

вязко-пластичной сжимаемой среды можно воспользоваться уравнением состояния Г. М. Ляхова, т. е. принять связь между p и ρ в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \alpha_1 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\kappa_1} + \alpha_2 \left[\frac{2(p-p_0)k}{\rho_2 c_2^2} + 1\right]^{-\kappa_2} + \alpha_3 \left[\frac{k_3(p-p_0)}{\rho_3 c_3^2} + 1\right]^{-\kappa_3} \quad (3)$$

$$\left(\kappa_1 = \frac{1}{k_1}, \quad \kappa_2 = \frac{1}{k_2}, \quad \kappa_3 = \frac{1}{k_3}\right)$$

при условии, что уравнения состояния компонентов таковы:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{k_1} \quad (\text{газ})$$

$$p = p_0 + \frac{\rho_2 c_2^2}{k_2} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_2}\right)^{k_2} - 1\right] \quad (\text{жидкость})$$

$$p = p_0 + \frac{\rho_3 c_3^2}{k_3} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_3}\right)^{k_3} - 1\right] \quad (\text{минералы}) \quad (4)$$

а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ — концентрации и плотности компонентов при $p = p_0$, т. е. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\rho_0 = \alpha_1 \rho_1 + \alpha_2 \rho_2 + \alpha_3 \rho_3$, где ρ_0 — средняя плотность при $p = p_0$, c_1, c_2, c_3 — скорости звука в чистых компонентах при $p = p_0$.

Заметим, что вид уравнений состояния чистых компонентов не обязательно должен быть таким, как в формулах (4). При других видах этих зависимостей основное соотношение (3) соответственным образом изменится.

При помощи выписанной системы уравнений можно изучать различные динамические явления в вязко-пластичных средах. В частности, при распространении сильных возмущений (от взрыва, например) можно, по-видимому, пренебречь влиянием параметров τ_s и тогда характерные особенности распространения ударных волн выявленные в [2], будут иметь место и в вязко-пластичных средах.

Представляет практический интерес задача о распространении акустических возмущений в потоке вязко-пластичной жидкости в круглой трубе. Эту задачу такж можно исследовать на основе приведенной выше системы уравнений.

Поступила 29 VIII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. К а с и м о в А. Ф., М и р з а д ж а н з а д е А. Х. Различные формы уравнений движения вязко-пластичных жидкостей и закон гидродинамического подобия. ПММ, т. XIX, вып. 3, 1955.
2. Л я х о в Г. М. Ударные волны в многокомпонентных средах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1959.

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ С ГИДРАВЛИЧЕСКИМИ ВОЛНАМИ В СЛУЧАЕ «МЕЛКОЙ ВОДЫ»

Г. Л. Гродзовский
(Москва)

Известная аналогия движения сжимаемого газа и движения жидкости со свободной поверхностью в поле тяжести, когда глубина слоя жидкости мала по сравнению с характеристическими размерами задачи («мелкая вода» см., например, [1]), позволяет обобщить на случай «мелкой воды» решения задач одномерных неустановившихся движений газа [2,3]. Так, если ввести величины

$$\rho = \rho_{\text{ж}} h, \quad p = \frac{1}{2} \rho_{\text{ж}} g h^2 \quad (1)$$

где $\rho_{\text{ж}}$ — плотность жидкости, ρ и p — плотность и давление фиктивного газа с отношением теплоемкостей $\kappa = 2.0$, то уравнения движения жидкости совпадают с уравнениями адиабатического течения указанного фиктивного газа. Но условия на гидравлической волне (прыжок h) отличаются от соотношений для ударной волны в газе, что вызывает специфичные особенности.

Аналогично [4] рассмотрим в случае «мелкой воды» автомодельные движения с гидравлическими волнами, распространяющимися с постоянной скоростью D по покоящейся жидкости с глубиной слоя h_1 . Параметры за гидравлической волной определяются соотношениями

$$\frac{h_2}{h_1} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2 \frac{c^2}{a_1^2} - \frac{1}{2}} = \Phi \left(\frac{D}{a_1} \right),$$

$$a_1 = \sqrt{gh_1} \quad (2)$$

$$v_2 = D \left(1 - \frac{1}{\Phi} \right), \quad \rho_2 = \rho_1 \Phi, \quad p_2 = p_1 \Phi^2$$

где a_1 — скорость распространения малых возмущений, v_2 — скорость движения жидкости непосредственно за гидравлической волной.

Плоский фронт гидравлической волны соответствует тривиальному течению с постоянной скоростью за волной $v = v_2 = \text{const}$. Представляют интерес автомодельные радиальные течения с цилиндрическим фронтом гидравлической волны, которые, например, могут служить моделью соответствующих тектонических процессов при наличии водной поверхности. Автомодельное решение будет функцией безразмерной комбинации $\lambda = \beta r / tD$ и определится интегрированием следующей системы уравнений [2]:

$$\frac{dz}{dV} = \frac{z}{V} \frac{(V-1)(3V-2) - 2z}{(V-1)^2 - 2z}, \quad \frac{d \ln \lambda}{dV} = \frac{z - (V-1)^2}{V [(V-1)^2 - 2z]}, \quad R = \alpha z \lambda^2 \quad (3)$$

где

$$v = \frac{r}{t} V(\lambda), \quad \rho = \rho_1 R(\lambda), \quad p = \frac{\rho_1 r^2}{t^2} P(\lambda), \quad z = \frac{2P}{R}$$

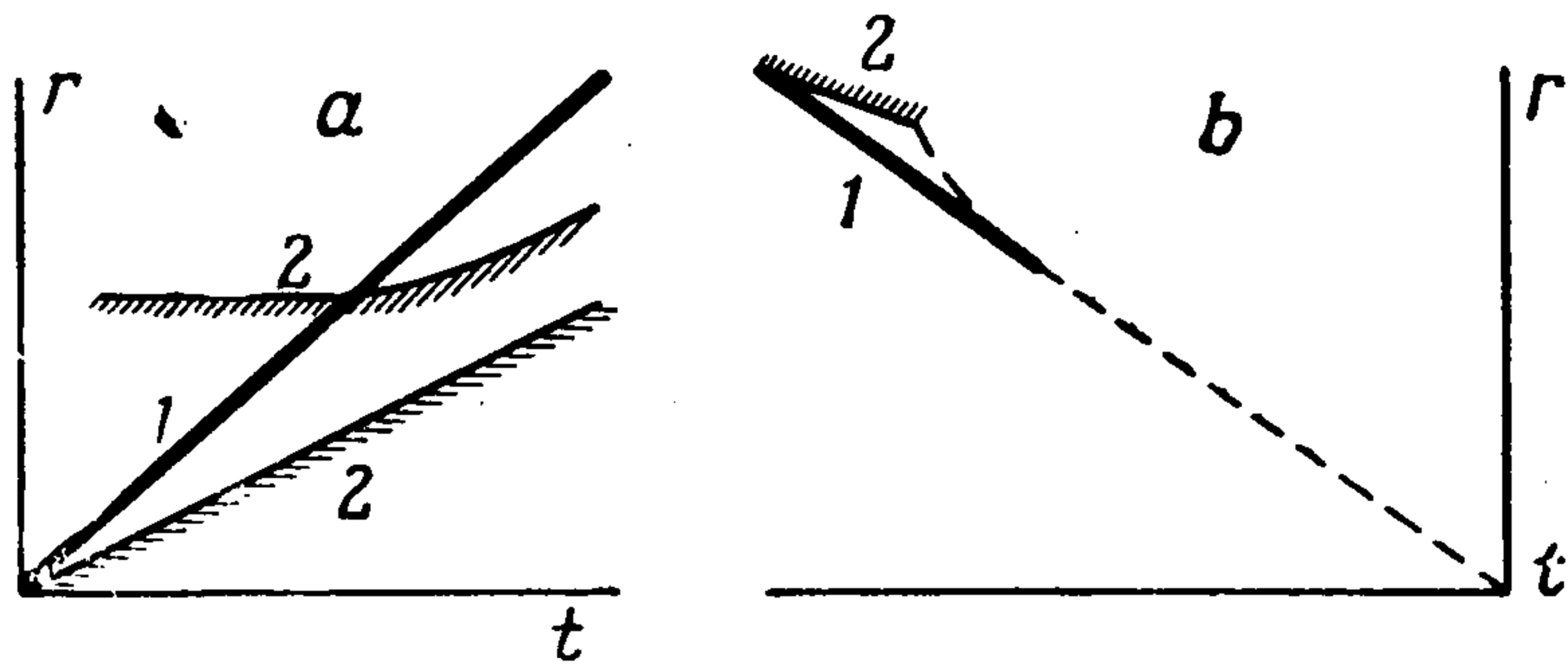
В соответствии с (2) граничные условия за гидравлической волной запишутся в виде

$$V_2 = \frac{\Phi - 1}{\Phi}, \quad z_2 = \Phi \frac{a_1^2}{D^2}, \quad R_2 = \Phi \quad (4)$$

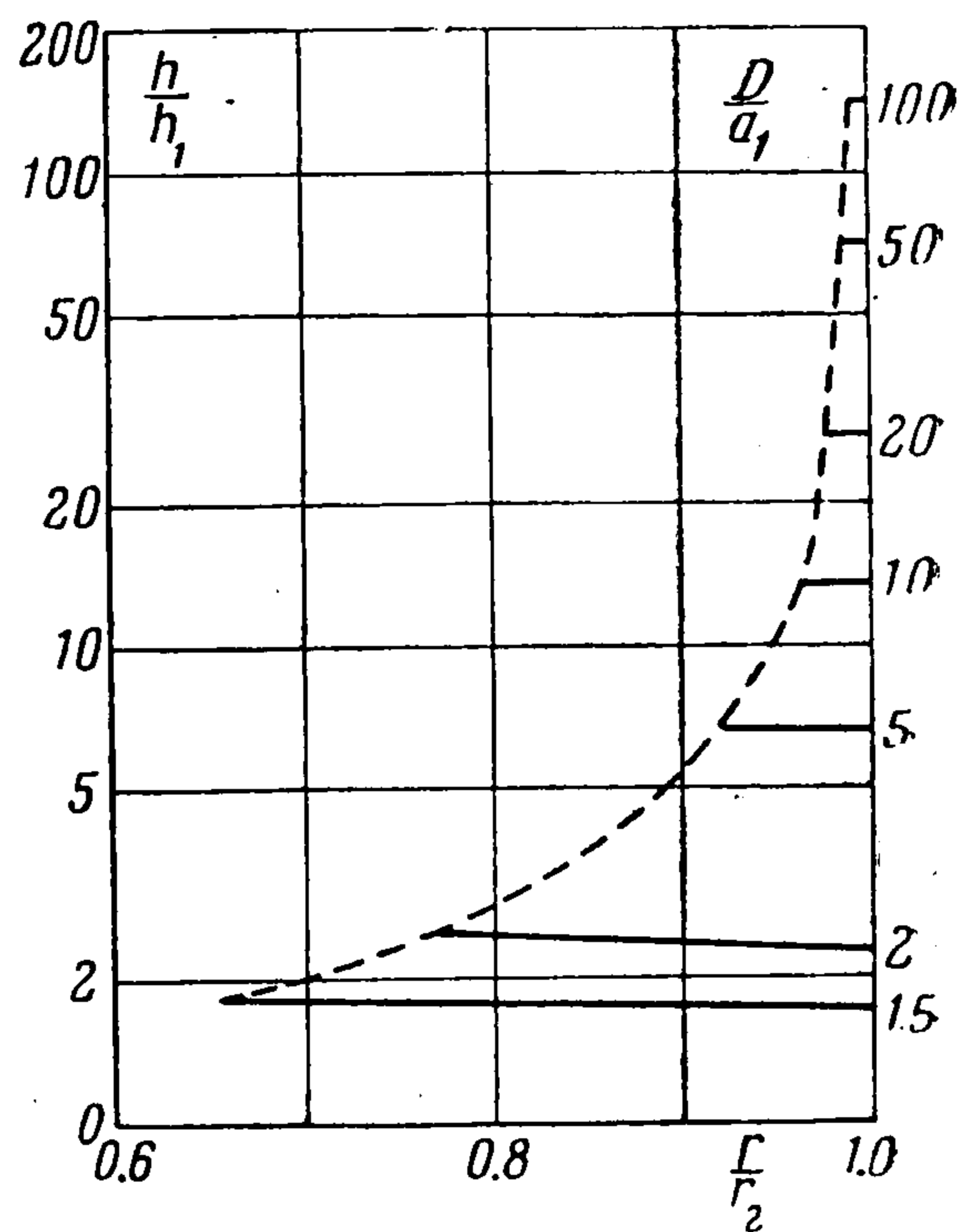
Зависимость $V_2 = f(z_2)$ приведена на фиг. 1, там же для сопоставления приведены кривые

$$z_2 = (1 - V_2) \left(1 + \frac{x-1}{2} V_2 \right)$$

для газа при $x = 2.0$, $x = 1.4$ и $x = 1.0$.



Фиг. 2



Фиг. 3

На линии $V_2 = f(z_2)$ начинаются интегральные кривые уравнений (3), примеры интегральных кривых приведены на фиг. 1. К рассматриваемому типу относятся четыре вида течений [4], из них при $V_2 > 0$ существуют два вида течения, в которых жидкость покоится перед набегающей гидравлической волной.

- а) Течение с расходящейся гидравлической волной при $t > 0$.
 в) Течение со сходящейся гидравлической волной при $t < 0$.

Интегральные кривые течения а оканчиваются на линии $V = 1$, которая соответствует радиально расширяющемуся (с постоянной скоростью) цилиндрическому поршню. Течение в ограничено в плоскости Vz параболой $z = (V - 1)^2$ (см. [2, 4]).

Для рассмотренных случаев на фиг. 2 приведены картины течения в физической плоскости (1 — гидравлическая волна, 2 — поршень), на фиг. 3 — распределение глубины слоя жидкости за расходящейся гидравлической волной, а на фиг. 4 — за сходящейся. Изменение относительной энергии

$$E^\circ = \frac{E}{\rho_{ж} g h_1^2 \pi r_2^2}$$

затрачиваемой поршнем в зависимости от D/a_1 (для течения а) приведена на фиг. 5.

Аналогично в случае «мелкой воды» могут быть рассмотрены и другие известные нестационарные автомодельные движения, например точечный взрыв с учетом противодействия [2].

При очень мощной гидравлической волне ($D/a_1 \rightarrow \infty$) соотношение h_2/h_1 стремится к бесконечности; поэтому течениям типа сильного взрыва в газе [2] в случае «мелкой воды» соответствует растекание [5] постоянной массы [жидкости при $h_1 = 0$]. Как и в случае газа, помимо точечного сильного взрыва [2], существует автомодельное движение, соответствующее периферийному взрыву [6]. В случае «мелкой воды» с цилиндрическим фронтом решению [6] соответствует следующее распределение глубины слоя [5]:

$$h = \frac{r^2}{8gt^2} \quad \text{при } t < 0 \quad (5)$$

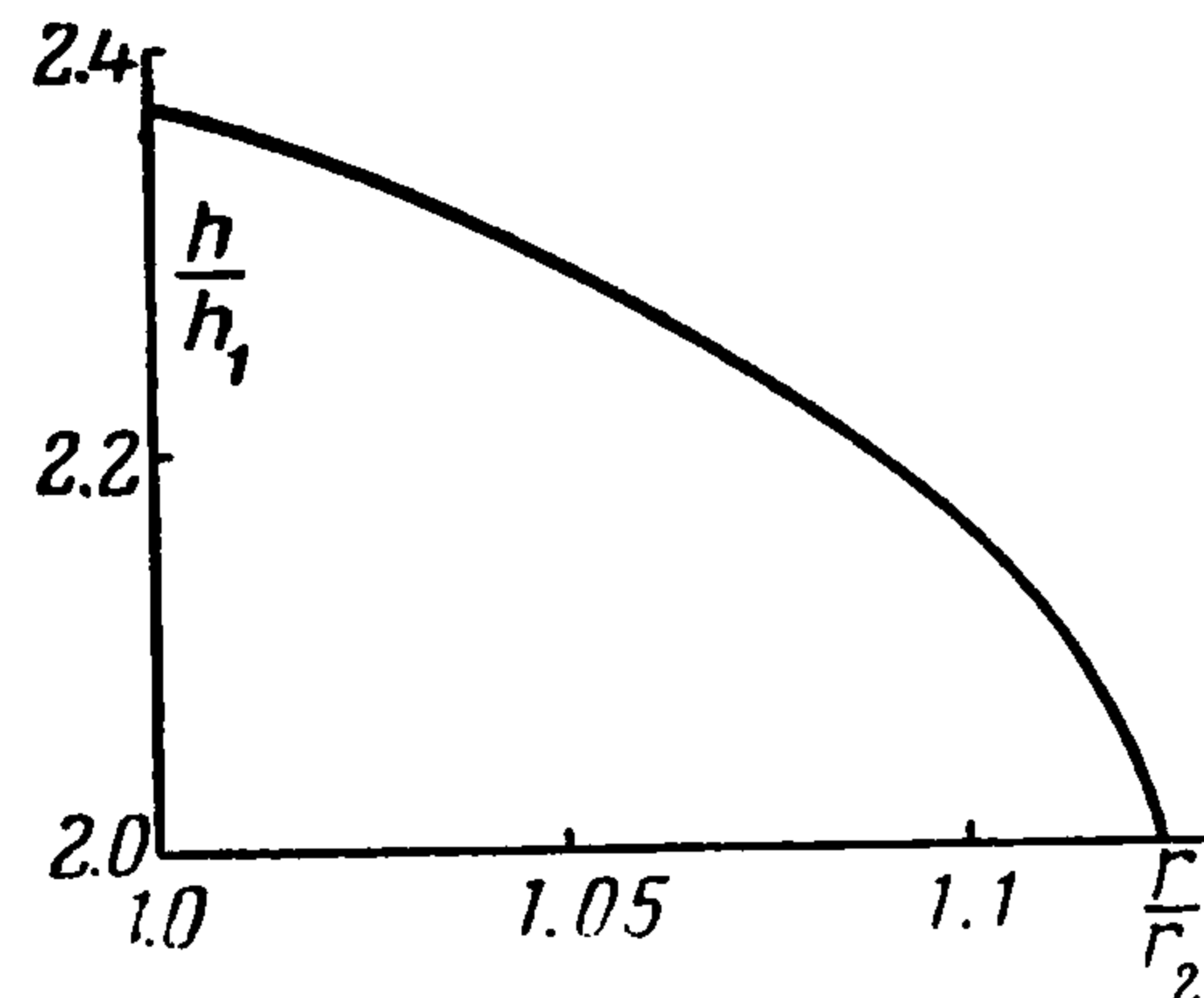
$$\text{ограниченного цилиндрическими поверхностями} \quad r_{1,2} \sim \sqrt{t_{1,2}} \quad (6)$$

Такое периферийное кольцевое течение непрерывно стягивается к центру при соответственном росте глубин слоя.

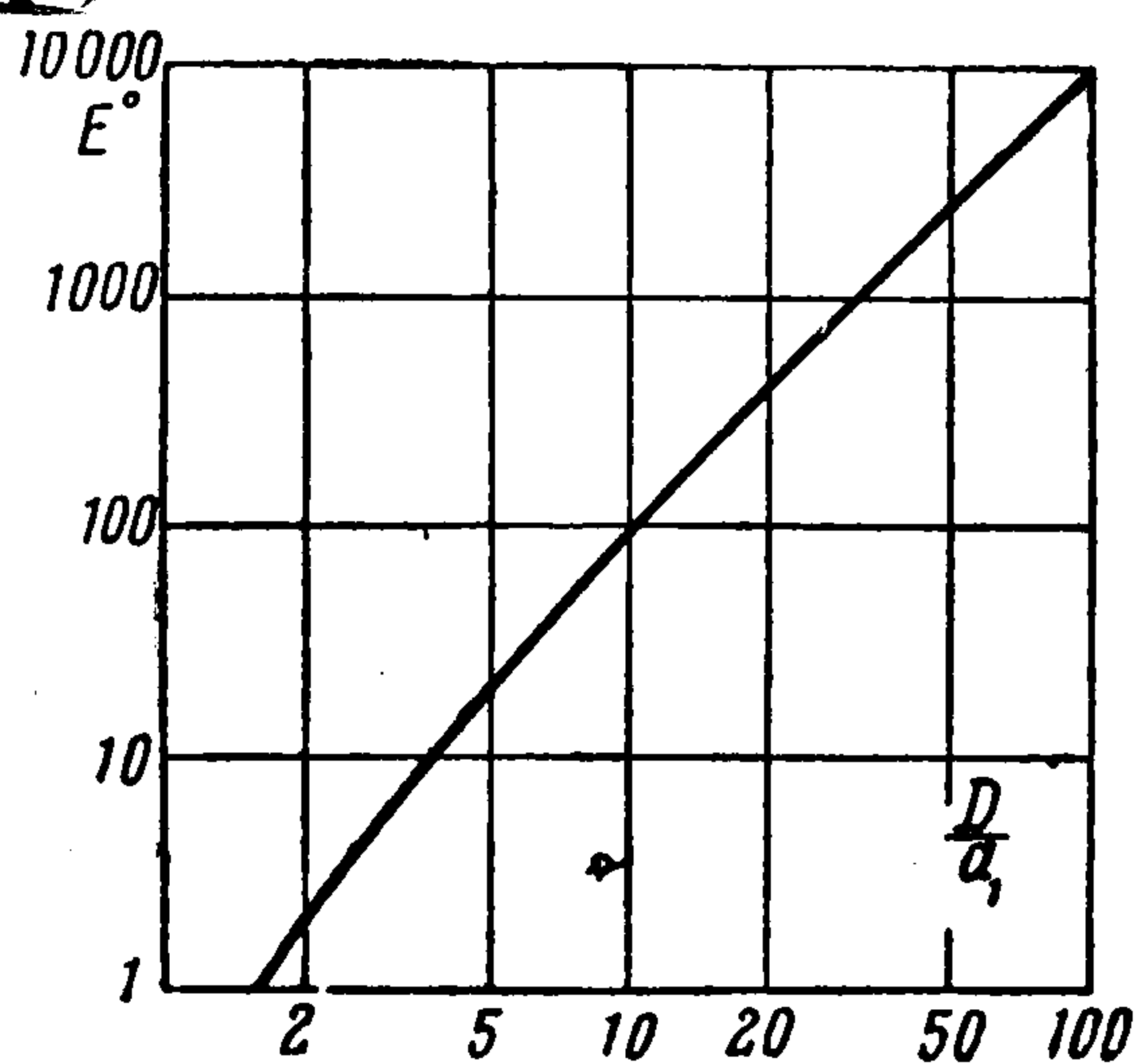
Поступила 15 VI 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд. 2. ГИТТЛ, 1953.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4, ГИТТЛ, 1957.
3. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. ГИТТЛ, 1955.
4. Гродзовский Г. Л., Дюкалов А. Н., Токарев В. В., Толстых А. И. Автомодельные движения газа с ударными волнами, распространяющимися с постоянной скоростью по покоящемуся газу. ПММ, т. XXIII, вып. 1, 1959.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. О некоторых неустановившихся движениях «мелкой воды». ПММ, т. XXI, вып. 6, 1957.
6. Гродзовский Г. Л. Автомодельное движение газа при сильном периферийном взрыве. Докл. АН СССР, т. III, № 5, 1956.



Фиг. 4



Фиг. 5