

## ГИПЕРЗВУКОВОЕ ОБТЕКАНИЕ ТЕЛ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

М. Д. Ладыженский

(Москва)

Рассматривается обтекание гиперзвуковым потоком тел, внутри которых возбуждается магнитное поле. Поле действует на газ, который становится проводником электрического тока вследствие термической ионизации, наступающей при переходе через сильную ударную волну перед телом. В большинстве статей, появившихся в последнее время (библиографию можно найти, например, в статье, [1]), изучается поведение течения проводящей жидкости в окрестности передней критической точки затупленного тела; ниже исследуется влияние сильного наложенного магнитного поля на общую картину течения. Подробно рассмотрен случай обтекания тел с прямолинейными образующими — клиньев и конусов, — когда вектор напряженности магнитного поля направлен перпендикулярно поверхности тела. Метод решения основан на предположении об узости возмущенной зоны между телом и ударной волной [2], [5]. Найдены силы, действующие на обтекаемое тело. Как следует из решения, при достаточно сильных полях сила магнитного сопротивления имеет тот же порядок величины, что и газодинамическая сила, несмотря на узость зоны возмущенного потока, на который действует магнитное поле.

Показано, что при определенных условиях может происходить отрыв потока от обтекаемой стенки. Определяется положение точки магнитного отрыва на поверхности тела. С увеличением напряженности поля эта точка смещается вверх по потоку, поэтому, используя сильные поля, представляется возможным создавать срывные зоны около обтекаемых тел, что приведет к увеличению испытываемого телом сопротивления и, как можно ожидать, к уменьшению теплопередачи к телу.

§ 1. Пусть тело, внутри которого заключены источники магнитного поля, обтекается установившимся потоком сжимаемого невязкого газа. Магнито-газодинамические эффекты проявляются при очень больших скоростях невозмущенного потока, когда существенна ионизация за интенсивной ударной волной. Поэтому число Маха невозмущенного потока принимается равным бесконечности. Электропроводность в невозмущенном потоке ничтожно мала, и ею можно пренебречь. За ударной волной в области течения проводящей жидкости справедливы уравнения магнитной гидродинамики, которые записываются для случаев плоского и осесимметрического потоков, для которых вектор электрического поля тождественно равен нулю [3]. Это приводит к упрощению в записи закона Ома и, что существенно, сохраняет справедливость интеграла Бернулли вдоль линии тока, так как вектор Умова — Пойнтинга переноса магнитной энергии оказывается тождественно равным нулю.

Как выясняется из рассмотрения ударной волны, постоянная Бернулли, несмотря на наличие магнитного поля, сохраняется и при переходе через ударную волну, имея во всем течении, таким образом, значение, равное значению в невозмущенном потоке. Другими словами, для

плоского и осесимметрического течений уравнение Бернулли сохраняет обычный вид, присущий стационарным течениям идеального газа. С учетом сделанных замечаний уравнения магнитной гидродинамики в безразмерной форме в области за ударной волной принимают вид:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p &= \frac{q}{\rho}[(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) \times \mathbf{h}], & q &= \frac{\sigma LH^2}{c^2 R_\infty V_\infty} \\
 \operatorname{div} \rho \mathbf{v} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{h} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{h} &= R^* [\mathbf{v} \times \mathbf{h}] \\
 R^* &= \frac{4\pi\sigma V_\infty L}{c^2}, & \frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

Здесь  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\rho$ ,  $p$  — соответственно безразмерные вектор скорости, вектор магнитного поля, плотность и давление,  $\kappa$  — отношение удельных теплоемкостей,  $c$  — скорость света в вакууме,  $\sigma$  — удельная электропроводность, в общем случае зависящая от температуры и давления. В качестве характерных величин взяты  $V_\infty$ ,  $H^*$ ,  $R_\infty$ ,  $R_\infty V_\infty^2$  — соответственно скорость невозмущенного потока, напряженность в какой-либо точке поля, плотность и удвоенный скоростной напор в невозмущенном потоке. Пространственные координаты отнесены к характерной длине  $L$ .

В уравнения (1.1) входят две безразмерные величины: магнитное число Рейнольдса  $R^*$  и параметр  $q$ , по порядку величины равный отношению магнитных сил к гидродинамическим. Из оценок [4] следует, что  $R^*$  даже при очень больших скоростях полета (6—8 км/сек) принимает значения, меньшие единицы. Поэтому ниже рассматривается режим течения, когда магнитное число Рейнольдса по порядку величины во всяком случае не превышает единицу. Что касается параметра  $q$ , то при таких же скоростях, при значениях напряженности магнитного поля в несколько килогаусс и высоте полета свыше 40—50 км, как показывают расчеты,  $q$  достигает и может превышать значение, равное десяти.

Предлагаемое решение строится для случая сильного влияния магнитного поля на течение, когда  $q$  — большое число (в реальных случаях порядка десяти). Постановка задачи обтекания при отсутствии ударных волн изложена достаточно подробно [3].

Уравнение (1.1) следует решать совместно с уравнениями для магнитного поля, справедливыми в невозмущенном потоке и внутри тела:

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{h} = 0
 \tag{1.2}$$

с учетом наличия особенностей для магнитного поля<sup>1</sup> (токи, создающие поле) внутри тела, граничных условия на теле (условия непротекания и неразрывности нормальных и касательных компонент поля), а также с учетом условий на ударной волне и на бесконечности. Ударную волну следует рассмотреть несколько подробнее. Строго говоря, наличие ударной волны, не вызывающее сомнения при отсутствии магнитного поля, требует в данном случае доказательства.

Действительно, проводимость потока за ударной волной конечна, происходит диссипация магнитной энергии, и поэтому магнито-гидродинамическая ударная волна должна иметь конечную толщину ввиду наличия диссипативных факторов. Однако анализ структуры магнито-ги-

гидродинамической ударной волны, в которой поле взаимодействует с потоком только после того, как газ оказывается достаточно разогретым и поэтому ионизированным, показывает следующее. Сначала на длине порядка  $1/R^\circ$  ( $R^\circ$  — обычное число Рейнольдса) изменяются газодинамические величины, магнитное поле при этом остается непрерывным. Так как вязкими членами в уравнениях мы пренебрегли, то естественно считать, что этот скачок происходит мгновенно. Этот скачок газодинамических величин подчиняется известным соотношениям для ударной волны в отсутствие магнитного поля. После этого на расстояниях порядка  $1/R^*$  проявляется взаимодействие потока с магнитным полем согласно законам магнито-газодинамической ударной волны. Эта ситуация аналогична встречающейся при рассмотрении ударных волн с медленно протекающими релаксационными процессами (возбуждением колебательных степеней свободы молекул, диссоциацией и т. д.).

При  $R^* \sim 1$  толщина магнито-газодинамической волны оказывается сравнимой по порядку величины с характерным размером тела, поэтому понятие этой волны теряет смысл. Имеет смысл лишь передняя граница этой ударной волны — обычная ударная волна, которая отделяет возмущенный поток от невозмущенного.

Отсюда следует сделанное выше утверждение о сохранении постоянной Бернулли при переходе через ударную волну, так как этот переход, несмотря на наличие поля, происходит по законам, обычным для гидродинамики идеального газа в отсутствие поля.

Положение ударной волны, отличное от занимаемого ею в отсутствие поля, должно быть найдено из решения задачи. Условия за фронтом ударной волны (индексы 1 и 2 относятся соответственно к состоянию перед и за ударной волной) имеют вид в тех же, что и в (1.1), безразмерных переменных с учетом бесконечно большого значения числа Маха в невозмущенном потоке:

$$\begin{aligned} p_2 &= \frac{2}{\kappa + 1} \sin^2 \beta, & \rho_2 &= \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \\ v_{2\tau} &= \cos \beta, & v_{2n} &= \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \sin \beta, & h_2 &= h_1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

Здесь  $\beta$  — местный угол наклона скачка с направлением вектора скорости невозмущенного потока, индексы  $n$  и  $\tau$  обозначают составляющие вектора, соответственно нормальную и касательную к ударной волне.

Уравнения (1.1) и (1.3) вместе с условиями на теле и на бесконечности составляют полную систему уравнений задачи. Метод решения основан на предположении об узости возмущенной зоны между ударной волной и телом, что, как известно, эквивалентно предположению о малости величины  $\varepsilon = (\kappa - 1)/(\kappa + 1)$  по сравнению с единицей. Этот метод был использован ранее Г. Г. Черным [2] и рядом других авторов (см. обзор [5]). Для того чтобы исключить присущие этому методу трудности, связанные с появлением точки кавитации на поверхности криволинейных тел [5], рассмотрено обтекание тел с прямолинейными образующими — клиньев и конусов, где указанный метод в отсутствие поля дает заведомо хорошие результаты. Существенным упрощением, вносимым при использовании данного метода, является следующее. Напря-

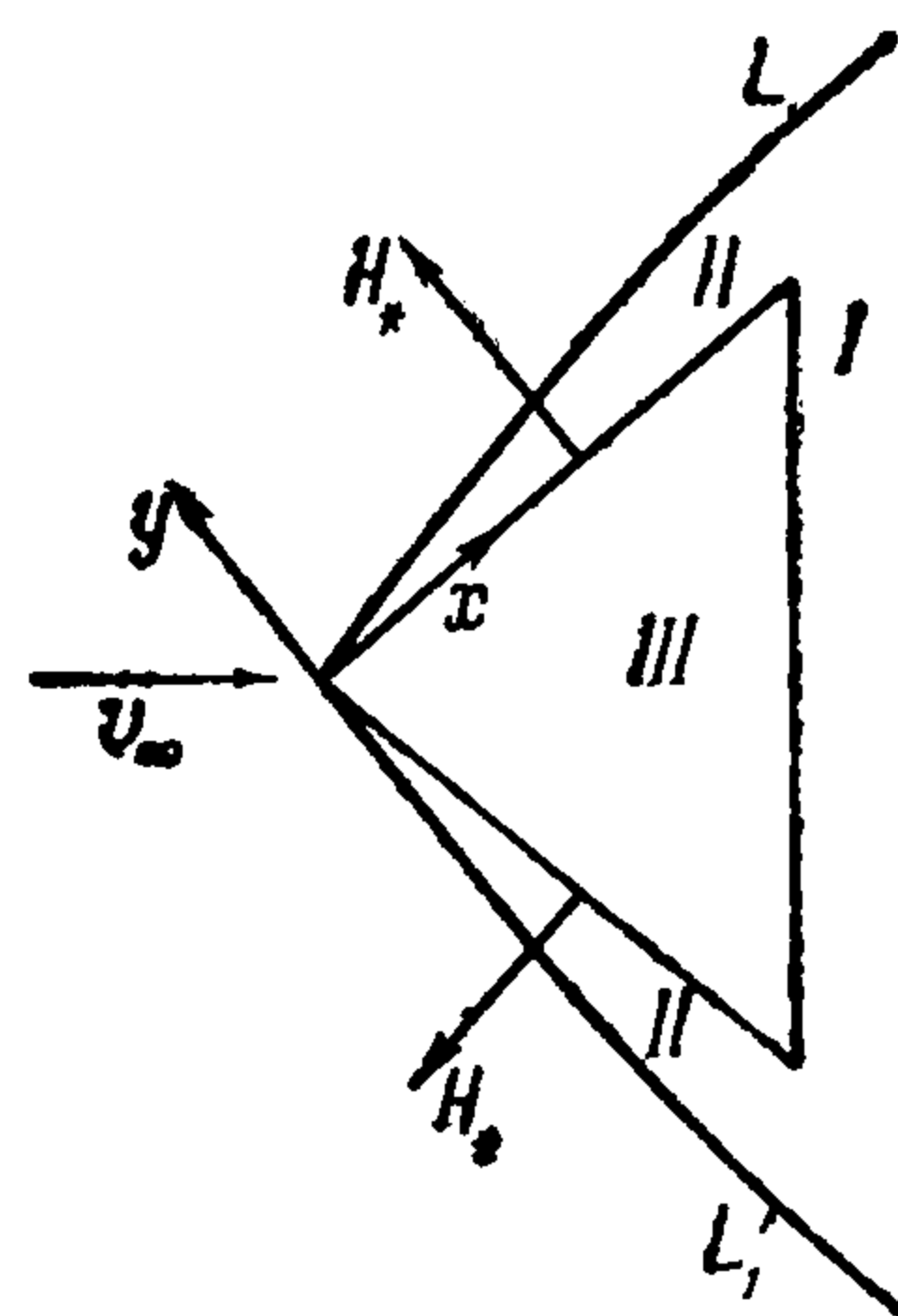
женность магнитного поля  $\mathbf{h}$  может быть записана в виде  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}'$ , где  $\mathbf{h}_0$  — напряженность заданного поля, измеренная в отсутствие потока, всюду удовлетворяющая уравнениям (1.2), и  $\mathbf{h}'$  — напряженность индуцированного поля, удовлетворяющая соотношениям

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{h}' &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{h}' &= R^* (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) & \text{в области II} \\ \operatorname{div} \mathbf{h}' &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{h}' &= 0 & \text{в областях I, III} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Области I, II, III показаны на фиг. 1, где изображен клин (или конус), обтекаемый в осевом направлении. Кривая  $L_1$  изображает ударную волну. Так как рассматривается обтекание тела конечных размеров, то область II, где проводимость существенно отлична от нуля, имеет размер порядка длины тела; непосредственно за телом газ расширяется, его температура приближается к температуре невозмущенного потока и, следовательно, проводимость обращается в нуль. Поэтому пространство за телом следует относить к области I. Для  $\mathbf{h}'$  можно получить следующие соотношения из уравнений (1.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{h}'(\mathbf{r}) &= \frac{R^*}{4\pi} \operatorname{rot} \iiint_{\tau} \frac{\mathbf{v}(\mathbf{R}) \times \mathbf{h}(\mathbf{R})}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} d\tau \quad (\text{для пространственного потока}) \\ \mathbf{h}'(\mathbf{r}) &= \frac{R^*}{2\pi} \operatorname{rot} \iint_S [\mathbf{v}(\mathbf{R}) \times \mathbf{h}(\mathbf{R})] \ln \frac{1}{|\mathbf{R} - \mathbf{r}|} dS \quad (\text{для плоского потока}) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор точки, в которой определяется магнитная напряженность,  $\mathbf{R}$  — переменный радиус-вектор,  $\tau$  — объем ( $S$  — соответственно площадь) возмущенного потока (область II на фиг. 1). Размер  $\tau$  или  $S$  вдоль образующей тела порядка единицы в безразмерных переменных, толщина зоны порядка  $\varepsilon$ , подынтегральные функции в соотношениях (1.5) порядка единицы. Отсюда  $h' \sim \varepsilon$ , что позволяет в уравнениях (1.5) заменить вектор  $\mathbf{h}$  на вектор  $\mathbf{h}_0$ , откуда получают замкнутые выражения для нахождения индуцированного поля. То обстоятельство, что индуцированное поле имеет порядок  $\varepsilon$ , позволяет с принятой точностью заменить в уравнениях движения газа вектор  $\mathbf{h}$  заданным вектором  $\mathbf{h}_0$ . Таким образом, постановка задачи видоизменяется. Задачи



Фиг. 1

по отысканию гидродинамического и индуцированного магнитного полей, в общем случае находимых совместно, в новой постановке разделяются, что делает решение практически осуществимым.

**§ 2. Обтекание клина.** Уравнения (1.1) в декартовой системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= (v h_x h_y - u h_y^2) \frac{q}{\rho} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= (u h_x h_y - v h_x^2) \frac{q}{\rho} \\ \frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial h_y}{\partial x} - \frac{\partial h_x}{\partial y} &= R^* (u h_y - v h_x), & \frac{v^2}{2} + \frac{u^2}{2} + \frac{x}{x-1} \frac{p}{\rho} &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Ось  $x$  направлена вдоль образующей клина, начало координат совпадает с вершиной клина,  $u$  и  $v$  — составляющие вектора скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно (фиг. 1).

В дальнейшем предполагается, что вектор магнитного поля направлен вдоль оси  $y$  и имеет постоянный модуль  $H^*$ , выбираемый в качестве характерной величины для магнитного поля.

В качестве характерной длины  $L$  берется длина образующей клина. Оценим величины, входящие в уравнения (2.1). Рассматривается случай действия сильного магнитного поля:  $q \sim \varepsilon^{-1}$ . С учетом высказанных в 1 соображений относительно индуцированного магнитного поля имеем для составляющих вектора  $\mathbf{h}$  магнитной напряженности

$$h_x \sim \varepsilon, \quad h_y = 1 + O(\varepsilon)$$

Для  $x, y, u, v, \rho$  имеем аналогично случаю отсутствия магнитного поля

$$x \sim 1, \quad y \sim \varepsilon, \quad u \sim 1, \quad v \sim \varepsilon, \quad \rho \sim \varepsilon^{-1}$$

Из второго уравнения (2.1) (проекция сил на ось  $y$ ) следует  $\partial p / \partial y = O(1)$ , откуда  $p_2 - p = O(\varepsilon)$ , где разность давления  $p_2$  за ударной волной и давления  $p$  в какой-либо точке возмущенного потока берется при фиксированном  $x$ .

Уравнение ударной волны записывается  $y = Y(x)$ , где  $Y(x) \sim \varepsilon$ . Отсюда, согласно уравнению (1.3), следует  $p_2 = \sin^2 \theta + O(\varepsilon)$ , где  $\theta$  — полуугол раствора клина. Следовательно, давление во всей области возмущенного потока постоянно с точностью до  $\varepsilon$ , откуда  $\partial p / \partial x \sim \varepsilon$ , что используется в первом уравнении движения (2.1). Окончательно, пренебрегая величиной  $\varepsilon$  по сравнению с единицей, получаем

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -u \frac{q}{\rho}, \quad p = \sin^2 \theta \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p u}{\partial x} + \frac{\partial p v}{\partial y} = 0, \quad u^2 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{p}{\rho} = 1, \quad \frac{\partial h'_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial h'_x}{\partial y} = -R^* u$$

Последние два уравнения дают индуцированное магнитное поле

$$h'_y = \gamma(x), \quad h'_x = -R^* \int_0^y u(x, \eta) d\eta + \delta(x) \quad (2.3)$$

где функции  $\gamma(x)$  и  $\delta(x)$  могут быть найдены, если обратиться к выражению для  $\mathbf{h}'$  (1.5). С учетом того, что ширина области интегрирования имеет порядок  $\varepsilon$ , с принятой точностью получаем, преобразуя (1.5):

$$h'_y = \frac{R^*}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^1 \int_0^{Y(x)} u(\xi, \eta) \ln |x - \xi| d\xi d\eta \quad (2.4)$$

$$h'_x = \frac{R^*}{2} \int_0^{Y(x)} u(x, \eta) d\eta - R^* \int_0^y u(x, \eta) d\eta$$

Легко усмотреть из выражений (2.4), что зона возмущенного потока эквивалентна при рассмотрении магнитного поля вихревому слою (слою токов) толщины порядка  $\varepsilon$  единичной длины.

Для гидродинамического поля согласно (1.3) получаем:

на ударной волне

$$p_2 = \sin^2\theta, \quad \rho_2 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad u_2 = \cos\theta, \quad v_2 = \frac{dY}{dx} \cos\theta - \varepsilon \sin\theta \quad \text{при } y = Y(x) \quad (2.5)$$

на клине

$$v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (2.6)$$

Введем вместо  $x$  и  $y$  независимые переменные  $x, \psi$ , принимая за  $\psi$  функцию тока, определяемую

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \rho v, \quad \frac{\partial\psi}{\partial y} = -\rho u, \quad \psi = 0 \quad \text{на поверхности клина} \quad (2.7)$$

Тогда из уравнений (2.2) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{q}{\rho}, \quad p = \sin^2\theta, \quad u^2 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{p}{\rho} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial\psi} \frac{v}{u} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho u} = 0 \quad (2.8)$$

Выражая  $1/\rho = \varepsilon(1 - u^2)/\sin^2\theta$  и подставляя это выражение в первое уравнение (2.8), с учетом (2.5) получим интеграл для  $u$ :

$$u = \text{th} \left[ \ln \text{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon q}{\sin^2\theta} (x - X) \right] \quad (2.9)$$

где  $x = X(\psi)$  — уравнение ударной волны в новых независимых переменных. Отсюда для плотности  $\rho$  имеем

$$\rho = \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon} \text{ch}^2 \left[ \ln \text{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon q}{\sin^2\theta} (x - X) \right] \quad (2.10)$$

Интеграл для  $u$  записан для случая постоянного значения электропроводности  $\sigma$  во всей области течения. Не составило бы труда записать этот интеграл с учетом переменности  $\sigma$ . Так, используя зависимость проводимости от температуры  $\sigma = \sigma_0 (T/T_0)^n$ , где  $\sigma$  — проводимость при некоторой температуре  $T_0$ , и выбирая в качестве  $T_0$  температуру торможения, получаем зависимость проводимости от безразмерной скорости  $\sigma = \sigma_0 (1 - u^2)^n$ , откуда выражение для  $u$  приобретает неявный вид:

$$x - X(\psi) = -\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon q_0} \int_{\cos\theta}^u \frac{du}{(1 - u^2)^n} \quad (2.11)$$

где в выражение для  $q_0$  входит  $\sigma_0$ . Выражение (2.11) неудобно для дальнейших рассуждений. Поэтому всюду принимается  $q = \text{const}$ , т. е. используется интеграл (2.9), хотя анализ, связанный с выражением (2.11), проводится в общем аналогично случаю  $q = \text{const}$ .

Согласно уравнению (2.9) при  $x > \xi$ , где

$$\xi = \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon q} \ln \text{ctg} \frac{\theta}{2} \quad (2.12)$$

скорость  $u$  на поверхности клина  $X(\psi) = 0$  меняет знак, становясь отрицательной величиной.

Физически это явление объясняется действием интенсивных пондеромоторных сил, направленных противоположно направлению движения. Частицы жидкости в области возмущенного потока под действием этих сил тормозятся, пока, наконец, их скорость не обратится в нуль, после чего на поверхности тела возникают обратные токи. Явление, связанное с появлением обратных токов, аналогично явлению отрыва вязкого по-

граничного слоя и может быть названо по аналогии явлением магнитного отрыва, а точка  $\xi$  — точкой магнитного отрыва. При  $x$ , близком к  $\xi$ , излагаемое решение неприменимо. Однако, пользуясь интегралом (2.9), можно определить хотя бы качественно поведение течения в окрестности точки магнитного отрыва.

В окрестности  $x = \xi$  имеем, разлагая выражение для  $u$  в ряд и ограничиваясь членами первого порядка малости:

$$u = -\frac{\varepsilon q}{\sin^2\theta} (x - \xi - c\psi) \quad \left( c = \frac{dX(\psi)}{d\psi} \Big|_{\psi=0} \right) \quad (2.13)$$

В точке отрыва плотность  $\rho = \varepsilon^{-1} \sin^2\theta$ . Следовательно, согласно (2.7)

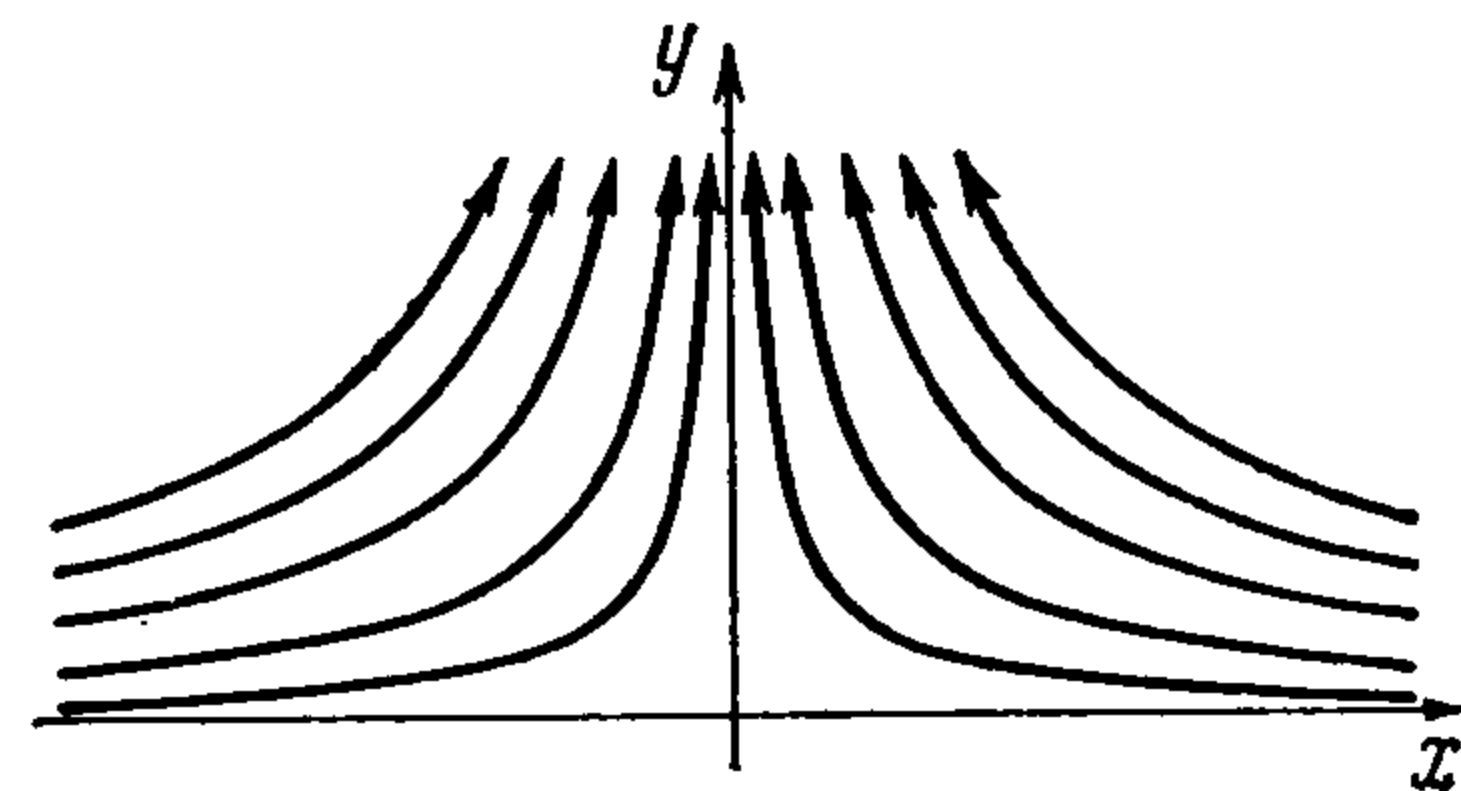
$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = q(x - \xi - c\psi) \quad (2.14)$$

Откуда, интегрируя с учетом, что  $\psi = 0$  при  $y = 0$ , имеем

$$\psi = \frac{x - \xi}{c} e^{-qcy} (e^{qcy} - 1)$$

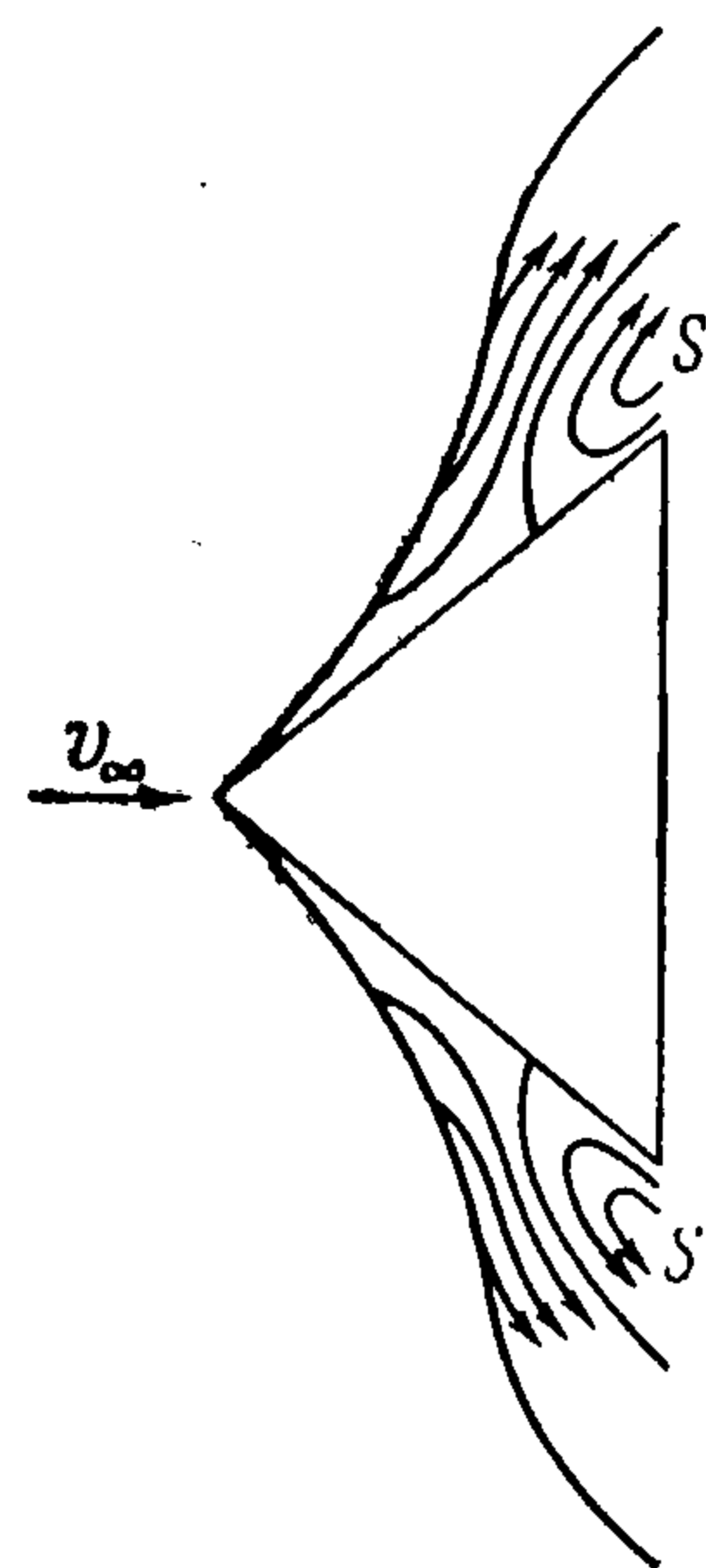
Это при малых  $y$  дает  $\psi = q(x - \xi)y$ .

На фиг. 2 изображены линии тока, качественно отображающие действительное поведение течения вблизи особой точки. Зона за точкой отрыва (область  $S$  на фиг. 3) представляет собой, по-видимому, срывную область вихревого течения. Наличие этой зоны приводит как бы к утолщению тела и увеличению его сопротивления.



Фиг. 2

Разумеется, срывная зона появляется на теле только в случае  $\xi < 1$ . С увеличением напряженности поля ( $q$  растет) точка магнитного отрыва смещается вверх по потоку. При очень сильных полях обтекаемое тело может быть почти целиком окружено срывной зоной, что увеличит сопротивление тела и, как можно ожидать, уменьшит теплопередачу к телу. При  $\xi \ll 1$  правильнее в качестве характерной длины выбирать не  $L$ , как всюду принималось до сих пор, а абсциссу точки отрыва, т. е. величину  $\xi L$ . Обозначая параметр  $q$ , соответствующий новой характерной длине, через  $q_\xi$ , согласно (2.12) имеем



Фиг. 3

$$q_\xi = \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon} \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \quad (2.15)$$

При таком выборе характерной длины всегда  $q \sim \varepsilon^{-1}$ , как и предполагалось при построении решения. Всюду в дальнейшем за характерную длину будет выбрана величина  $\xi L$ . Следует подчеркнуть, что явление магнитного отрыва отличается от известного из теории бесконечно проводящего газа ( $R^* = \infty$ ) явления «отжатия» потока при помощи магнитного поля, поскольку в последнем случае магнитное поле не проникает в поток, образуя на границе потока так называемую магнитную стенку.

В работе [1], где рассматривалось магнито-гидродинамическое течение жидкости в окрестности передней критической точки, было отмечено существование особенности в решении при некотором значении параметра  $q$  (в нашем обозначении), названном автором критическим. При значении  $q$ , превышающем критическое, решение теряет физический смысл.

Следует ожидать в соответствии с проведенным в настоящей работе рассмотрением, что при сверхкритическом значении параметра  $q$  безотрывное течение вблизи критической точки невозможно. Здесь появляется срывная зона, что аналогично соответствующему явлению при обтекании затупленного тела с «иглой» с той лишь разницей, что роль «иглы» выполняет магнитное поле.

В рассматриваемом случае ( $R^* \sim 1$ ) магнитные силовые линии пронизывают область течения, действуя на поток не силой «магнитного давления», а скорее силой магнитного трения [3].

Найдем форму ударной волны. Выражение для  $v$  согласно последнему уравнению (2.8) имеет вид:

$$v = -u \int_0^\psi \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\rho u} d\psi \quad (2.16)$$

Выполняя дифференцирование под знаком интеграла, с учетом выражений (2.9) и (2.10) получаем

$$v = -\frac{4\varepsilon^2 q_\xi}{\sin^4 \theta} \operatorname{th} [a - b(x - X)] \int_0^\psi \frac{\operatorname{ch} [2a - 2b(x - X)]}{\operatorname{sh}^2 [2a - 2b(x - X)]} d\psi \quad (2.17)$$

где

$$a = \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}, \quad b = \frac{\varepsilon q_\xi}{\sin^2 \theta}$$

Функция  $X(\psi)$  подлежит определению из граничных условий на ударной волне. Воспользуемся выражением для функции тока в невозмущенном потоке

$$\psi = -x \sin \theta - y \cos \theta \quad (2.18)$$

Отсюда, вводя функцию  $\psi = \Psi(x)$ , обратную  $X(\psi)$ , с учетом непрерывности функции тока на ударной волне, имеем

$$\Psi(x) = -x \sin \theta - Y(x) \cos \theta \quad (2.19)$$

Отсюда согласно (2.5)

$$v = -\frac{d\Psi(x)}{dx} - \sin \theta (1 + \varepsilon) \quad (2.20)$$

Подставляя в левую часть уравнения (2.17) выражение (2.20) и переходя под интегралом к интегрированию по переменной  $s = X(\psi)$ , для определения  $d\Psi/dx$  получаем линейное интегральное уравнение

$$\frac{d\Psi}{dx} + \sin \theta (1 + \varepsilon) = \frac{4\varepsilon^2 q_\xi \cos \theta}{\sin^4 \theta} \int_0^x \frac{\operatorname{ch} [2a - 2b(x - s)]}{\operatorname{sh}^2 [2a - 2b(x - s)]} \frac{d\Psi}{ds} ds \quad (2.21)$$

Ядро полученного интегрального уравнения при  $x = 1$ ,  $s = 0$  обращается в бесконечность. Анализ показывает, что  $\Psi(x)$  в окрестности  $x = 1$  также обращается в бесконечность, имея логарифмическую особенность  $\Psi(x) \sim \ln |x - \xi|$ .

В окрестности точки магнитного отрыва решение (2.21) неприменимо. О том, на каком расстоянии от этой точки решение теряет силу, можно судить из самого решения, которое становится непригодным, когда ударная волна удаляется от тела на расстояние, большое по сравнению с  $\varepsilon$ . Решение уравнения (2.21) может быть выполнено методом, аналогичным методу Эйлера при решении обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует вести решение, начиная с точки  $x = 0$ . После нахождения  $d\Psi/dx$ , а затем и  $\Psi(x)$  определяется функция  $Y(x)$ ,

дающая уравнение ударной волны из уравнения (2.19). Следует отметить, что в носике клина угол наклона ударной волны равен соответствующей величине для случая отсутствия магнитного поля:

$$\frac{dY(x)}{dx} = \varepsilon \operatorname{tg} \theta$$

На фиг. 4 представлены результаты расчетов  $Y(x)$  для  $\theta = 40^\circ$  (сплошные линии), из которых следует, что в плоском случае излагаемый метод дает невысокую точность: решение перестает быть справедливым при  $x \sim 0.6$  для  $\kappa = 1.4$  и  $x \sim 0.8$  при  $\kappa = 1.2$ . (В качестве характерной длины выбирается величина  $L\xi$  — абсцисса точки отрыва.) Как будет следовать из дальнейшего, в осесимметрическом случае точность метода значительно выше.

Можно получить аналитическое решение уравнения (2.21), если воспользоваться методом последовательных приближений; при этом, так как само уравнение получено с точностью до  $\varepsilon^2$ , достаточно взять первое приближение. Используя в качестве нулевого приближения  $\Psi_0(x)$ , выражение для функции тока в случае отсутствия поля, получим

$$\left(\frac{d\Psi}{dx}\right)_0 = -\sin\theta(1 + \varepsilon) \quad (2.22)$$

Подставляя выражение (2.22) под знак интеграла в уравнение (2.21) и интегрируя дважды, получим выражение для первого приближения  $\Psi_1(x)$

$$\Psi_1(x) = -x \sin\theta + \frac{\cos\theta \sin\theta}{q\xi} \ln \left[ \sec\theta \operatorname{th} \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon q_\xi x}{\sin^2\theta} \right) \right] \quad (2.23)$$

Отсюда уравнение ударной волны согласно (2.19)

$$Y(x) = \frac{\sin\theta}{q_\xi} \ln \left[ \sec\theta \operatorname{th} \left( \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon q_\xi x}{\sin^2\theta} \right) \right] \quad (2.24)$$

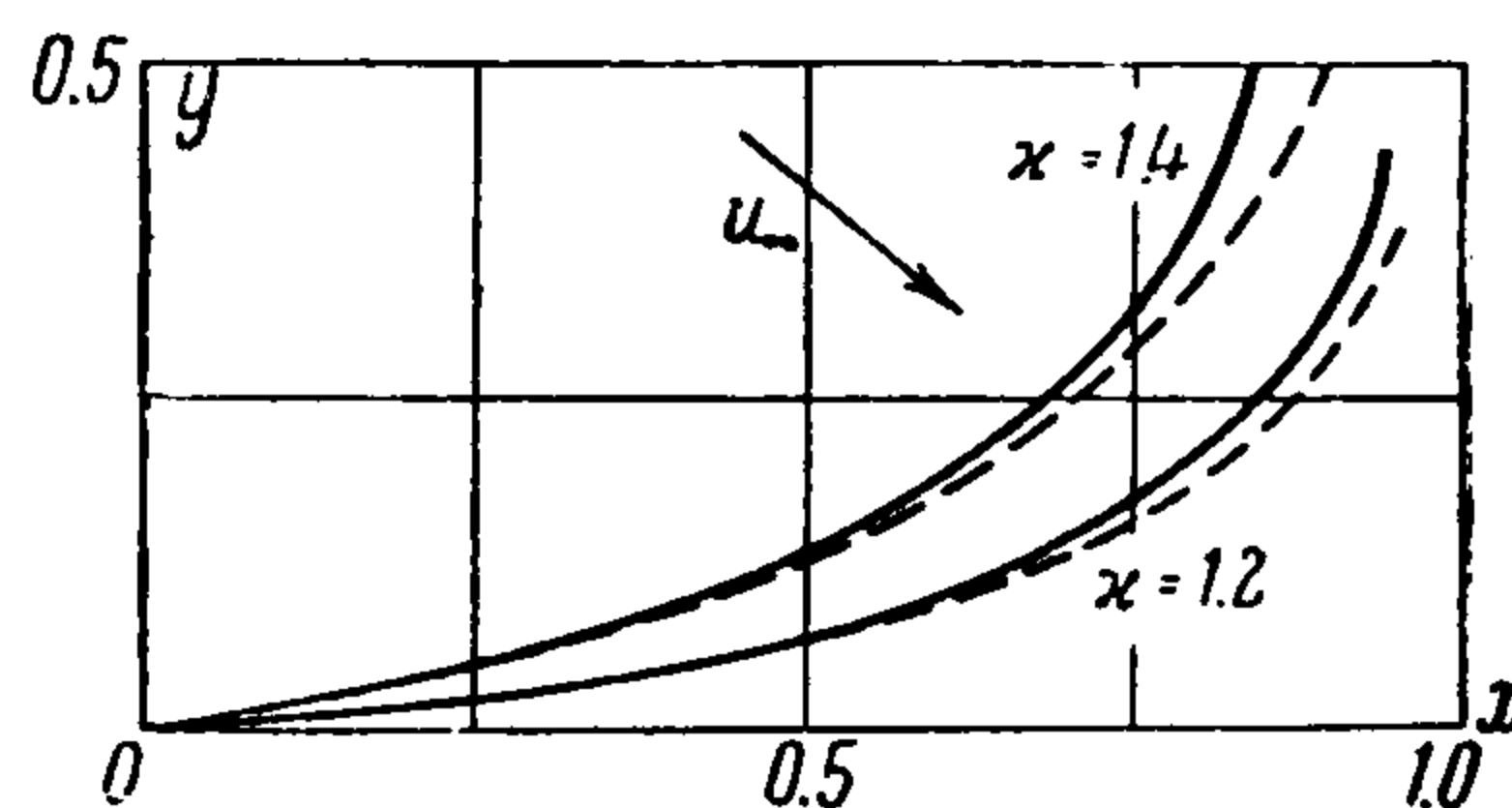
На фиг. 4 пунктирными линиями даны результаты расчетов по этой формуле. Из приведенных графиков следует, что выражение (2.24) дает хорошее приближение к точному решению в области его применимости.

Рассмотрим силы, действующие на тело. Кроме сил давления, действующих по нормали к поверхности клина и определяемых с точностью до  $\varepsilon$  по формуле Ньютона, на тело действует магнитная сила, которая может быть рассчитана согласно [3]. Однако в данном случае удобнее использовать теорему импульсов, применение которой дает касательную к образующей клина силу сопротивления

$$F^* = L\xi R_\infty U_\infty^2 \int_0^{Y(x)} (\cos\theta - u) \rho u \, dy \quad (2.25)$$

Записанная формула определяет силу через суммарную потерю импульса из-за действия магнитных сил. Интеграл берется при некотором фиксированном  $x$ , причем предполагается  $\xi \ll 1$ . Устремляя  $x \rightarrow 1$  и переходя к интегрированию по  $\phi$ , а затем по  $s = X(\phi)$ , имеем

$$F^* = -L\xi R_\infty U_\infty^2 \lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x \left\{ \cos\theta - \operatorname{th} \left[ \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{q_\xi}{\sin^2\theta} (x - s) \right] \right\} \frac{d\Psi}{ds} \, ds \quad (2.26)$$



Фиг. 4

Производя интегрирование с точностью до  $\varepsilon$ , получаем

$$F^* = L\xi R_\infty U_\infty^2 \sin \theta \left( \cos \theta + \frac{\ln \sin \theta}{\ln \operatorname{ctg}^{1/2} \theta} \right) \quad (2.27)$$

Проектируя эту силу на направление движения и сравнивая ее проекцию  $Q$  с гидродинамической силой сопротивления  $F$ , определяемой по формуле Ньютона, действующей на участок клина до точки отрыва, получаем  $Q = 0.635F$  для  $\theta = 40^\circ$ . Таково соотношение между гидродинамической и магнитной силами, действующими на участок клина до точки отрыва. Труднее определить гидродинамическую и магнитную силы, действующие на тело в результате появления срывной зоны. Можно ожидать, что вклад в сопротивление, вносимый наличием срывной зоны, того же порядка, что сопротивление, испытываемое телом в отсутствие магнитного поля.

**§ 3. Обтекание конуса.** Решение для конуса строится в основном так же, как и для клина, поэтому изложение решения будет кратким. Уравнения движения в сферической системе координат  $r, \vartheta$ , где  $r$  — радиус-вектор, а  $\vartheta$  — угол, отсчитываемый от оси конуса, имеют вид:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{v^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= (v h_r h_\vartheta - u h_\vartheta^2) \frac{q}{\rho} \\ u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} + \frac{uv}{r} + \frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \vartheta} &= (u h_r h_\vartheta - v h_r^2) \frac{q}{\rho} \\ \frac{\partial r^2 \rho u \sin \vartheta}{\partial r} + \frac{\partial r \rho v \sin \vartheta}{\partial \vartheta} &= 0, \quad \frac{u^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Центр системы координат — в вершине конуса,  $u, v$  — соответственно радиальная и тангенциальная компоненты скорости.

В качестве характерной длины выбирается расстояние от вершины конуса до точки магнитного отрыва, найденное, как будет следовать из дальнейшего, как и в плоском случае, из соотношения (2.12). Уравнения для индуктивного магнитного поля не выписаны, поскольку это поле может быть найдено из формулы (1.5). Здесь также можно получить, пользуясь узостью возмущенной зоны, уравнения типа (2.3), (2.4) для индуктивного магнитного поля.

Представляя  $\vartheta = \theta + \varphi$ , где  $\theta$  — полуугол раствора конуса, а  $\varphi \sim \varepsilon$ , в тех же, что и в § 2, предположениях получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} &= -u \frac{q}{\rho}, \quad p = \sin^2 \theta \\ u^2 + \frac{1}{\varepsilon} \frac{p}{\rho} &= 1, \quad \frac{\partial r^2 \rho u \sin \theta}{\partial r} + \frac{\partial r \rho v \sin \theta}{\partial \varphi} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Наложенное магнитное поле по-прежнему считаем перпендикулярным поверхности конуса. Граничные условия на поверхности ударной волны:

$$p_2 = \sin^2 \theta, \quad \rho_2 = \frac{1}{\varepsilon}, \quad u_2 = \cos \theta, \quad v_2 = r \frac{d\Phi}{dr} \cos \theta - \varepsilon \sin \theta \quad (3.3)$$

где  $\varphi = \Phi(r)$  — уравнение линии ударной волны в сферической системе координат. Аналогично тому, как для плоского течения, вводятся независимые переменные  $r, \psi$ , где  $\psi$  — функция тока, определяемая

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = r \rho v \sin \theta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} = -r^2 \rho u \sin \theta \quad (3.4)$$

В новых переменных уравнения (3.2) принимают вид:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{q}{p}, \quad p = \sin^2 \theta, \quad u^2 + \frac{p}{\varepsilon p} = 1, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{v}{ur} + \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2 p u \sin \theta} = 0 \quad (3.5)$$

Интеграл для  $u$  имеет вид (2.9), а выражение для  $\rho$  (2.10), где вместо  $x$  стоит  $r$ , а вместо  $X(\psi)$  стоит  $R(\psi)$  — уравнение ударной волны в новых независимых переменных.

Уравнение для  $v$  согласно (3.5) имеет вид:

$$v = -\frac{ru}{\sin \theta} \int_0^\psi \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r^2 p u} \right] d\psi \quad (3.6)$$

Подставляя в это выражение  $\rho$  и  $u$  из уравнений (2.9) и (2.10), после ряда преобразований получаем

$$v = -\frac{4\varepsilon^2 q_\xi \operatorname{th} [a - b(r - R)]}{r \sin^5 \theta} \int_0^\psi \frac{\operatorname{ch} [2a - 2b(r - R)]}{\operatorname{sh}^2 [2a - 2b(r - R)]} d\psi + \\ + \frac{4\varepsilon \operatorname{th} [a - b(r - R)]}{r^2 \sin^3 \theta} \int_0^\psi \frac{d\psi}{\operatorname{sh} [2a - 2b(r - R)]} \quad (3.7)$$

где  $a$  и  $b$  определяются как и в (2.17).

Запишем граничные условия для определения функции  $R(\psi)$ . Выражение для функции тока в невозмущенном потоке имеет вид:

$$\psi = -\frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \quad (3.8)$$

Отсюда на ударной волне с принятой точностью имеем

$$\Psi(r) = -\frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta - r^2 \sin \theta \cos \theta \Phi(r) \quad (3.9)$$

Исходя из этого, условие для  $v$  на ударной волне с учетом (3.3) может быть записано

$$v = -\frac{r}{\sin \theta} \frac{d}{dr} \frac{\Psi}{r^2} - \varepsilon \sin \theta \quad (3.10)$$

Так как при  $r$ , близких к нулю,  $\Psi \sim r^2$ , то на ударной волне в носике конуса имеем

$$v = -\varepsilon \sin \theta \quad \text{при } r = 0 \quad (3.11)$$

Определим угол скачка в носике конуса, что может служить проверкой правильности уравнения (3.7).

Устремляя в (3.7)  $r \rightarrow 0$ , получаем, что первое слагаемое в правой части выражения (3.7) обращается в нуль, а второе слагаемое дает

$$v = \frac{2\psi\varepsilon}{r^2 \sin \theta} \quad (3.12)$$

С другой стороны, интегрируя второе уравнение (3.4), получаем при  $r$ , близких к нулю:

$$\Psi = -\frac{r^2}{\varepsilon} \cos \theta \sin \theta \Phi(r) \quad (3.13)$$

Окончательно для  $v$  на ударной волне имеем уравнение

$$v = -2 \cos \theta \Phi(r) \quad (3.14)$$

Это с учетом (3.11) дает выражение для угла наклона скачка  $\Phi_0$  в носике конуса:

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \varepsilon \operatorname{tg} \theta \quad \text{при } r = 0 \quad (3.15)$$

в соответствии с результатом, полученным для конуса в отсутствие магнитного поля [2].

При помощи (3.9) и (3.15) получаем функцию тока на ударной волне в отсутствие магнитного поля:

$$\Psi = -\frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta (1 + \varepsilon) \quad (3.16)$$

Запишем теперь уравнение для  $\Psi(r)$ . Подставляя в левую часть уравнения (3.7) выражение (3.10) и переходя к интегрированию по  $s = R(\phi)$ , получаем интегро-дифференциальное уравнение для определения функции  $\Psi(r)$ :

$$\begin{aligned} -\frac{r}{\sin \theta} \frac{d}{dr} \frac{\Psi}{r^2} - \varepsilon \sin \theta = & -\frac{4\varepsilon^2 q_\xi \cos \theta}{r \sin^5 \theta} \int_0^r \frac{\operatorname{ch} [2a - 2b(r-s)]}{\operatorname{sh}^2 [2a - 2b(r-s)]} \frac{d\Psi}{ds} ds + \\ & + \frac{4\varepsilon \cos \theta}{r^2 \sin^3 \theta} \int_0^r \frac{1}{\operatorname{sh} [2a - 2b(r-s)]} \frac{d\Psi}{ds} ds \end{aligned} \quad (3.17)$$

Применим к решению уравнения (3.17) метод последовательных приближений, в качестве нулевого приближения используя (3.16). Производим интегрирование в правой части (3.17), делим уравнение (3.17) на  $r$  и еще раз интегрируем с учетом

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\Psi}{r^2} = -\frac{1 + \varepsilon}{2} \sin^2 \theta \quad (3.18)$$

После ряда преобразований получаем первое приближение для  $\Psi$ :

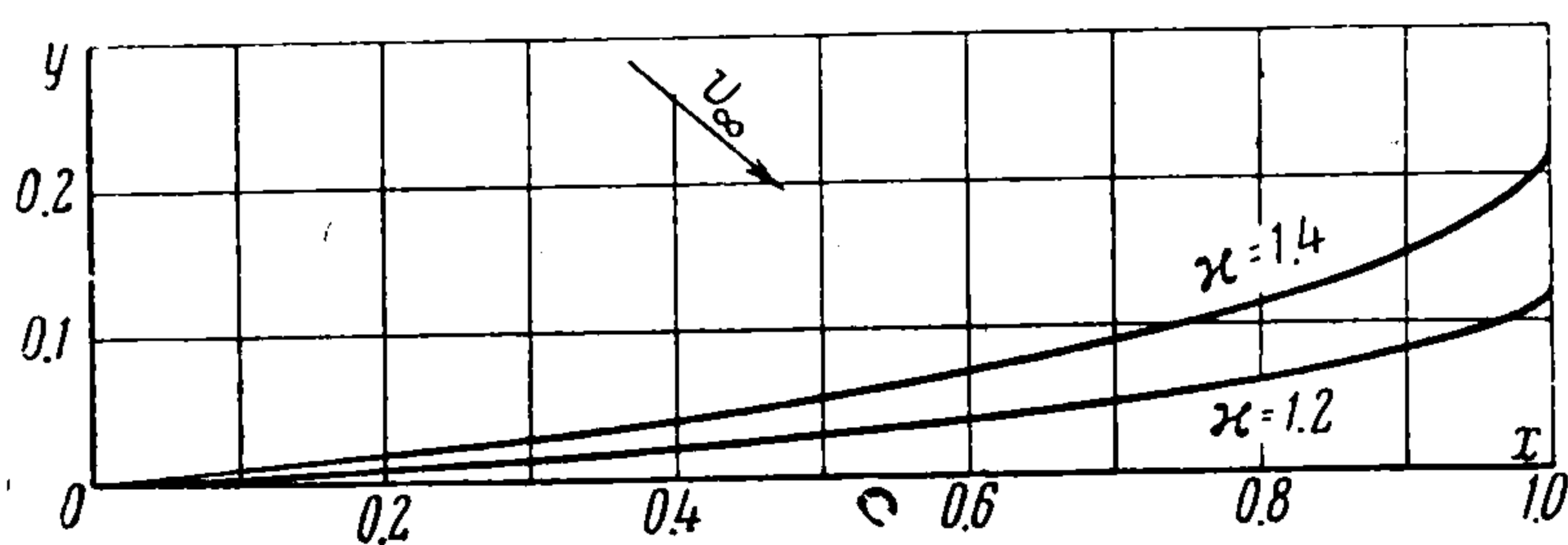
$$\Psi_1(r) = -\frac{\sin^2 \theta}{2} r^2 + \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{q_\xi} \int_0^r \ln \left\{ \sec \theta \operatorname{th} \left[ \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon q_\xi}{\sin^2 \theta} z \right] \right\} dz \quad (3.19)$$

Любопытно отметить, что выражение для  $\Psi_1(r)$ , найденное для случая клина (2.23), равно деленной на  $\sin \theta$  производной от  $\Psi_1$  по  $r$  для конуса. Уравнение ударной волны принимает теперь следующий вид [согласно (3.9)]:

$$\Phi(\varphi) = -\frac{\sin \theta}{q_\xi r^2} \int_0^r \ln \left\{ \sec \theta \operatorname{th} \left[ \ln \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} - \frac{\varepsilon q_\xi}{\sin^2 \theta} z \right] \right\} dz \quad (3.20)$$

На фиг. 5 приведены результаты расчетов по формуле (3.20) уравнения ударной волны для конуса с полууглом раствора  $\theta = 40^\circ$  для  $\kappa = 1.4$  и  $\kappa = 1.2$ . На фиг. 5 ударная волна изображена в декартовой системе координат, ось  $x$  направлена вдоль образующей, а ось  $y$  перпендикулярно образующей тела. Как видно из расчетов, указанный метод дает значительно лучшие результаты для случая осесимметрических, нежели плоских, течений.

Расстояние  $y$  между ударной волной и телом, которое в окрестности точки магнитного отрыва обращается в бесконечность для случая клина, в рассматриваемом случае в окрестности  $x = 1$  имеет следующий вид:  $y \sim (1 - x) \ln(1 - x)$ , т. е. обращается в бесконечность производная  $dy/dx$ , а не сама функция. В связи с этим излагаемое решение применимо почти вплоть до точки магнитного отрыва.



Фиг. 5

Течение в окрестности точки магнитного отрыва описывается аналогично тому, как в случае обтекания клина. Для скорости имеем выражение, исходя из интеграла (2.9), где  $x, X(\psi)$  заменяются соответственно на  $r$  и  $R(\psi)$ , с учетом выражения (3.16):

$$u = -\frac{\varepsilon q_\xi}{\sin^2 \theta} (r - 1 - A \sqrt{-\psi}) \quad \left( A = \frac{1}{\sin \theta} \sqrt{\frac{2}{1 + \varepsilon}} \right) \quad (3.21)$$

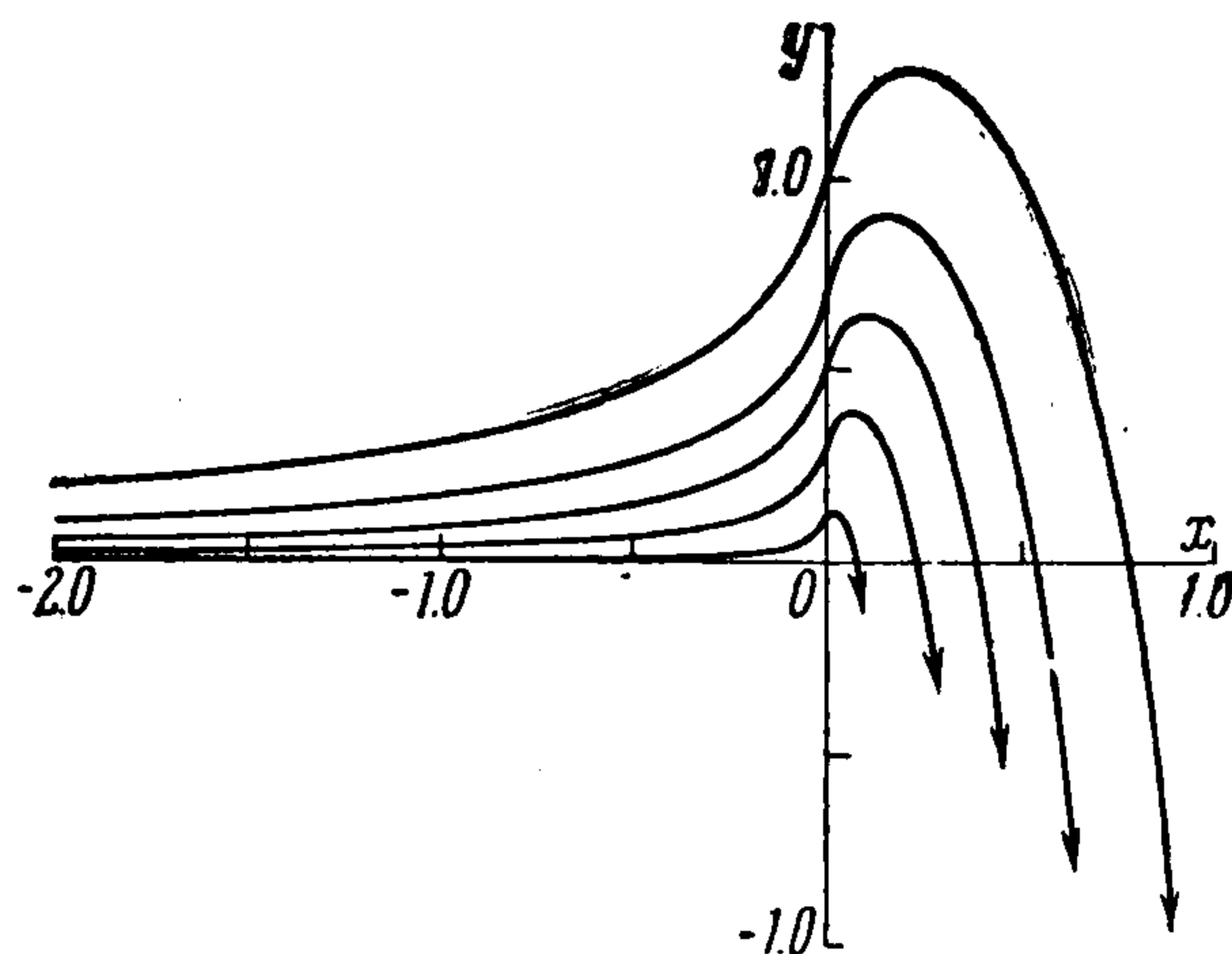
Отсюда и из уравнений (3.4), переходя к местной декартовой системе координат  $s, y$  с центром в точке магнитного отрыва (ось  $y$  направлена перпендикулярно поверхности конуса), получаем:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = q_\xi (s - A \sqrt{-\psi}) \sin \theta \quad (3.22)$$

Интегрируем это уравнение с учетом  $\psi = 0$  при  $y = 0$ :

$$\frac{q_\xi \sin \theta}{2} y = \frac{\sqrt{-\psi}}{A} + \frac{s}{A^2} \ln \left| \frac{s - A \sqrt{-\psi}}{s} \right| \quad (3.23)$$

На фиг. 6 изображены линии тока согласно уравнению (3.23). Разумеется, при  $s > 0$  уравнение неприменимо. Обращает на себя внимание тот факт, что в отличие от плоского случая (фиг. 2) в данном случае линии тока не уходят на бесконечность, пересекаясь с осью  $y$  на конечном расстоянии от поверхности тела.



Фиг. 6

Определим силу магнитного сопротивления, действующую на участок конуса до точки магнитного отрыва. По теореме импульсов после ряда преобразований, аналогичных проведенным в § 2, имеем для силы следующее выражение

$$Q = 2\pi \cos \theta \sin^2 \theta \left[ \frac{\cos \theta}{2} - \frac{1}{(\ln \operatorname{ctg}^{1/2} \theta)^2} \int_0^a z \operatorname{th} z dz \right] R_\infty \xi^2 L^2 U_\infty^2 \quad (3.24)$$

$$(a = \ln \operatorname{ctg}^{1/2} \theta)$$

Сравнивая эту силу с находимой по формуле Ньютона гидродинамической силой, для  $\theta = 40^\circ$  получаем  $Q = 0.40F$ .

В заключение автор приносит искреннюю благодарность А. А. Дороницыну и А. А. Никольскому за весьма полезное обсуждение работы и ценные советы. Автор также считает своим долгом искренне поблагодарить М. Ф. Бударину, К. Е. Ивашкину и Е. С. Рябинкову, выполнивших все необходимые численные расчеты.

Поступила 13 VI 1959

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В у ш W. В. Magnetohydrodynamic-hypersonic flow past a blunt body. J. Aerospace Science, vol. 25, No. 11, 1958.
2. Ч е р н ы й Г. Г. Обтекание тел газом при большой сверхзвуковой скорости. Докл. АН СССР, т. 107, № 2, 1956.
3. Л а д ы ж е н с к и й М. Д. Задачи обтекания в магнитной гидродинамике. ПММ, т. XXIII, вып. 2, 1959.
4. Р е с л е р Э. и С и р с У. Перспективы магнитной аэродинамики. Механика, сб. переводов, № 6, 1958.
5. Л и з Л. Современное состояние аэродинамики гиперзвуковых течений. Механика, сб. переводов, № 4, 1958.