О ПОЛНОЙ СИСТЕМЕ УРАВНЕНИЙ СЖИМАЕМОЙ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧНОЙ ЖИДКОСТИ

И. М. Астрахан, С. С. Григорян

(Москва)

При решении некоторых задач, связанных с течениями вязко-пластичных жидкостей, принципиально необходим учет сжимаемости среды. К таким задачам относятся, например, вопросы распространения акустических и сильных возмущений в вязко-пластичной жидкости. Вместе с тем в литературе, по-видимому, не имеется замкнутой системы уравнений, описывающих движения сжимаемой вязко-пластичной жидкости.

Такая система уравнений и предлагается в настоящей заметке.

Полная система уравнений, описывающих произвольные движения вязко-пластичной несжимаемой жидкости, имеется в работе [1].

Соотношения между компонентами тензоров напряжений и скоростей деформаций имеют вид: (1)

$$p_{xx} = -p + 2\left(\mu + \frac{\tau_s}{h}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3}\operatorname{div}\bar{v}\right), \qquad p_{xy} = \left(\mu + \frac{\tau_s}{h}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \text{ и т. д.}$$

Здесь невыписанные формулы получаются циклической перестановкой координат, μ — коэффициент вязкости, τ_s — пластическая постоянная

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{(s_{xx}-s_{yy})^2 + (s_{yy}-s_{zz})^2 + (s_{zz}-s_{xx})^2 + \frac{3}{2}(s_{xy}{}^2 + s_{yz}{}^2 + s_{zx}{}^2)}$$

$$s_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \qquad s_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots$$

p — давление, $V(u, v, w)$ — вектор скорости. Соотношения (1), которые мы и примем также и для сжимаемой среды, вместе с уравнениями движения произвольной сплошной среды и уравнением неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho V) = 0 \tag{2}$$

не образуют замкнутой системы. Для замыкания системы предположим, что существует связь между давлением p и только плотностью ρ (уравнение состояния), т. е. что все процессы, происходящие в среде, баротропны.

Г. М. Ляховым [2] для описания процессов, происходящих в водонасыщенных рунтах, было предложено уравнение состояния, которое приводит к удовлетворительному соответствию с экспериментальными результатами.

Это уравнение применимо в том случае, когда насыщенность грунта водой велика, содержание газа мало и минеральные частицы грунта не образуют достаточно жесткого скелета, так что все три основных компонента грунта — минеральные частицы, вода, воздух — сжимаются под действием гидростатического давления без заметных необратимых уплотнений среды, связанных обычно с разрушением структуры скелета. В этом случае уравнение состояния смеси из упомянутых компонентов можно получить, зная уравнения состояния каждого из компонентов и их концентрации в смеси. В работе [2] Г. М. Ляховым принято, что уравнение состояния каждого из компонентов имеет вид $p = f(\rho)$, т. е. процессы сжатия и расширения в них баротропны. Для минеральных частиц и воды это является достаточно хорошим приближением, а для воздуха принимается изэнтропическая связь между p и ρ что в условиях сжатия воздушных пузырьков, находящихся в грунте, можно считать приемлемым.

Обращаясь теперь к вязко-пластичным жидкостям (глинистые и прочие растворы, пасты и т. д.), замечаем, что условия применимости уравнения состояния Г. М. Ляхова в них выполняются даже лучше, чем в водонасыщенном грунте, в котором минеральные частицы все-таки образуют скелет, тогда как в упомянутых растворах скелета нет. Отсюда заключаем, что для замыкания системы уравнений вязко-пластичной сжимаемой среды можно воспользоваться уравнением состояния Г. М. Ляхова, т. е. принять связь между p и ρ в виде

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \alpha_1\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\varkappa_1} + \alpha_2\left[\frac{2(p-p_0)k}{\rho_2 c_2^2}+1\right]^{-\varkappa_2} + \alpha_3\left[\frac{k_3(p-p_0)}{\rho_3 c_3^2}+1\right]^{-\varkappa_3} \qquad (3)$$

$$\left(\varkappa_1 = \frac{1}{k_1}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{k_2}, \quad \varkappa_3 = \frac{1}{k_3}\right)$$

при условии, что уравнения состояния компонентов таковы:

$$p = p_0\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^{k_1} \qquad \text{(газ)}$$

$$p = p_0 + \frac{\rho_2 c_2^2}{k_2}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_2}\right)^{k_2} - 1\right] \qquad \text{(жидкость)} \qquad (4)$$

$$p = p_0 + \frac{\rho_3 c_3^2}{k_3}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_3}\right)^{k_3} - 1\right] \qquad \text{(минералы)}$$

а $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \rho_1, \rho_2, \rho_3$ — концентрации и плотности компонентов при $p = p_0$, т. е. $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\rho_0 = \alpha_1\rho_1 + \alpha_2\rho_2 + \alpha_3\rho_3$, где ρ_0 — средняя плотность при $p = p_0$ c_1, c_2, c_3 — скорости звука в чистых компонентах при $p = p_0$.

Заметим, что вид уравнений состояния чистых компонентов не обязательно должен быть таким, как в формулах (4). При других видах этих зависимостей основное соотношение (3) соответственным образом изменится.

При помощи выписанной системы уравнений можно изучать различные динами ческие явления в вязко-пластичных средах. В частности, при распространении сильных возмущений (от взрыва, например) можно, по-видимому, пренебречь влияни ем параметров и τ_s и тогда характерные особенности распространения ударных волн выявленные в [2], будут иметь место и в вязко-пластичных средах.

Представляет практический интерес задача о распространении акустических возмущений в потоке вязко-пластичной жидкости в круглой трубе. Эту задачу такж можно исследовать на основе приведенной выше системы уравнений.

Поступила 29 VIII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Касимов А. Ф., Мирзаджанзаде А. Х. Различные формы уравнений движения вязко-пластичных жидкостей и закон гидродинамического подобия. ПММ, т. XIX, вып. 3, 1955.
2. Ляхов Г. М. Ударные волны в многокомпонентных средах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 1, 1959.

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ С ГИДРАВЛИЧЕСКИМИ ВОЛНАМИ В СЛУЧАЕ «МЕЛКОЙ ВОДЫ»

Г. Л. Гродзовский

(Москва)

Известная аналогия движения сжимаемого газа и движения жидкости со свободной поверхностью в поле тяжести, когда глубина слоя жидкости мала по сравнению с характеристическими размерами задачи («мелкая вода» см., например, [1]), позволяет обобщить на случай «мелкой воды» решения задач одномерных неустановившихся движений газа [2,3]. Так, если ввести величины

$$\rho = \rho_{ж} h, \qquad p = \frac{1}{2}\rho_{ж} g h^2 \qquad (1)$$

где $\rho_{ж}$ — плотность жидкости, ρ и p — плотность и давление фиктивного газа с отношением теплоемкостей $\varkappa = 2.0$, то уравнения движения жидкости совпадают с уравнениями адиабатического течения указанного фиктивного газа. Но условия на гидравлической волне (прыжок h) отличаются от соотношений для ударной волны в газе, что вызывает специфичные особенности.