Прикладная математика и механика. Том XXIV, 1960
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧАМ О РАСПРОСТРАНЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН

В. П. Коробейников и Е. В. Рязанов

(Москва)

В работе указаны случаи интегрируемости уравнений, описывающих одномерные движения электропроводного газа с цилиндрической и плоской симметрией, причем более подробно рассматривается случай цилиндрической симметрии. Для стационарных движений с бесконечной проводимостью найдено общее решение уравнений и дано краткое описание соответствующих течений.

Рассмотрены неустановившиеся автомодельные и неавтомодельные движения, сопровождающиеся ударными волнами. Дан метод сопряжения решений [1—3] с покоем через ударную волну. Решены конкретные задачи, которые могут иметь приложение к теории импульсного газового разряда.

§ 1. Будем считать движение одномерным с цилиндрической или плоской симметрией. Все функции, характеризующие движение, будут зависеть от одной геометрической координаты r и времени t.

Для случая движений совершенного газа с конечной проводимостью без учета вязкости и теплопроводности для искомых величин имеем систему:

$$-\rho\frac{dv}{dt} = \frac{\partial p^*}{\partial r} + \frac{2(\nu-1)h_\varphi}{r}, \qquad -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{(\nu-1)v}{r}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dh_z}{dt} = h_z\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{(\nu-1)v}{r}\right) - r^{1-\nu}h_z^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\nu_m r^{\nu-1}\frac{\partial h_z^{1/2}}{\partial r}\right) \tag{1.1}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{dh_\varphi}{dt} = h_\varphi\frac{\partial v}{\partial r} - h_\varphi^{1/2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\nu_m r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}(rh_\varphi^{1/2})\right]$$

$$-\frac{dp}{dt} = \gamma p\left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{(\nu-1)v}{r}\right) - 2(\gamma-1)\nu_m\left\{\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rh_\varphi^{1/2})\right]^2 + \left(\frac{\partial h_z^{1/2}}{\partial r}\right)^2\right\} \tag{1.2}$$

$$\left(p^* = p + h, \quad h = h_z + (\nu-1)h_\varphi, \quad h_z = \frac{H_z^2}{8\pi}, \quad h_\varphi = \frac{H_\varphi^2}{8\pi}\right)$$

Здесь H_z и H_φ — компоненты вектора напряженности магнитного поля, ν_m — магнитная вязкость, $\nu = 2$ в случае цилиндрической симметрии, $\nu = 1$ при движении с плоскими волнами; остальные обозначения общеприняты или очевидны из уравнений. Вектор напряженности магнитного поля $\mathbf{H}$ всегда перпендикулярен вектору скорости. При $\nu = 1$ кольцевая компонента поля должна отсутствовать ($h_\varphi = 0$). Вместо одного из уравнений системы (1.1) — (1.2), например первого уравнения из (1.1), можно взять уравнение, характеризующее закон сохранения энергии [4]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma-1} + h\right) + r^{1-\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^{\nu-1}\left[v\left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{\gamma p}{\gamma-1} + 2h\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \nu_m\left(2(\nu-1)\frac{h_\varphi^{1/2}}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rh_\varphi^{1/2}) + \frac{\partial h_z}{\partial r}\right)\right]\right\} = 0 \tag{1.3}$$

В случае бесконечной проводимости система уравнений (1.1) — (1.2) упрощается, так как $\nu_m = 0$.

Для гомотермических течений, т. е. течений с нулевым градиентом температуры [1], уравнение (1.2) заменится равенством

$$\partial T / \partial r = 0 \quad \text{или} \quad p = \theta(t)\rho \tag{1.4}$$

Для нестационарных движений идеальной среды, сопровождающихся ударными волнами, должны выполняться условия сохранения массы, импульса, непрерывности электрического поля и энергии. При распространении ударной волны в покоящейся среде они имеют вид:

$$\rho_2(v_2 - u) = -\rho_1 u, \qquad v_2\rho_2(v_2 - u) + p_2^* = p_1^* \qquad (u = dr_2/dt) \tag{1.5}$$

$$h_{z2}\rho_1^2 = h_{z1}\rho_2^2, \qquad h_{\varphi 2}\rho_1^2 = h_{\varphi 1}\rho_2^2 \tag{1.6}$$

$$(v_2 - u)\left(\frac{\rho_2 v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\gamma - 1} + h_2\right) + v_2 p_2^* = -u\left(\frac{p_1}{\gamma - 1} + h_1\right) \tag{1.7}$$

где индексом 1 обозначены величины в невозмущенной среде, а индексом 2 — величины за фронтом ударной волны, u — скорость волны, $r_2(t)$ — ее радиус.

§ 2. В стационарном случае система (1.1) — (1.3) при $\nu_m = 0$, $\nu = 2$ полностью интегрируется, имея пять интегралов[1]:

$$p = c_1\rho^\gamma, \quad \rho v r = c_2, \quad h_\varphi = c_3 r^2\rho^2, \quad h_z = c_4\rho^2, \quad \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{2h}{\rho} = c_5 \tag{2.1}$$

где $c_1, \ldots, c_5$ — произвольные постоянные.

Характерной особенностью рассматриваемого течения является наличие в потоке двух предельных линий, на которых

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \infty, \qquad v = a^* = \left(\frac{\gamma p + 2h}{\rho}\right)^{1/2}$$

т. е. скорость газа равна полной скорости звука[2]. Если r_0 и r_1 ($r_0 < r_1$) — радиусы предельных окружностей, то в общем случае течение возможно только в области, заключенной между цилиндрами с радиусами r_0 и r_1, причем либо $v < a^*$, либо $v > a^*$.

Зависимость радиусов r_0, r_1 и величины плотности на предельных линиях от постоянных $c_1, \ldots, c_5$ дается соотношениями

$$(\gamma c_1\rho^{\gamma-2} + 2c_4 + 2c_3 r^2)\rho^3 r^2 = c_2^2, \qquad \frac{\gamma(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} c_1\rho^{\gamma-1} + 3\rho(c_4 + c_3 r^2) = c_5$$

Исследование решения (2.1) показывает, что на дозвуковом (сверхзвуковом) режиме при изменении r от r_0 до r_1 скорость может сначала убывать (возрастать) до некоторого минимума (максимума), а затем возрастать (убывать) до значения a^*.

В более общем случае конечной проводимости интегрирование до конца провести не удается.

---

[1] На возможность интегрирования системы (1.1) — (1.2) в стационарном случае, когда имеется только одна из компонент h_z или h_φ, было указано К. П. Станюковичем [6].

[2] Этот факт был также отмечен в работе [5].

Отметим, что в рассматриваемом случае для системы (1.1)—(1.2) могут быть получены два конечных алгебраических интеграла:

$$\rho v r^{\nu-1} = M_1, \qquad \frac{v^2}{2} + \frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} + (\nu-1) M_2 r^{\nu-1} h_\varphi^{1/3} + M_3 h_z^{1/2} = M_4$$

где $M_1, \ldots, M_4$ — произвольные постоянные. В случае изотермических установившихся течений с бесконечной проводимостью при $\nu = 2$ задача об интегрировании системы уравнений (1.1) и (1.4) сводится к решению одного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, которое легко интегрируется при $h_\varphi = 0$.

В случае $\gamma = 2$, $\nu_m = 0$ решение системы уравнений (1.1) и (1.2) также упрощается, так как она имеет интеграл

$$p = \Phi_1(\xi) h_z$$

где $\Phi_1(\xi)$ — произвольная функция лагранжевой координаты ξ. Легко показать, что если $h_\varphi = 0$, то любое решение уравнений обычной газовой динамики позволяет построить решение системы (1.1) и (1.2), имеющее дополнительно одну произвольную функцию. Для этого достаточно взять

$$v = v_0, \qquad \rho = \rho_0, \qquad p^* = p_0, \qquad p = p^* - h_z, \qquad h_z = \Phi(\xi)\rho^2$$

где v_0, ρ_0, p_0 — решение уравнений обычной гидродинамики, $\Phi(\xi)$ — произвольная функция. Условия на ударных волнах (1.5), (1.7) также превращаются в газодинамические, если всюду ввести p^*.

Таким образом, происходит своеобразное разделение задачи на чисто гидродинамическую и на задачу об определении магнитного давления.

Как пример рассмотрим задачу о сильном взрыве вдоль прямой в идеально проводящем газе в обычной постановке [6]. При сильном взрыве $p_2^* \gg p_1^*$. Пренебрегая p_1^* в (1.5), (1.7), имеем условия на фронте ударной волны [7].

$$v_2 = \frac{2}{3} u, \qquad p_2^* = \frac{2}{3}\rho_1 u^2, \qquad h_{z2} = 9h_{z1}, \qquad \rho_2 = 3\rho_1 \tag{2.2}$$

Считаем $\rho_1 = \text{const}$, $h_{z1} = \text{const}$. Решение для $v(r, t)$, $\rho(r, t)$, $p^*(r, t)$ известно [6, 8]. Кроме того, имеем $h_z / \rho^2 = \Phi(\xi)$. Используя условия на скачке, находим $\Phi(\xi) = h_{z1}/\rho_1^2$. Таким образом,

$$h_z = \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2 h_{z1}, \qquad p = p^* - \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^2 h_{z1}$$

Закон движения ударной волны такой же, как в обычном газодинамическом случае.

§ 3. В работе [9] показано, что решение автомодельных задач для адиабатических движений при $\nu_m = 0$ сводится к интегрированию двух (иногда одного) обыкновенных уравнений.

Ниже приведены новые примеры автомодельных задач. Рассмотрим движение поршня в покоящемся газе, когда скорость движения поршня задается законом

$$U = A_1 t^n$$

начальный радиус поршня равен нулю, начальные значения ρ, p, h_z, h_φ таковы:

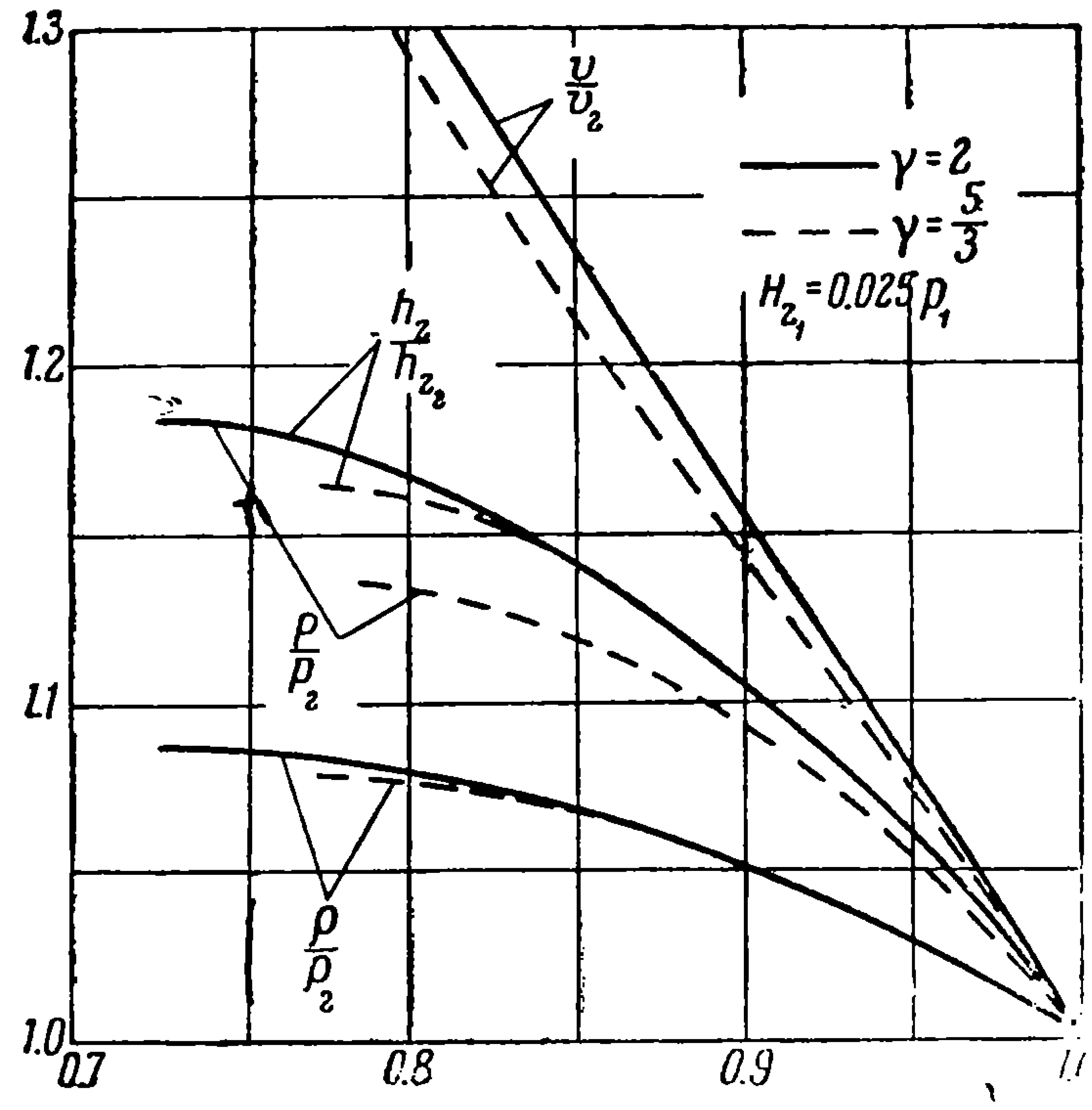
$$\rho_1 = A_2 r^{-\omega}, \qquad p_1 = A_3 r^{-\beta}, \qquad h_{z1} = \varkappa A_3 r^{-\beta}, \qquad h_{\varphi 1} = \frac{(\varkappa+1)\beta}{2-\beta} A_3 r^{-\beta}$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — размерные постоянные, n, ω, β, $\varkappa$ — отвлеченные величины, Из соображений размерности [6] следует, что эта задача при $\nu_m = 0$ будет автомодельной, если постоянные n, ω, β связаны зависимостью

$$\beta = \omega - 2 + 2/(n+1)$$

Применяя метод численного интегрирования системы автомодельных уравнений [9], можно решить задачу о движении цилиндрического поршня для разных значений n и ω. Результаты расчета для случая цилиндрического поршня при $n = 0$, $\omega = 0$, $h_\varphi = 0$, $h_{z1} = 0.025\rho_1 u^2$, $p_1 = 0.1\rho_1 u^2$, $\gamma = 2$, $\gamma = 5/3$ даны на фигуре в виде зависимостей безразмерных величин

$$v/v_2,\ \rho/\rho_2,\ p/p_2,\ h_z/h_{z2} \text{ от } \lambda = r/r_2$$



При этом значения v/v_2 на поршне для $\gamma = 2$ и $\gamma = 5/3$ равны, соответственно, 1.451 и 1.337.

Пусть теперь $\nu_m \neq 0$; примем

$$\nu_m = A_4 \rho^{\alpha_1} p^{\alpha_2} \quad (A_4,\ \alpha_1,\ \alpha_2 = \mathrm{const})$$

Рассматриваемая задача о движении поршня с переменной скоростью будет автомодельной, если размерность A_4 будет зависеть от размерности A_1 и A_2.

Это будет выполнено, если имеет место зависимость

$$3\alpha_1 + \frac{\alpha_2 n + 3\alpha_2 - 1}{n+1} + (\alpha_1 + \alpha_2)(\omega - 3) + 2 = 0$$

Класс автомодельных решений существует также для системы уравнений, описывающих неустановившиеся гомотермические течения проводящего газа. При этом $\theta(t)$ есть степенная функция от t. Как и для адиабатических течений, в рассматриваемом случае при $\nu_m = 0$ существуют интегралы «вмороженности» [9]. Поэтому решение всех автомодельных задач сводится к интегрированию двух обыкновенных уравнений.

§ 4. Другим классом решений уравнений одномерной магнитной гидродинамики, на котором остановимся подробно, является случай решений, для которых скорость v зависит линейно от радиуса.

В случае адиабатических движений газа без ударных волн решение такого типа было получено и исследовано А. Г. Куликовским [2].

При любых γ это решение содержит одну произвольную функцию и для более интересного случая $\nu = 2$ может быть записано в виде

$$\begin{gathered}
v = \xi \frac{d\mu}{dt}, \qquad \rho = P'(\xi)(r\mu)^{-1}, \qquad P_1'(\xi) = \xi P(\xi) \qquad \left(\xi = \frac{r}{\mu}\right) \\
p = [b_1 P(\xi) + b_2]\mu^{-2\gamma}, \qquad h_z = [b_5 P(\xi) + b_6]\mu^{-4} \qquad (4.1) \\
h_\varphi = \frac{1}{r^2}\{b_4 + b_3[\xi^2 P(\xi) - 2P_1(\xi)]\}
\end{gathered}$$

Функция $\mu(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\mu')^2 = f(\mu) = \frac{b_1}{\gamma - 1}\mu^{2(1-\gamma)} - 2b_3 \ln \mu + b_5 \mu^{-2} + b_7$$

Здесь $b_1, \ldots, b_7$ — произвольные постоянные, ξ — лагранжева координата, $P(\xi)$ — произвольная функция, такая, что $P'(\xi) > 0$. При $\gamma = 2$ имеем аналогичное решение, содержащее две произвольные функции [3]:

$$
\begin{gathered}
v = \xi \frac{d\mu}{dt}, \qquad \rho = P'(\xi)(r\mu)^{-1} \\
p = [B_1 P(\xi) + B_2 - \Pi(\xi)]\mu^{-4}, \qquad h_z = \Pi(\xi)\mu^{-4} \\
h_\varphi = \frac{1}{r^2}\{B_4 + B_3[\xi^2 P(\xi) - 2P_1(\xi)]\} \\
(\mu')^2 = f(\mu) = B_1\mu^{-2} - 2B_3 \ln \mu + B_5
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

где $B_1, \ldots, B_5$ — произвольные постоянные, $P(\xi)$ и $\Pi(\xi) > 0$ — произвольные функции. Решение (4.2) получено также и А. Г. Куликовским[1].

Решения, аналогичные (4.1) и (4.2), для уравнений, описывающих движения с учетом сил тяготения, рассмотрены в [3].

Решения вида (4.1) и (4.2), содержащие произвольные функции, можно сопрягать через ударную волну с тривиальным решением — покоем — и описывать течения газа, сопровождающиеся ударными волнами. В покоящейся среде перед фронтом ударной волны $v_1 = 0$ и, как это следует из системы (1.1) — (1.2), плотность ρ_1 может быть любой функцией от r, а магнитное и гидростатическое давления связаны уравнением равновесия

$$
\frac{\partial}{\partial r}(p_1 + h_1) + \frac{2h_{\varphi 1}}{r} = 0 \tag{4.3}
$$

Из (4.3) следует: если $h_\varphi = 0$ или $h_{\varphi 1} = r^{-2}\mathrm{const}$, то $p_1 + h_{z1} = \mathrm{const}$.

В случае газа с $\gamma = 2\,(h_\varphi = 0)$ задача о сопряжении решения с покоем через ударную волну (будем ее в дальнейшем называть задачей сопряжения) сводится к газодинамической.

Задача же сопряжения газодинамического решения вида (4.1) при любых γ была решена в работах [10—12]. В работе И. С. Шикина [12] были рассмотрены также детонационные волны. Как уже отмечалось, после решения газодинамической задачи условие для скачка поля (1.6) может быть удовлетворено выбором второй произвольной функции, входящей в решение. При этом выбор одной из функций p_1 или h_{z1} остается произвольным. Используя результаты [12], аналогичным способом (при $\gamma = 2$) получаем решение задачи о сопряжении решения (4.2) с покоем через детонационную волну. Учитывая изложенное выше, выписывать решение задачи сопряжения при $\gamma = 2$ для ударных волн произвольной интенсивности не будем. Задача сопряжения для (4.1) может быть легко решена в предельном случае сильных в газодинамическом смысле ударных волн.

Предположим, что $\rho_1 u^2 \gg \gamma p_1 + 2h_1$. Тогда условия на ударной волне примут вид [7]:

$$
\begin{gathered}
\rho_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\rho_1, \qquad h_{z2} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^2 h_{z1} \\
h_{\varphi 2} = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right)^2 h_{\varphi 1}, \qquad p_2 = \frac{2}{\gamma+1}\rho_1 u^2, \qquad v_2 = \frac{2}{\gamma+1}u
\end{gathered}
\tag{4.4}
$$

[1] О некоторых новых точных решениях уравнений магнитной гидродинамики. Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-матем. наук, М., 1959.

В рассматриваемой задаче можно использовать произвольную функцию $P(\xi)$, входящую в решение (4.1), а также произвол в задании $\rho_1(r)$, $h_{z1}(r)$, $h_{\varphi 1}(r)$ и скорости ударной волны $u(r_2)$. При помощи выбора этих пяти функций можно удовлетворить всем условиям на ударной волне (4.4).

Удовлетворяя условиям на скачке, находим, что произвольная функция $P(\xi)$ должна иметь вид:

$$P(\xi) = \left[b_9 + \frac{\alpha b_2}{b_1}\int \exp\left(-\alpha\int\frac{d\xi}{f(\xi)\,\xi^5}\right)\frac{d\xi}{f(\xi)\,\xi^5}\right]\exp\left(\alpha\int\frac{d\xi}{f(\xi)\,\xi^5}\right) \qquad (4.5)$$

где

$$f(\xi) = \frac{\alpha}{2}\xi^{-4} - \frac{4}{\gamma-1}b_3\ln\frac{\xi}{b_8} + b_5\left(\frac{\xi}{b_8}\right)^{-\frac{4}{\gamma-1}} + b_7, \quad \alpha = \frac{2b_1b_8^4}{\gamma-1} \quad (b_9 = \mathrm{const})$$

Закон движения ударной волны дается зависимостью

$$r_2 = b_8\mu^{1/2(\gamma+1)} \qquad (b_8 = \mathrm{const})$$

При этом

$$\rho_1(r) = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\frac{1}{r}\left(\frac{r}{b_8}\right)^{-\frac{2}{\gamma+1}}\frac{dP}{dx}, \quad h_{z1}(r) = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2[b_5P(\xi) + b_3]\left(\frac{r}{b_8}\right)^{-\frac{8}{\gamma+1}}$$

$$h_{\varphi 1}(r) = \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^2\left\{\frac{b_4}{r^2} + b_3\left[\left(\frac{r}{b_8}\right)^{-\frac{4}{\gamma+1}}P(x) - 2r^{-2}P_1(x)\right]\right\}, \qquad x = b_8^{\frac{2}{\gamma+1}}r^{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}$$

где $P(x)$ задана соотношением (4.5).

Для того чтобы было выполнено уравнение равновесия, начальное давление p_1 должно зависеть от r следующим образом:

$$p_1(r) = b_{10} - h_{z1}(r) - h_{\varphi 1}(r) - 2\int\frac{h_{\varphi 1}(r)}{r}\,dr \quad (b_{10} = \mathrm{const})$$

Имеющийся здесь набор постоянных можно использовать для точного или приближенного удовлетворения другим условиям конкретных задач.

Задача сопряжения может быть решена также для любых γ и ударных волн произвольной интенсивности с переменными h_{z1}, p_1, ρ_1 при $h_\varphi = 0$. Ее решение можно получить, например, способом сопряжения [12].

Рассмотрим пример на приложение решения (4.2) к задаче о движении газа при сжатии его поршнем, движущимся со скоростью

$$U = R\,\frac{\mu'}{\mu} = \pm\frac{R}{\mu}\sqrt{f(\mu)}, \qquad (R(t) \text{ — радиус поршня})$$

знак минус соответствует движению к центру (оси симметрии), а знак плюс от центра (оси). Для простоты будем считать ударную волну сильной. Пусть начальные значения ρ_1, p_1, h_{z1} таковы:

$$\rho_1 = A_0r^{2/3}, \qquad p_1 = L - h_{z1}, \qquad h_{z1} = L_1r^{-8/3} + L_2 \qquad (A_0, L, L_1, L_2 = \mathrm{const})$$

Используя (4.2) и (2.2), находим, что течение газа за ударной волной определяется формулами

$$v = \pm\frac{B_1^{1/2}r}{B_7 \pm 2B_1^{1/2}t}, \qquad \rho = 3A_0B_6^8\xi^6\mu^{-2}, \qquad p = 3B_6^8\left(\frac{1}{8}A_0B_1 - 3B_6^4L_2\right)\xi^8\mu^{-4}$$

$$r_2 = B_6^{-3/2}\mu^{3/2}, \qquad h_z = 9B_6^4(L_1 + B_6^8L_2\xi^8)\mu^{-4}, \qquad \mu^2 = B_7 \pm 2B_1^{1/2}t \qquad (4.6)$$

Здесь B_7 — произвольная постоянная. Между постоянными A_0, B_1, B_6, L_2 имеется зависимость

$$8L_2 + A_0B_1B_6^{-4} = 0$$

Для кольцевого тока, создающего магнитное поле h_z, имеем

$$j_\varphi = \frac{9A_0B_1B_6^8}{\sqrt{8\pi h_z}} cr^7\mu^{-12} \qquad (c \text{ — скорость света})$$

Это следует из формулы

$$\frac{4\pi}{c} j_\varphi = -\frac{\partial H_z}{\partial r}$$

Закон движения поршня дается зависимостью

$$R = R_0\left(1 \pm 2\frac{B_1^{1/2}}{B_7}t\right)^{1/2}$$

где R_0 — радиус поршня в начальный момент $t = 0$.

Для сходящегося поршня имеем начальное значение скорости

$$U_0 = -\frac{B_1^{1/2}}{B_7}R_0$$

Такого рода движение, например, может быть создано приложением к газу внешнего магнитного поля. Если вне поршня пустота, то полное давление на поршне должно быть компенсировано приложением внешнего магнитного поля h_e, но так, чтобы выполнялось соотношение $p^*(R, t) = H_e^2/8\pi = h_e$. Естественно, что решение (4.6) описывает течение для тех значений r, где $p_1 > 0$, $h_{z_1} > 0$.

§ 5. В случае гомотермических течений система уравнений (1.1), (1.4) при $\nu_m = 0$ также имеет точные решения, где $v(r, t)$ имеет такой же вид, как в (4.1). Эти решения содержат или произвольную функцию от ξ, или произвольную функцию от времени [1].

Для гомотермических течений при $\nu_m \neq 0$ можно считать $\nu_m = \nu_m(t)$. Тогда при помощи выбора произвольной функции $P(\xi)$, входящей в решение уравнений идеальной среды [1], можно найти частные решения полной системы (1.1), (1.4), когда отсутствует h_z или h_φ. Эти решения будут содержать некоторое количество произвольных постоянных.

Для гомотермических течений с линейной зависимостью скорости от радиуса (при $\nu_m = 0$) можно также рассмотреть задачу о сопряжении точных решений с покоем через ударную волну. Случай, когда решение содержит произвольную функцию времени, был рассмотрен ранее [1].

Возьмем частное решение системы (1.1), (1.4) вида [1]

$$v = \frac{r}{\mu(t)}\frac{d\mu}{dt}, \quad \rho = \frac{P'(\xi)}{r\mu}, \quad \theta(\mu) = \delta_1\mu^{-2}, \quad h_\varphi = \frac{\delta_4}{r^2} \tag{5.1}$$

$$h_z = \left[\delta_2 - \delta_3P(\xi) - \delta_1\frac{P'(\xi)}{\xi}\right]\mu^{-4}, \quad p = \theta(\mu)\rho, \quad f(\mu) = (\mu')^2 = \delta_5 - \delta_3\mu^{-2}$$

где $\delta_1, \ldots, \delta_5$ — произвольные постоянные. Будем считать $\delta_4 = 0$. Используя соотношения

$$u - v_2 = u\left(1 - \frac{r_2}{\mu}\frac{d\mu}{dr_2}\right), \qquad \frac{d\xi_2}{d\mu} = \frac{1}{\mu}\left[\frac{dr_2}{d\mu} - \frac{r_2}{\mu}\right]$$

из решения (5.1) и соотношений (1.5), (1.6) имеем

$$P(r_2) = \int \rho_1(r_2)r_2dr_2 \tag{5.2}$$

$$\int \rho_1(r_2)r_2dr_2 = \frac{\mu}{\sigma(\mu)}\left\{k_1 + \frac{\delta_2}{\delta_3}\frac{\sigma(\mu)}{\mu} - \frac{p_1^*}{2\delta_5}\mu\sigma(\mu) - \frac{p_1^*}{2\delta_5}\left(\frac{\delta_3}{\delta_5}\right)\ln[\sigma(\mu) + \mu]\right\}$$

$$\sigma(\mu) = \left(\mu^2 - \frac{\delta_3}{\delta_5}\right)^{1/2} \qquad (k_1 = \text{const}) \tag{5.3}$$

Соотношение (5.3) дает закон движения ударной волны.

Удовлетворяя условию (1.6), для скачка магнитного поля найдем

$$h_{z_1}(r) = h_{z_1}(r_2) = \mu^{-4}\left[(\delta_2 - \delta_3 P(r_2))\left(1 - \frac{r_2}{\mu}\frac{d\mu}{dr_2}\right) - \delta_1\mu^2\rho_1(r_2)\right]\left(1 - \frac{r_2}{\mu}\frac{d\mu}{dr_2}\right) \tag{5.4}$$

где $\mu(r_2)$ — известная функция из (5.3).

Зависимость $P(r_2)$ находится из (5.2), если $\rho_1(r)$ считать заданной функцией. Для полного же решения задачи необходимо знать $P(\xi)$.

Используя (5.3) и вид функции $P(r_2)$, можем найти зависимость $P(\xi)$. Она дается соотношениями

$$\begin{gathered}P(\xi) = P[r_2(\xi)]\\ \frac{\xi\sigma(r_2,\xi)}{r_2}\int\rho_1(r_2)\,r_2dr_2 = k_1 + \frac{\delta_2}{\delta_3}\frac{\sigma(r_2,\xi)}{r_2}\xi - \\ - \frac{p_1^* r_2}{2\delta_5\xi}\sigma(r_2,\xi) - \frac{p_1^*}{2\delta_5}\left(\frac{\delta_3}{\delta_5}\right)\ln\left[\sigma(r_2,\xi) + \frac{r_2}{\xi}\right]\\ \sigma(r_2,\xi) = \left(r_2^2\xi^{-2} - \frac{\delta_3}{\delta_5}\right)^{1/2}\end{gathered} \tag{5.5}$$

Рассмотрим далее один частный случай. Пусть $p^*_1 = 0$ (сильная волна), $\rho_1 = \mathrm{const}$. В этом случае для функции $P(\xi)$ и закона движения ударной волны имеем соотношения

$$2[P(\xi) - B] = \rho_1\xi^2\frac{\delta_3}{\delta_5}\left[P(\xi) - \frac{\delta_2}{\delta_3}\right]^2\left[\left(P(\xi) - \frac{\delta_2}{\delta_3}\right)^2 - k_1^2\right]^{-1}$$

$$\mu^2 = \frac{\delta_3}{\delta_5}\left(\frac{\rho_1 r_2^2}{2} + B - \frac{\delta_2}{\delta_3}\right)^2\left[\left(\frac{\rho_1 r_2^2}{2} + B - \frac{\delta_2}{\delta_3}\right)^2 - k_1^2\right]^{-1}$$

Начальное магнитное поле задается формулой

$$\begin{aligned}h_{z1} &= \left(\frac{\delta_5}{\delta_3}\right)^2\left(\frac{\chi - k_1^2}{\chi}\right)^2\left[\delta_2 - \delta_3\left(\frac{\rho_1 r^2}{2} + B\right)\right]\left[1 + \frac{k_1^2\rho_1 r^2}{\chi^{1/2}(\chi - k_1^2)}\right]^2 - \\ &- \frac{\delta_5\delta_1}{\delta_3}\rho_1\frac{\chi - k_1^2}{\chi}\left[1 + \frac{k_1^2\rho_1 r^2}{\chi^{1/2}(\chi - k_1^2)}\right]\end{aligned}$$

$$\chi = \chi(r) = \left(\frac{\rho_1 r^2}{2} + B - \frac{\delta_2}{\delta_3}\right)^2 \qquad (B = \mathrm{const})$$

Из (5.1) найдем зависимость $\mu(t)$:

$$\mu(t) = \sqrt{\delta_5(t - t_0)^2 + \frac{\delta_3}{\delta_5}} \qquad (t_0 = \mathrm{const}) \tag{5.6}$$

Решение (5.1) — (5.6) может быть использовано при исследовании конкретных задач и, в частности, может иметь приложение к задаче о сжатии газа сходящимся или расходящимся поршнем, причем закон движения поршня дается зависимостью

$$R = A\sqrt{\delta_5(t - t_0)^2 + \frac{\delta_3}{\delta_5}} \qquad (A = \mathrm{const})$$

Учитывая замечание, сделанное в § 4, можно сказать, что задача о сжатии газа сходящимся поршнем эквивалентна задаче об импульсном газовом разряде при пропускании тока через газовый цилиндр в осевом направлении. Магнитное поле тока, протекающего по поверхности цилиндра, будет играть роль поршня, сжимающего газ.

§ 6. Рассмотрим пример точного решения задачи об импульсном газовом разряде. Пусть в начальный момент времени $t = 0$ имеется цилиндрический столб газа, нагретого до температур, при которых проводимость газа можно считать бесконечной. В газ «вморожено» магнитное поле с вектором напряженности $\mathbf{H}$, параллельным оси цилиндра. Начальная плотность газа постоянна и равна ρ_1, полное давление в газе $p_1^* = \mathrm{const}$.

Начальная напряженность магнитного поля переменна по радиусу, ее зависимость от координаты r дается формулой

$$h_{z_1} = \left[\beta_2^2\left(1 - \frac{\beta_3^2\rho_1 r^2\varphi(r)}{\beta_2^2 - p_1^*\varphi^2(r)}\right) - \beta_4^2\rho_1\varphi(r)\right]\left(1 - \frac{\beta_3^2\rho_1 r^2\varphi(r)}{\beta_2^2 - p_1^*\varphi^2(r)}\right)[\varphi(r)]^{-2} \qquad (6.1)$$

где $\varphi(r)$ определяется из уравнения

$$p_1^*\varphi^2 - 2\beta_3^2\left(\beta_5 - \frac{1}{2}\rho_1 r^2\right)\varphi + \beta_2^2 = 0 \qquad (\beta_1, \ldots, \beta_5 = \mathrm{const},\ \beta_2 > 0,\ \beta_3 > 0)$$

Выбор зависимости h_{z_1} от r в виде (6.1) обусловлен использованием в дальнейшем решения (5.1) — (5.6) при $\delta_3 = 0$. Формула (6.1) по существу есть следствие соотношения (5.4) и переобозначения произвольных постоянных.

Пусть начальный радиус газового цилиндра — R_0. В момент $t = 0$ через столб газа в осевом направлении начинает пропускаться ток, меняющийся со временем так, что для полного тока I имеет место формула

$$I = \frac{\sqrt{2\pi}\,\beta_1\beta_2}{\beta_0 - \beta_3 t}c \qquad (\beta_0,\ \beta_1 = \mathrm{const} > 0)$$

При $t > 0$ вследствие пинч-эффекта начинается сжатие плазменного шнура, вне которого $p = 0$. В направлении к центру газа будет распространяться ударная волна. Требуется определить движение газа между ударной волной и внешним радиусом столба газа.

В постановке, отличной от изложенной выше (в смысле задания начальных условий), задача о сжатии газового цилиндра током рассматривалась в ряде работ (см., например, [13–14]).

Будем рассматривать задачу в приближении магнитной гидродинамики и считать, что градиент температуры в области за ударной волной равен нулю. Величины p, ρ, h_z и v за фронтом волны связаны уравнениями магнитной гидродинамики (1.1), (1.4), а на самом фронте ударной волны должны быть выполнены законы (1.5), (1.6), которые являются граничными условиями для искомых функций.

На внешней поверхности цилиндра должно выполняться также кинематическое условие $v(R, t) = dR\,/\,dt$, где $R(t)$ дает зависимость радиуса цилиндра от времени. Решение, удовлетворяющее системе (1.1), (1.4) и перечисленным выше начальным и граничным условиям, имеет вид:

$$v = -\beta_3\xi \quad \left(\xi = \frac{r}{\beta_0 - \beta_3 t}\right), \qquad p = \theta(t)\rho, \qquad \theta(t) = \frac{\beta_4^2}{(\beta_0 - \beta_3 t)^2}$$

$$\rho = \frac{F(\xi)}{(\beta_0 - \beta_3 t)^2}, \qquad h_z = (\beta_2^2 - \beta_4^2 F(\xi))(\beta_0 - \beta_3 t)^{-4} \qquad (6.2)$$

$$F(\xi) = \frac{\beta_2^2(\rho_1\xi^2 + p_1^*\beta_3^{-2}) - p_1^*[2\beta_5 y - (\beta_2\beta_3^{-1})^2]}{2\beta_3^2(\beta_5 - p_1^*\beta_3^{-2} - \rho_1\xi^2 y)(\xi^2 + p_1^*\beta_3^{-2}\rho_1^{-1})}$$

где $y(\xi)$ находится из уравнения

$$y^2(\rho_1\xi^2 + \beta_3^{-2}p_1^*) - 2\beta_5 y + (\beta_2\beta_3^{-1})^2 = 0$$

Для радиуса цилиндра R и радиуса ударной волны r_2 имеем

$$R(t) = \beta_1(\beta_0 - \beta_3 t), \qquad R_0 = \beta_1\beta_0$$

$$r_2(t) = 2\beta_5\rho_1^{-1} - \beta_3^{-2}\rho_1^{-1}[\beta_2^2 + p_1^*(\beta_0 - \beta_3 t)^4](\beta_0 - \beta_3 t)^{-2}$$

Из (6.2) видно, что температура в области движения газа растет пропорционально $(\beta_0 - \beta_3 t)^{-2}$. Если считать, что $p_2^* \gg p_1^*$, то величиной p_1^* в (1.5) можно пренебречь. Формулы, дающие решение, при этом упрощаются.

Решение (6.2) получено описанным в § 5 способом из (5.1) при $\delta_3 = 0$. Из (6.2) следует, что полное давление на внешней границе цилиндра p_1^* уравновешено магнитным давлением вне цилиндра

$$h_\varphi = \frac{I^2}{2\pi c^2 R^2}$$

возникающим при прохождении тока I по поверхности цилиндра.

Так как в области течения принято $\partial T / \partial r = 0$, то дифференциальное уравнение (1.3), выражающее закон сохранения энергии в частице, не выполняется. Однако можно потребовать удовлетворения интегрального закона сохранения энергии. Если пренебречь начальной энергией невозмущенного газа, что соответствует случаю сильной ударной волны, то баланс энергии при движении газа дается соотношением

$$2\pi \int_{r_2}^{R} \left(\frac{\rho v^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} + h_z \right) r dr + Q(t) = 2\pi \int_0^t p^*(R, t) R \frac{dR}{dt} dt \tag{6.3}$$

В (6.3) под $Q(t)$ следует понимать ту часть энергии, которая подводится к газу, например, за счет химических или ядерных превращений и отводится с внешней поверхности за счет излучения. В правой части (6.3) стоит работа сил полного давления на границе цилиндра за время t. Пусть для простоты $\gamma = 2$. Тогда, используя (6.2) и (6.3), для величины $Q(t)$ находим

$$\frac{Q}{2\pi\beta_2^2} = \left(\frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^2 + \frac{\beta_5}{2\rho_1 y_0^2} - \frac{\beta_2^2}{6\rho_1\beta_3^2 y_0^3} - \frac{2\beta_1^2}{\beta_4^2}\theta - \frac{\beta_5}{\rho_1\beta_4^4}\left(4\frac{\beta_5}{\rho_1} - \frac{1}{2}\right)\theta^2 +$$
$$+ \frac{\beta_2^2}{\beta_3^2\beta_4^6\rho_1}\left(\frac{1}{6} - 4\frac{\beta_5}{\rho_1}\right)\theta^3 + \frac{\beta_2^4}{\beta_3^4\beta_4^8\rho_1^2}\theta^4$$

Заметим, что решение уравнений магнитогидродинамики при $\gamma=2$ в приложении к другим задачам рассматривалось и другими авторами (см., напр., [15]).

Поступила 24 VIII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Коробейников В. П. и Рязанов Е. В. О решениях уравнений магнитной газодинамики при нулевом градиенте температуры. Докл. АН СССР, т. 124, № 1, 1959.
2. Куликовский А. Г. К вопросу о пульсации плазменного шнура. Докл. АН СССР, т. 114, № 5, 1957.
3. Рязанов Е. В. О решении уравнений магнитной гидродинамики, описывающих одномерные осесимметрические движения гравитирующего газа. ПММ, т. XXIII, вып. 1, 1959.
4. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М., 1958.
5. Станюкович К. П. Цилиндрические и плоские магнитогидродинамические волны. ЖЭТФ, т. 36, вып. 6, 1959.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 4-е изд., М., 1957.
7. Whitham G. B. On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area or flow. J. Fluid Mech., 4. pp. 337—360, 1958.
8. Коробейников В. П. и Рязанов Е. В. Представление решения задачи о точечном взрыве в газе в особых случаях. ПММ, т. XXIII, вып. 2, 1959.
9. Коробейников В. П. Одномерные автомодельные движения проводящего газа в магнитном поле. Докл. АН СССР, т. 121, № 4, 1958.
10. Коробейников В. П. и Рязанов Е. В. Построение точных разрывных решений уравнений одномерной газодинамики и их приложения. ПММ, т. XXII, вып. 2, 1958.
11. Рязанов Е. В. Построение точных решений уравнений одномерной газодинамики при наличии разрывов. ПММ, т. XXII, вып. 5, 1958.
12. Шикин И. С. О точных решениях уравнений одномерной газодинамики с ударными и детонационными волнами. Докл. АН СССР, т. 122, № 1, 1958.
13. Леонтович М. А., Осовец С. М. О механизме сжатия тока при быстром и мощном газовом разряде. Атомная энергия, № 3, стр. 81, 1956.
14. Любимов Г. А. О сжатии газового цилиндра током. Вест. МГУ, серия математики, механики, астрономии, физики, химии, вып. 6, 1958.
15. Голицын Г. С. Некоторые вопросы динамики и нагрева проводящей среды в магнитном поле. ЖЭТФ, 1959, т. 37, вып. 4.