начальное давление газа,  $p^0$  — давление на поршне,  $\partial R / \partial t$  — скорость частиц газа,  $t$  — время.

При использовании этого интегрального соотношения наряду с представлением искомых величин  $R$ ,  $p$  и  $\rho$  в виде рядов по степеням  $\varepsilon$  функцию  $R^*(t)$ , дающую закон распространения ударной волны, также представим в виде ряда (аналогично тому, как это было сделано в работе [5] для функции, определяющей форму головной ударной волны при стационарном обтекании тел, и Г. А. Любимовым — для случая нестационарных одномерных движений<sup>1)</sup>

$$R^*(t) = R_0(t) + \varepsilon R_1^*(t) + \dots$$

<sup>1)</sup> Любимов Г. А. Метод решения задач газодинамики и магнитогидродинамики о течениях с сильными ударными волнами. Диссертация. МГУ, 1958.

Подставляя ряды для  $R$ ,  $p$  и  $\rho$  в уравнение (1) и приравнивая после соответствующих преобразований члены, стоящие справа и слева при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим последовательность обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функций  $R_0$ ,  $R_1^*$  и т. д.

Ниже покажем, что, выделяя специальным образом главные члены в разложениях величин  $\partial R/\partial t$  и  $p$  по степеням  $\varepsilon$ , можно получить уже в первом приближении удовлетворительную точность при определении закона распространения ударной волны (а стало быть, и всех параметров потока непосредственно за ней) и давления на поршне.

В соответствии с результатами работы [4] пусть

$$\frac{\partial R}{\partial t} = \frac{2}{\gamma+1} \left( \dot{R}_0 - \frac{a_1^2}{\dot{R}_0} \right) + O(\varepsilon) \quad \left( a_1^2 = \frac{\gamma p_1}{\rho_1} \right)$$

$$p = p_1 + \frac{2}{\gamma+1} \rho_1 (\dot{R}_0^2 - a_1^2) + \rho_1 \frac{R_0 \ddot{R}_0}{\nu} - \frac{\dot{R}_0}{R_0^{\nu-1}} m + O(\varepsilon)$$

Здесь  $\rho_1$  — начальная плотность газа,  $m$  — лагранжева координата, введенная соотношением  $dm = \rho_1 r^{\nu-1} dr$ , где  $r$  — начальная координата частицы,  $\nu = 1, 2, 3$  соответственно для течений с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами; выбор главных членов произведен так, чтобы в случае, когда  $R_0(t)$  есть закон распространения ударной волны, они давали точные значения соответствующих величин непосредственно за ударной волной, т. е. при  $m = \rho_1 R_0^\nu / \nu$ .

После подстановки выражений для  $\partial R/\partial t$  и  $p$  в интегральное соотношение (1) для определения функции  $R_0(t)$  получаем следующее уравнение (индекс 0 в дальнейшем опущен):

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{2}{\gamma+1} \left( \dot{R} - \frac{a_1^2}{\dot{R}} \right) \right]^2 \frac{\rho_1 R^\nu}{\nu} + \frac{p^\circ}{\gamma-1} \frac{R^\nu - R^{\circ\nu}}{\nu} = \frac{E}{\omega} + \frac{p_1}{\gamma-1} \frac{R^\nu}{\nu} + \int_0^t p^\circ R^{\circ\nu-1} \dot{R}^\circ dt \quad (2)$$

Здесь

$$p^\circ = p_1 + \frac{2}{\gamma+1} \rho_1 (\dot{R}^2 - a_1^2) + \frac{\rho_1 R \ddot{R}}{\nu}$$

$$\omega = 2[\pi(\nu-1) + \delta_{1\nu}], \quad \delta_{11} = 1, \quad \delta_{12} = \delta_{13} = 0$$

Для простоты принято, что в начальный момент времени газ заполняет все пространство.

Оценим точность определения функций  $R(t)$  и  $p^\circ(t)$  из уравнения (2) путем сравнения решений этого уравнения с известными точными решениями задач об автомодельных движениях газа.

1. Поршень, расширяющийся по степенному закону. Пусть

$$R^\circ = ct^{n+1}$$

( $n \neq -1$ ). При  $n \neq 0$  движение автомодельно лишь при условии, что  $a_1 = 0$ , т. е. лишь до тех пор, пока ударную волну можно считать сильной. Полагая  $E = 0$  и принимая, что  $R(0) = 0$ , из уравнения (2) найдем

$$R = \chi^{-\frac{1}{\nu}}(\gamma, \vartheta) R^\circ, \quad \frac{p^\circ}{p^*} = 1 + \frac{\gamma+1}{4} \vartheta \quad \left( \vartheta = \frac{2n}{\nu(n+1)} \right)$$

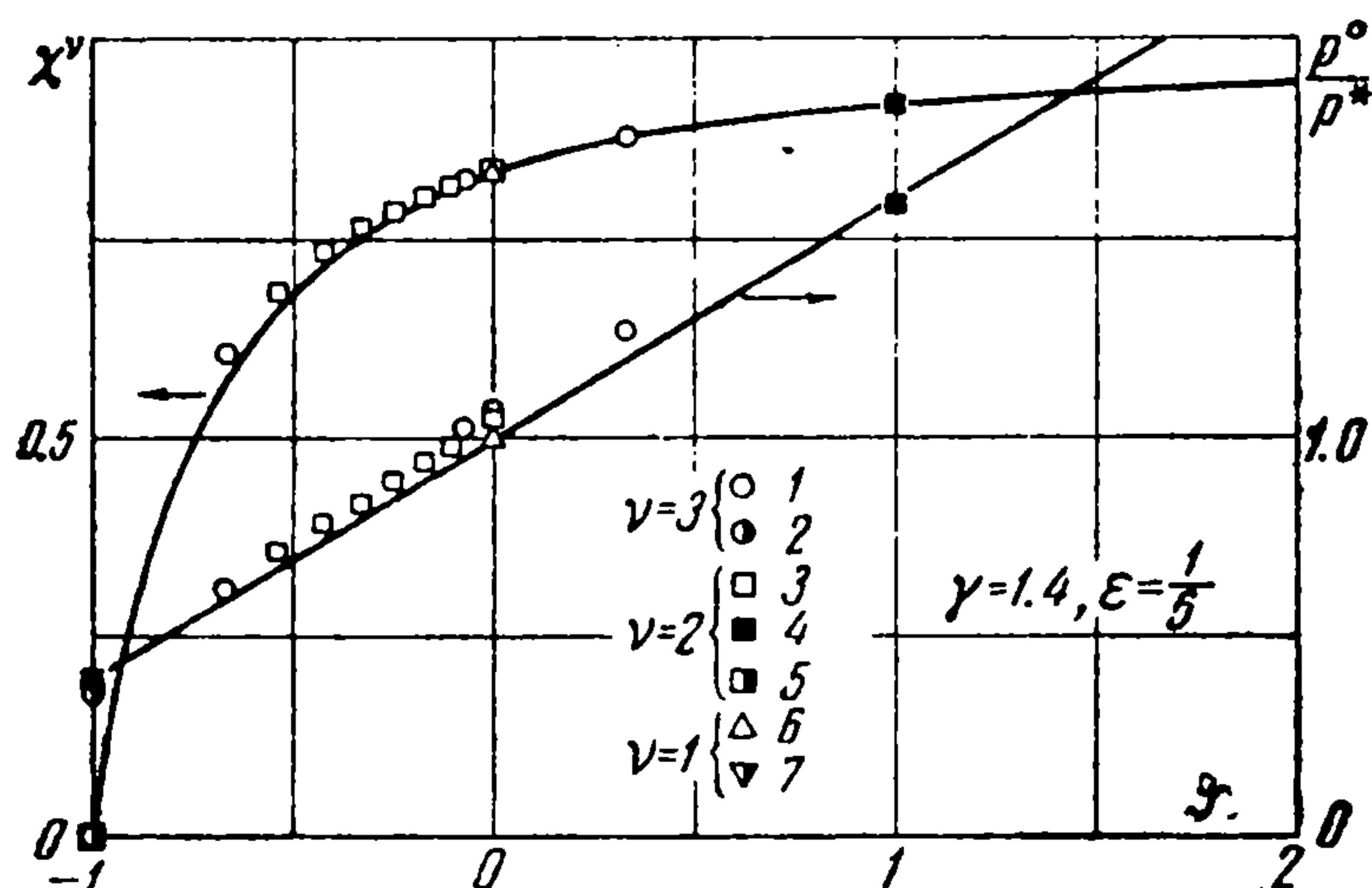
Здесь  $\chi$  — отношение объема, вытесненного поршнем, к объему, ограниченному ударной волной, а  $p^*$  — давление газа непосредственно за ударной волной:

$$\chi = \left( \frac{4\gamma}{(\gamma + 1)^2} + \frac{\vartheta}{2} \right) / \left( \left[ \frac{2}{\gamma + 1} + \frac{\vartheta}{2} \right] \left[ 1 + \frac{\gamma - 1}{1 + \vartheta} \right] \right)$$

$$p^* = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 \dot{R}^2$$

Интересно отметить, что в рассматриваемом приближении значения  $\chi$  и  $p^\circ/p^*$  зависят не от каждого из параметров  $n$  и  $\nu$  в отдельности, а только от их комбинации  $\vartheta$ .

Графики этих зависимостей при  $\gamma = 1.4$ , т. е. при  $\varepsilon = (\gamma - 1)/(\gamma + 1)$  изображены на фиг. 1. На этой фигуре представлены значения  $\chi$  и  $p^\circ/p^*$ , полученные в результате численного интегрирования соответствующих точных уравнений при  $\nu = 2$  (светлые квадратики, 3 [6], и при  $\nu = 3$  (светлые кружки, 1 [7]); при  $\nu = 1$  и  $n = 0$



Фиг. 1

приближенные значения вследствие сделанного выбора главных членов в  $\varepsilon$ -разложениях совпадают с точными значениями (светлые треугольники, 6), при  $\nu = 1$  и  $n \neq 0$  результаты точных расчетов отсутствуют. Наполовину зачерненные значки 2, 5, 7 при  $\vartheta = -1$  соответствуют точному решению задачи о сильном взрыве [8]. Наконец, зачерненные квадратики 4 отвечают значениям, полученным при точном решении задачи о цилиндрическом поршне ( $\nu = 2$ ), расширяющемся по показательному закону<sup>1</sup>. Этот случай можно рассматривать как предельный случай расширения поршня по степенному закону при  $n \rightarrow \infty$ .

Фиг. 1 свидетельствует о том, что во всех перечисленных случаях приближенные решения обладают при  $\varepsilon = 1/6$  весьма удовлетворительной точностью.

2. Поршень, расширяющийся с постоянной скоростью. Если  $R^\circ = Ut$ , то движение будет автомодельным и при  $a_1 \neq 0$ . Подстановка этого выражения для  $R^\circ$  в уравнение (2) при  $E = 0$  приводит к зависимостям

$$R = Dt$$

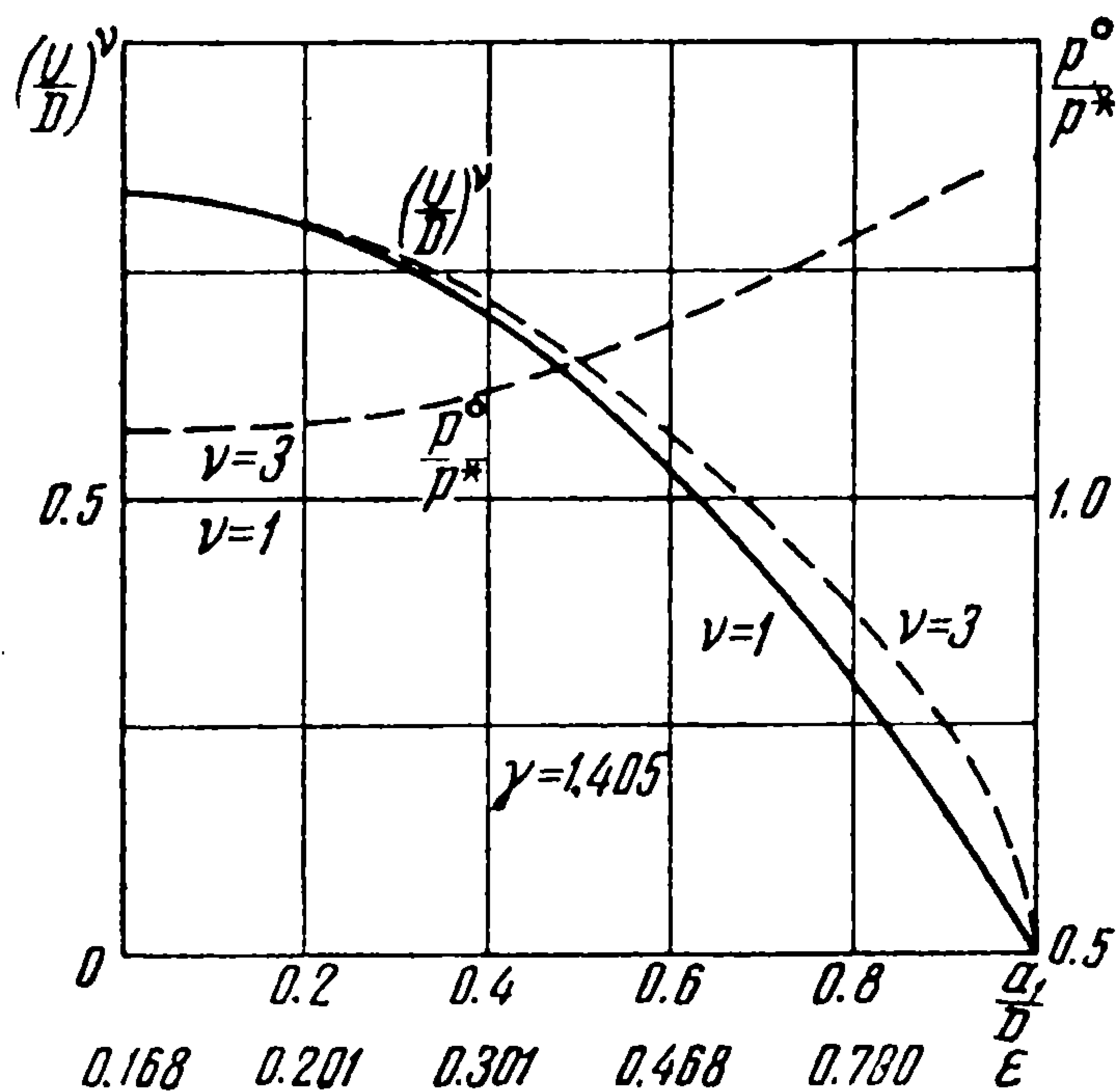
где

$$\left( \frac{U}{D} \right)^\nu = \frac{2}{\gamma + 1} \left( 1 - \frac{a_1^2}{D^2} \right), \quad \frac{p^\circ}{p^*} = 1$$

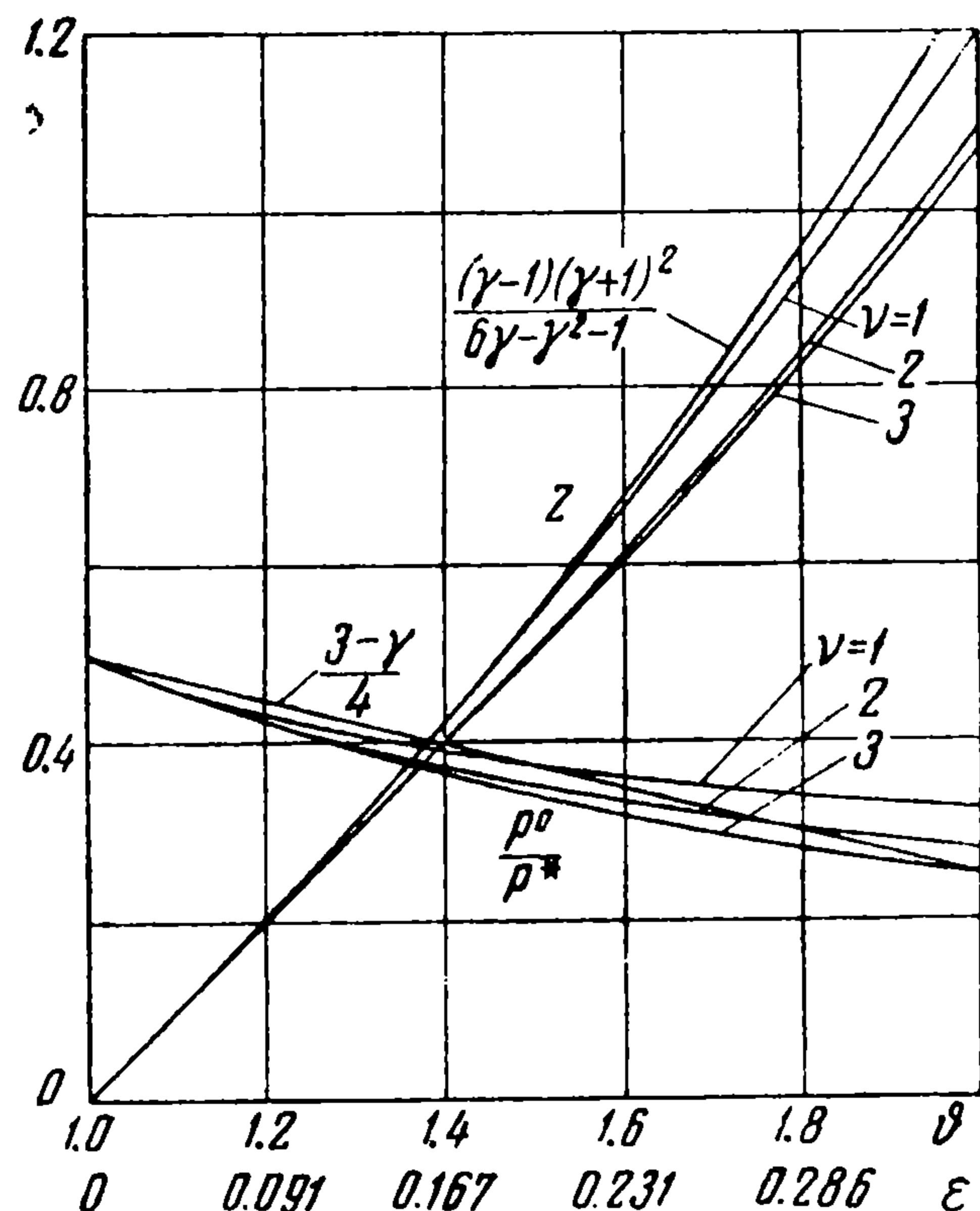
При  $\nu = 1$  эти зависимости являются точными; графики их при  $\gamma = 1.4$  изображены на фиг. 2 сплошными линиями. При  $\nu = 2$  и  $\nu = 3$  эти зависимости справедливы лишь приближенно; зависимости, полученные при

<sup>1</sup> Эти значения получены В. Н. Гусевым [9].

$\nu = 3$  и  $\gamma = 1.405$  численным интегрированием точных уравнений [8,10], нанесены на той же фигуре пунктиром. При  $\nu = 3$  приближенные выражения сохраняют удовлетворительную точность вплоть до значений  $a_1/D \sim 0.4 \div 0.5$ , что соответствует  $\varepsilon \sim 0.3 \div 0.35$  и отношению давлений в ударной волне порядка 5—7.



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Сильный взрыв. Полагая в уравнении (2)  $R^0 = 0$ ,  $p_1 = 0$ ,  $E \neq 0$  и считая  $R(0) = 0$ , найдем

$$R = \left( \frac{E}{\alpha p_1} \right)^{\frac{1}{2+\nu}} t^{\frac{2}{2+\nu}}$$

где

$$\alpha = \frac{4[\pi(\nu-1) + \delta_{1\nu}]}{(2+\nu)^2 \nu} \frac{6\gamma - \gamma^2 - 1}{(\gamma-1)(\gamma+1)^2}, \quad \frac{p^0}{p^*} = \frac{3-\gamma}{4}$$

На фиг. 3 приведены графики найденных приближенных зависимостей величин  $p^0/p^*$  и

$$z = \frac{R^{\nu+2}}{t^2} \frac{\rho_1}{E} \frac{2\omega}{\nu(\nu+2)^2}$$

от  $\gamma$ , а также точные значения этих величин [8] при  $\nu = 1, 2, 3$ .

Из фиг. 3 следует, что при решении задачи о сильном взрыве приближенные выражения для  $R$  и  $p^0$  удовлетворительно согласуются с точными вплоть до значений  $\gamma \sim 1.6 \div 1.8$ , т. е. до значений  $\varepsilon \sim 0.25 \div 0.30$  (заметим, что относительная ошибка в определении  $R$  в  $\nu+2$  раза меньше, чем отнесенная к величине  $z$  разность между точными и приближенными значениями  $z$  на фиг. 3).

Таким образом, приведенные примеры сравнения приближенных и точных решений позволяют считать, что функции  $R(t)$  и  $p^0(t)$ , определенные по уравнению (2), сохраняют удовлетворительную точность вплоть до значений  $\varepsilon \sim 0.20 \div 0.30$ .

Уравнение (2) позволяет рассчитывать любые неавтономные движения, возникающие при взрыве и при расширении поршня (уравнение легко модифицировать для случаев, когда начальный объем поршня отличен от нуля), если только интенсивность возникающих ударных волн достаточно велика, так что  $\varepsilon$  не превосходит 0.2—0.3.

В частности, используя закон плоских сечений, можно путем решения этого уравнения находить форму ударной волны, возникающей при обтекании профиля ( $\nu = 1$ ) и тела вращения ( $\nu = 2$ ) потоком с большой сверхзвуковой скоростью, и распределение давления по поверхности этих тел, в том числе и в тех случаях, когда передний конец тела слегка затуплен [9].

Поступила 18 XI 1959

#### ЛИТЕРАТУРА

1. О х о ц и м с к и й Д. Е., К о н д р а ш е в а И. Л., В л а с о в а З. И., К а з а к о в а Р. К. Расчет сильного взрыва с учетом начального давления. Тр. матем. ин-та АН СССР им. В. И. Стеклова, т. L, М.—Л., 1957.
2. Ч е р н ы й Г. Г. Одномерные неустановившиеся движения совершенного газа с сильными ударными волнами. Докл. АН СССР, т. 107, № 5, 1956.
3. Ч е р н ы й Г. Г. Задача о точечном взрыве. Докл. АН СССР, т. 112, № 4, 1957.
4. Ч е р н ы й Г. Г. Адиабатические движения совершенного газа с ударными волнами большой интенсивности. Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 3.
5. Ч е р н ы й Г. Г. Обтекание тел газом при большой сверхзвуковой скорости. Докл. АН СССР, т. 107, № 2, 1956.
6. Г р о д з о в с к и й Г. Л., К р а ш е н и н и к о в а Н. Л. Автономные движения газа с ударными волнами, распространяющимися по степенному закону по покоящемуся газу ПММ, 1959 т. XXIII, вып. 5.
7. К р а ш е н и н и к о в а Н. Л. О неустановившемся движении газа, вытесняемого поршнем. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, № 8.
8. С е д о в Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Гостехиздат, М., 1957.
9. Ч е р н ы й Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, М., 1959.
10. T a y l o r G. J. The air wave surrounding an expanding sphere. Proc. Roy. Soc., A 186, 100, 1946.