$p_1$, $p_2$, $p_3$ в функции Ляпунова (6). Для значений параметров системы (1)

$m_1 = 1.54 \cdot 10^{-6}$ сек$^2$, $m_2 = 0.924 \cdot 10^{-6}$ сек$^{-2}$, $m_3 = 6 \cdot 10^{-3}$ сек$^{-1}$, $m_4 = 25.974$, $m_5 = 10^{-3}$ сек$^{-1}$

оптимальными оказываются следующие значения варьируемых коэффициентов:

$$p_1 = 0.1, \qquad p_2 = 1, \qquad p_3 = 0.127$$

При этом неравенства (11) удовлетворяются в следующей области:

$$|f_1(t)| \leqslant 0.75 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}, \qquad |f_2(t)| \leqslant 2 \tag{12}$$

Неравенства (12) определяют область, внутри которой функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ могут изменяться по любому произвольному закону без нарушения устойчивости рассматриваемой гироскопической системы.

Заметим, что при $f_1 = \text{const}$, $f_2 = \text{const}$, как следует из условий Гурвитца, система устойчива в области

$$|f_1| \leqslant 1.24 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}, \qquad |f_2| \leqslant 2$$

Поступила
29 VIII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2. ГИТТЛ, М., стр. 174, 1955.
2. Разумихин Б. С. Об устойчивости неустановившихся движений. ПММ, т. XX, вып. 2, стр. 266, 1956.
3. Ройтенберг Я. Н. Об одном методе построения функций Ляпунова для линейных систем с переменными коэффициентами. ПММ, т. XXII, вып. 2, стр. 167, 1958.

## О НАКОПЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ

Л. С. Гноенский
(Москва)

Задача об определении максимального в момент времени $T$ значения $y_{\max}(T)$ частного решения линейного дифференциального уравнения $L\{y(t)\} = f(t)$ при условии, что $|f(t)| \leqslant M_0$; $0 \leqslant t \leqslant T$ была решена в работах Б. В. Булгакова и Н. Т. Кузовкова [1,2]. Аналогичную задачу для линейных разностных уравнений рассмотрел Я. Н. Ройтенберг [3]. Однако, в ряде случаев, на правую часть уравнения накладываются более жесткие условия, а именно, кроме ограниченности модуля функции $f(t)$ имеет место ограниченность по модулю и некоторых ее производных, например $f'(t)$, $f''(t)$. Такая постановка имеет, например, место для следящих систем, когда ограниченны положение, скорость и ускорение объекта, за которым осуществляется слежение. При наличии этих дополнительных ограничений на правую часть, величина $y_{\max}(T)$ может быть значительно меньше, чем в случае ограниченности только $|f(t)|$. Ниже излагается способ определения максимального значения $y_{\max}(T)$ частного решения линейного разностного уравнения $L\{y(t)\} = f(t)$ в случаях, когда

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant M_m, \qquad m > 0 \tag{0.1}$$

$$|f(t)| \leqslant M_0, \qquad |f'(t)| \leqslant M_1, \qquad |f''(t)| \leqslant M_2 \tag{0.2}$$

1. Частное решение уравнения

$$y(t+n) + P_1(t)\, y(t+n-1) + \ldots + P_n(t)\, y(t) = f(t) \tag{1.1}$$

имеет вид

$$y(t) = \sum_{i=0}^{[t]-1} \psi_i(t)\, f(t - [t] + i) \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем символ $[t]$ означает целую часть $t$, а функции $\psi_i(t)$ определяются линейно независимой системой решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1).

Определим $y_{\max}(T)$ в том случае, когда

$$|f^{(m)}(u)| \leqslant M_m \qquad (m > 0,\ 0 \leqslant u \leqslant T) \tag{1.3}$$

Для простоты изложения предположим, что

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(m-1)}(0) = 0 \tag{1.4}$$

Общий случай рассматривается аналогичным образом. Учитывая (1.4), имеем

$$f(u) = \int_0^u \frac{1}{(m-1)!} f^{(m)}(z)(u-z)^{m-1} dz \tag{1.5}$$

подставив (1.5) в выражение (1.2), получаем

$$y(T) = \sum_{i=0}^{[T]-1} \psi_i(t) \int_0^{T-[T]+i} \frac{1}{(m-1)!} f^{(m)}(u)(T-[T]+i-u)^{m-1} du =$$

$$= \int_0^{T-1} f^{(m)}(u) \sum_{i=0}^{[T]-1} \frac{1}{(m-1)!} A_i(u)(T-[T]+i-u)^{m-1} du = \int_0^{T-1} f^{(m)}(u) F_m(u) du \tag{1.6}$$

Здесь

$$A_i(u) = \begin{cases} \psi_i(T), \text{если } u \in [0,\ T-[T]+i] \\ 0 \qquad \text{если } u \in [T-[T]+i,\ T-1] \end{cases} \tag{1.7}$$

$$F_m(u) = \sum_{i=0}^{[T]-1} \frac{1}{(m-1)!} A_i(u)(T-[T]+i-u)^{m-1} \tag{1.8}$$

Функция $F_m(u)$ на $[0,\ T-1]$ имеет конечное число точек разрыва первого рода и ограничена. Из (1.6) следует, что $y(T)$ в фиксированный момент времени $T$ будет принимать максимально возможное с учетом (1.3) значение, если

$$|f^{(m)}(u)| = M_m, \qquad \operatorname{sign} f^{(m)}(u) = \operatorname{sign} F^m(u), \qquad u \in [0,\ T-1] \tag{1.9}$$

2. Будем искать максимально возможное в фиксированный момент времени $T$ значение $y_{\max}(T)$ частного решения уравнения (1.1), если на правую часть (1.1) наложены на $[0,\ T-1]$ следующие ограничения:

$$|f(u)| \leqslant M_0, \qquad |f'(u)| \leqslant M_1, \qquad |f''(u)| \leqslant M_2 \tag{2.1}$$

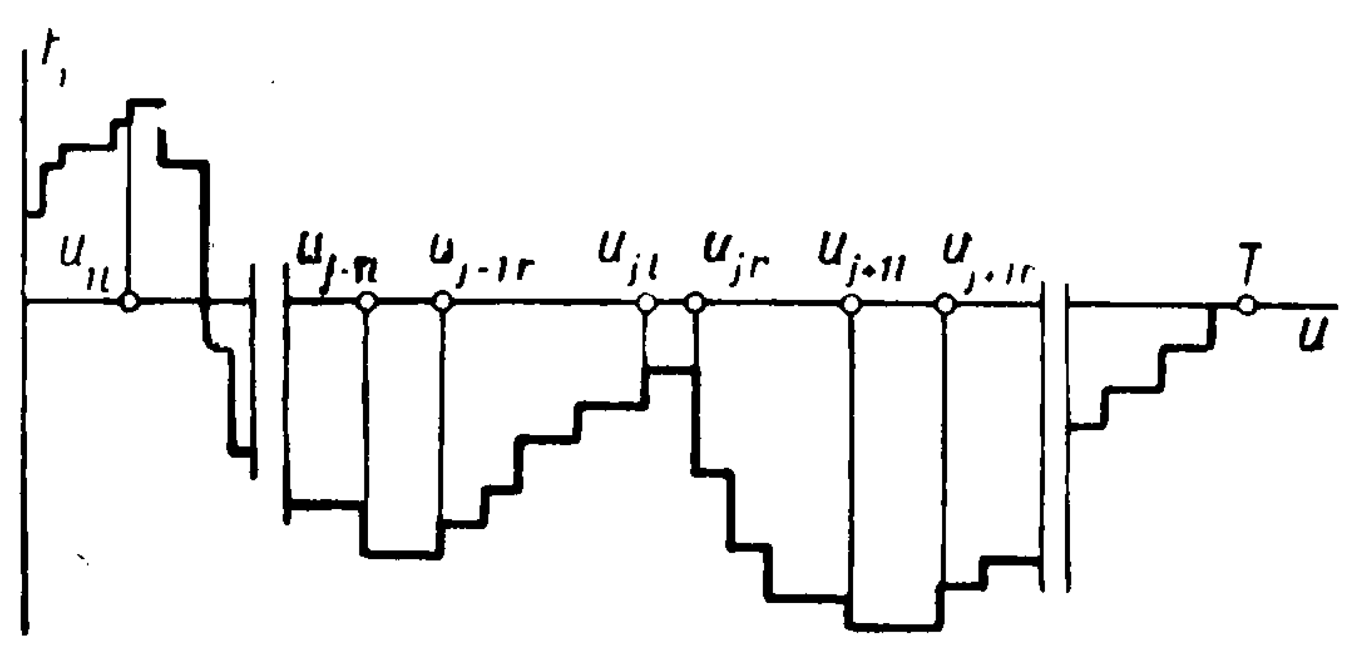
где $M_0$, $M_1$, $M_2$ — произвольные постоянные. Заметим, что частными случаями рассматриваемой задачи являются задачи об определении $y_{\max}(T)$ при условии

$$|f(u)| \leqslant M_0, \qquad |f'(u)| \leqslant M_1 \tag{2.2}$$

или при условии

$$|f(u)| < M_0, \qquad |f''(u)| \leqslant M_2 \tag{2.3}$$

К определению $y_{\max}(T)$ при условии (2.2) сводится и задача об определении $y_{\max}(T)$ при условии




Фиг. 1

$$|f'(u)| \leqslant M_1, \qquad |f''(u)| \leqslant M_2 \tag{2.4}$$

По-прежнему для простоты изложения предполагается, что $f(0) = f'(0) = 0$. Полагая в (1.6) $m = 1$, получаем

$$y(T) = \int_0^{T-1} F_1(u) f'(u) du, \quad F_1(u) = \sum_{i=0}^{[T]-1} A_i(u) \tag{2.5}$$

Функция $F_1(u)$ сохраняет постоянное значение на каждом из полусегментов $(T-[T]+i,\ \ T-[T]+i+1]$ $(i = 0, 1, \ldots, [T]-2)$ и на $[0,\ T-[T]]$. Пусть на

$[0, T-1]$ имеется $k$ интервалов $(u_{j,l}, u_{j,r})$ $(j = 1, \ldots, k)$, на которых $F_1(u)$ принимает экстремальные по сравнению с соседними слева и справа интервалами значения (фиг. 1). Предполагается, что выполняются следующие условия:

$$u_{j+1,\,l} - u_{jl} \geqslant 2L_1 \qquad (j = 1, \ldots, k), \qquad u_{1l} \geqslant L_1 + L_2 \tag{2.6}$$

где

$$u_{k+1,\,l} = T - 1$$

$$L_1 = \frac{2M_0}{M_1} + \frac{2M_1}{M_2} \quad \text{при } \frac{M_1^2}{2M_2} < M_0, \qquad L_1 = 2\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}} \quad \text{при } \frac{M_1^2}{2M_2} \geqslant M_0$$

$$L_2 = \frac{M_0}{M_1} + \frac{M_1}{M_2} \quad \text{при } \frac{M_1^2}{M_2} < M_0, \qquad L_2 = 2\sqrt{\frac{M_0}{M_2}} \quad \text{при } \frac{M_1^2}{M_2} \geqslant M_0$$

Таким образом, для данного уравнения (1.1) рассматриваются лишь такие значения $M_1$ и $M_2$, которые при фиксированном $M_0$ удовлетворяют приведенным выше неравенствам. Однако и в этом случае величина $y_{\max}(T)$ максимальной накопленной ошибки при учете ограниченности $|f'(u)|$ и $|f''(u)|$ может быть значительно меньше, чем в случае, когда ограничен только $|f(u)|$.

Условия (2.6) позволяют достаточно просто решить следующую вырожденную вариационную задачу: в классе $A$ функций, которые удовлетворяют условиям (2.1) и вторые производные которых могут иметь на $[0, T-1]$ конечное число точек разрыва первого рода, найти функцию $f_{\max}(u)$, доставляющую максимум функционалу (2.5). Построение $f_{\max}(u)$ (будем называть ее максимальной функцией) проводится следующим образом: произвольная функция $f(u)$ из $A$ последовательно преобразовывается так, чтобы преобразованная функция оставалась в $A$, а функционал (2.5) мог только увеличиваться. Полученная в результате этого процесса функци не будет зависеть от выбора $f(u)$ и будет максимальной. Предварительно вводится следующее определение.

Пусть на $[u_0, \infty]$ задан класс $E$ функций $\varphi(u)$, удовлетворяющих условиям:

$$(1)\ |\varphi'(u)| \leqslant M_1, \quad |\varphi''(u)| \leqslant M_2; \qquad (2)\ \varphi(u_0) = b_0, \quad \varphi'(u_0) = b_{0,1}$$

$$(3)\ \varphi(u_\varphi) = b_1, \quad \varphi'(u_\varphi) = 0 \qquad (4)\ \varphi(u) \equiv b_1 \quad \text{при } u > u_\varphi$$

Здесь точка $u_0$ фиксирована, а точка $u_\varphi$ зависит от выбора функций $\varphi(u)$.

Пусть каждой паре значений $\varphi(u)$, $\varphi'(u)$ соответствует точка $B(\varphi(u), \varphi'(u))$ плоскости $N$. Функцию $\varphi_1(u)$ из $E$ будем называть оптимальной функцией, осуществляющей на $[u_0, u_{\varphi_1}]$ переход из точки $B_0(b_0, b_{01})$ в точку $B_1(b_1, 0)$ плоскости $N$, если для точки $u_{\varphi_1}$, соответствующей $\varphi_1(u)$, выполняется следующее неравенство $u_{\varphi_1} - u_0 \leqslant u_\varphi - u_0$, где $u_\varphi$ соответствует произвольной функции $\varphi(u)$ из $E$. Существование, единственность и метод построения оптимальной функции $\varphi_1(u)$ показаны в работах [5,6].

На отрезке $[-\infty, u_0]$ также существует и единственна оптимальная функция $\varphi_1(u)$, осуществляющая на $[u_0, u_{\varphi 1}]$ (здесь $u_{\varphi 1} \leqslant u_0$) переход из точки $B(b_0, b_{01})$ в точку $B_1(b_1, 0)$.

Для того чтобы отличать эти две оптимальные функции, будем указывать знак выражения $u_{\varphi_1} - u_0$.

Рассмотрим теперь один из сегментов $[u_{jl}, u_{j+1,\,l}]$. Отбросим для простоты обозначений индекс $l$.

Пусть для определенности $F_1(u_{j+1}) > F_1(u_j)$. Определим функцию $g_j(u)$ на отрезке $[u_j, u_{j+1}]$ (см. фиг. 2). На $[u_j, u_{j,1}]$, где $u_{j1} - u_j \geqslant 0$ функция $g_j(u)$ будет оптимальной функцией, осуществляющей на $[u_j, u_{j1}]$ переход из точки $B_j(f(u_j), f'(u_j))$ в точку $B^-(-M_0, 0)$ плоскости $N$. На $[u_{j+1,\,0}, u_{j+1}]$, где $u_{j+1,\,0} \leqslant u_{j+1}$, $g_j(u)$ является оптимальной функцией, осуществляющей на $[u_{j+1}, u_{j+1,\,0}]$ переход из точки $B_{j+1}(f(u_{j+1}), f'(u_{j+1}))$ в точку $B^-(-M_0, 0)$. На интервале $(u_{j1}, u_{j+1,\,0})$ имеет место тождество $g_j(u) \equiv -M_0$. Учитывая, что $g_j(u_j) = f(u_j)$, $g_j(u_{j+1}) = f(u_{j+1})$ и $f(u)$ принадлежит к $A$, нетрудно показать, что $u_{j,1} - u_j \leqslant L_1$, $u_{j+1} - u_{j+1,\,0} \leqslant L_1$. Так как $u_{j+1} - u_j \geqslant 2L_1$, то условия, введенные при определении $g_j(u)$, не противоречивы. Из простых рассуждений следует также, что $|g_j(u)| \leqslant M_0$ на $[u_j, u_{j+1}]$.

Заменим на отрезке $[u_j, u_{j+1}]$ функцию $f(u)$ на $g_j(u)$ и докажем, что

$$K^{(j)} = \int\limits_{u_j}^{u_{j+1}} F_1(u)\, g_j'(u)\, du - \int\limits_{u_j}^{u_{j+1}} F_1(u)\, f'(u)\, du \geqslant 0 \tag{2.7}$$

Выражение (2.7) можно записать в виде: (2.8)

$$\int\limits_{u_j}^{u_{j1}^*} [g_j'(u) - f'(u)]\, F_1(u)\, du + \int\limits_{u_{j1}^*}^{u_{j1}} [g_j'(u) - f'(u)]\, F_1(u)\, du - \int\limits_{u_{j1}}^{u_{j+1,\,0}} f'(u)\, F_1(u)\, du +$$

$$+ \int\limits_{u_{j+1,\,0}}^{u_{j+1,\,0}^*} [g_j'(u) - f'(u)]\, F_1(u)\, du + \int\limits_{u_{j+1,\,0}^*}^{u_{j+1}} [g_j'(u) - f'(u)]\, F_1(u)\, du$$

Здесь $u_j \leqslant u_{j1}^* \leqslant u_{j1}$. Если $u_j < u_{j1}^* < u_{j1}$, то в точке $u_{j,1}^*$ кривые $g_j'(u)$ и $f'(u)$ пересекаются. Из свойств оптимальных функций [5, 6] следует, что на $[u_j, u_{j1}]$ может быть не более одной точки пересечения кривых $g_j'(u)$ и $f'(u)$ и при этом $g_j'(u) - f'(u) \leqslant 0$ на $[u_j, u_{j1}^*]$. Аналогичное замечание можно сделать относительно точки $u_{j+1,\,0}^*$, причем на $[u^*_{j+1,\,0}, u_{j+1}]$ $g_j'(u) - f'(u) \geqslant 0$. Для первого, второго, четвертого и пятого интегралов правой части (2.8) выполняются условия применения обобщенной теоремы о среднем. К третьему интегралу из (2.8) теорема о среднем непосредственно неприменима, но, выделяя на $(u_{j1}, u_{j+1,\,0})$ интервалы, на которых $f'(u)$ знакопостоянна, и применяя на этих интервалах теорему о среднем, можно получить неравенство

$$-\int\limits_{u_{j1}}^{u_{j+1,\,0}} F_1(u)\, f'(u)\, du \leqslant -F_1(u_3^*) \int\limits_{u_{j1}}^{u_{j+1,\,0}} f'(u)\, du \qquad (u_{j1} < u_3^* < u_{j+1,\,0})$$

Применяя теорему о среднем к остальным интегралам из (2.8), получаем

$$K^{(j)} \geqslant \sum_{i=1}^{5} F_1(u_i^*)\, K_i^{(j)} \tag{2.9}$$

где $K_i^{(j)}$ есть $i$-ый интеграл из (2.8), если положить $F_1(u) \equiv 1$

$$u_1^* \in (u_j, u_{j1}^*), \qquad u_2^* \in (u_{j1}^*, u_{j1}), \qquad u_3^* \in (u_{j1}, u_{j+1,\,0})$$

$$u_4^* \in (u_{j+1,\,0}, u_{j+1,\,0}^*), \qquad u_5^* \in (u_{j+1,\,0}^*, u_{j+1})$$

и, следовательно,

$$F_1(u_1^*) \leqslant F_1(u_2^*) \leqslant F_1(u_3^*) \leqslant F_1(u_4^*) \leqslant F_1(u_5^*) \tag{2.10}$$

Так как граничные условия у функций $g_i(u)$ и $f(u)$ в точках $u_j$ и $u_{j+1}$ совпадают, то

$$K_1^{(j)} + \ldots + K_5^{(j)} = 0 \tag{2.11}$$

Очевидно, что

$$K_1^{(j)} + K_2^{(j)} \leqslant 0, \qquad K_4^{(j)} + K_5^{(j)} \geqslant 0 \tag{2.12}$$

из (2.9), (2.10), (2.11), (2.12) следует, что $K^{(j)} \geqslant 0$.

Если бы выполнялось неравенство $F_1(u_j) > F_1(u_{j+1})$, то функция $g_j(u)$ на отрезках $[u_j, u_{j1}]$ и $[u_{j+1,\,0}, u_{j+1}]$ была бы определена как оптимальная функция, осуществляющая на отрезке $[u_j, u_{j1}]$ переход из точки $B_j(f(u_j), f'(u_j))$ в точку $B^+(M_0, 0)$ плоскости $N$; и как оптимальная функция, осуществляющая на отрезке $[u_{j+1}, u_{j+1,\,0}]$ переход из точки $B_{j+1}(f(u_{j+1}), f'(u_{j+1}))$ в точку $B^+(M_0, 0)$; на интервале $(u_{j1}, u_{j+1,\,0})$ будем иметь $g_j(u) \equiv M_0$; и в этом случае $K^{(j)} \geqslant 0$.

Определим теперь на $[0, T-1]$ функцию $g(u)$ следующим образом. Функция $g(u) = g_j(u)$, если $u$ принадлежит отрезку $[u_j, u_{j+1}]$ $(j = 0, 1, \ldots, k)$. Очевидно, что $g(u)$ принадлежит к классу $A$ рассматриваемых функций, и так как $K^{(j)} \geqslant 0$ для любого отрезка $[u_j, u_{j+1}]$, то, заменив на $[0, T-1]$ функцию $f(u)$ на функцию

$g(u)$, можно только увеличить функционал (2.5). Если $F(u_j) < F(u_{j+1})$, то изменению функции $g(u)$ на интервале $(u_{j0}, u_{j1})$ соответствует перемещение на плоскости $N$ точки $B(g(u), g'(u))$ из точки $B^+(M_0, 0)$ в точку $B^-(-M_0, 0)$. Заметим, что точка $u_{j0}$ на $(u_{j-1}, u_j)$ определяется (фиг. 2) аналогично точке $u_{j+1,0}$ на интервале $(u_j, u_{j+1})$.

Пусть $E(u - c_{j0})$ оптимальная функция, осуществляющая на $[c_{j0}, c_{j1}]$ переход из точки $B^+(M_0, 0)$ в точку $B^-(-M_0, 0)$ плоскости $N$. Эту функцию легко построить.

Выражение для $E''(u - c_{j0})$ на отрезке $[c_{j0}, c_{j1}]$ для случая, когда $\frac{1}{2}M_1^2/M_2 < M_0$ имеет вид

$$E''(u - c_{j0}) = -M_2 \quad \text{для } u \text{ на } \left[c_{j0},\ c_{j0} + \frac{M_1}{M_2}\right]$$

$$E''(u - c_{j0}) = 0 \quad \text{для } u \text{ на } \left[c_{j0} + \frac{M_1}{M_2},\ c_{j0} + \frac{2M_0}{M_1}\right]$$

$$E''(u - c_{j0}) = M_2 \quad \text{для } u \text{ на } \left[c_{j0} + \frac{2M_0}{M_1},\ c_{j0} + \frac{2M_0}{M_1} + \frac{M_1}{M_2}\right]$$

Такой же простой вид имеет формула в случае $\frac{1}{2}M_1^2 / M_2 > M_0$. $E(u - c_{j0})$ — оптимальная функция, поэтому $c_{j1} - c_{j0} \leqslant u_{j1} - u_{j0}$. Так как $F_1(u)$ на $(u_{j0}, u_j)$ не возрастает, а на $(u_j, u_{j1})$ не убывает, то можно так определить положение интервала $(c_{j0}, c_{j1})$ на интервале $(u_{j0}, u_{j1})$, чтобы любое значение функции $F_1(u)$ на этом интервале было не меньше тех значений, которые $F_1(u)$ принимает на интервалах $(u_{j0}, c_{j0})$ и $(c_{j1}, u_{j1})$.

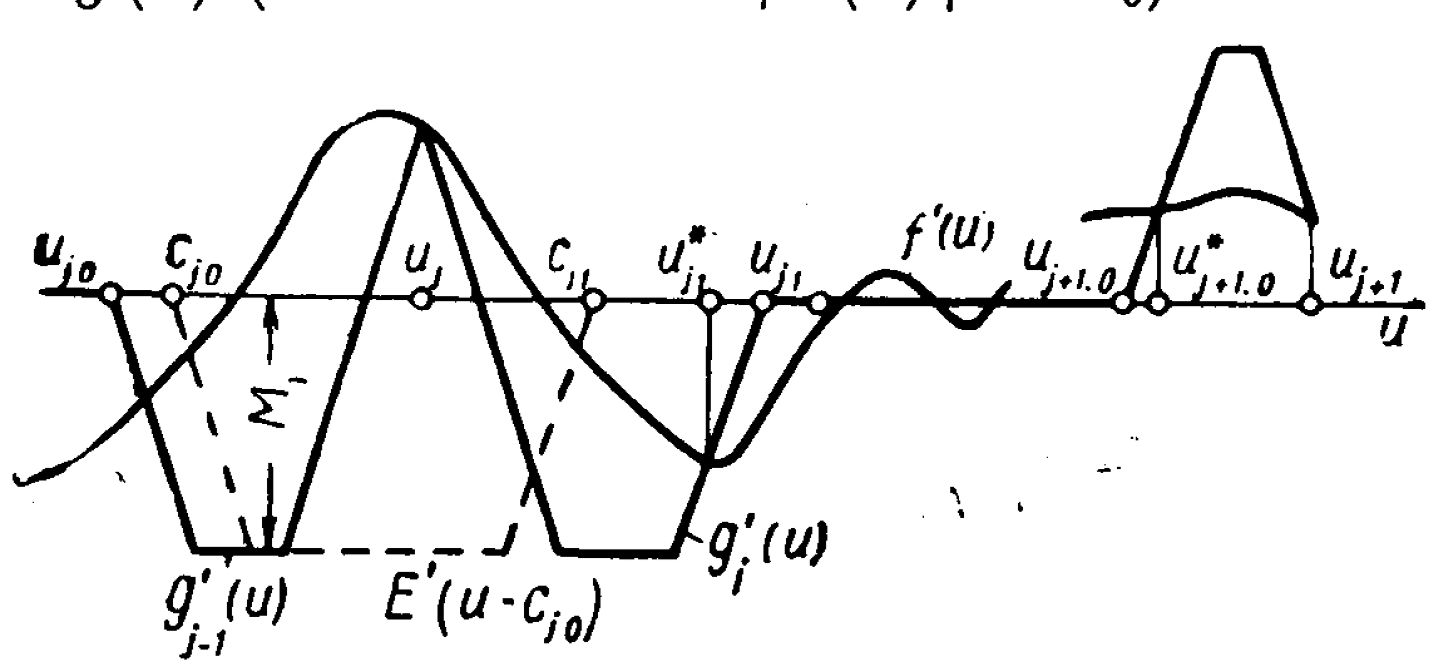
Пусть $F_1(u_j) > F_1(u_{j+1})$, тогда изменению функции $g(u)$ на $[u_{j0}, u_{j1}]$ соответствует перемещение точки $B(g(u), g'(u))$ из точки $B^-(-M_0, 0)$ в точку $B^+(M_0, 0)$. Обозначим через $E_1(u - c_{j0})$ оптимальную функцию, осуществляющую на $[c_{j0}, c_{j1}]$ переход из точки $B^-(-M_0, 0)$ в точку $B^+(M_0, 0)$ плоскости $N$.

Очевидно, что $E_1(u - c_{j0}) = -E(u - c_{j0})$ и можно так определить положение подынтервала $(c_{j0}, c_{j1})$ на интервале $(u_{j0}, u_{j1})$, чтобы любое значение $F_1(u)$ на $(c_{j0}, c_{j1})$ было не больше любого значения $F_1(u)$ на $(u_{j0}, c_{j0})$ и $(c_{j1}, u_{j1})$. Заменим на $[0, T-1]$ функцию $g(u)$ на функцию $h(u)$, которую определим так:

$$h(u) = \pm E(u - c_{j0}) \text{ на } (c_{j0}, c_{j1}),\quad h(u) = \pm M_0 \text{ на } (u_{j0}, c_{j0}),\quad h(u) = \mp M \text{ на } (c_{j1}, u_{j1}),$$

где верхние знаки для $F_1(u_j) < F_1(u_{j+i})$, а нижние для $F_1(u_j) > F_1(u_{j+1})$.

Если точка $u$ не принадлежит ни одному из интервалов $(u_{j0}, u_{j1})$, то полагаем $h(u) = g(u)$ (в этих точках $|h(u)| = M_0$). Так как $h(u)$ принадлежит к классу $A$ рассматриваемых функций, то, применяя теорему о среднем, легко показать, что от замены $g(u)$ на $h(u)$ функционал (2.5) может только увеличиться. Теперь для увеличения $y(T)$ мы можем лишь изменять положение точек $c_{j0}$ $(j = 1, \ldots, k)$.




Фиг. 2

Для определения $c_{j0}$ ищем максимум выражения

$$\Phi(c_{j0}) = \int_{c_{j0}}^{c_{j0}+L} F_1(u)\, E'(u - c_{j0})\, du \qquad \left(L = \frac{2M_0}{M_1} + \frac{M_1}{M_2}\right) \tag{2.13}$$

Точка $c_{j0}$ должна быть корнем уравнения

$$\Phi'(c_{j0}) = -\int_{c_{j0}}^{c_{j0}+L} F_1(u)\, E''(u - c_{j0})\, du = 0 \tag{2.14}$$

Подставляя в (2.14) выражение для $E''(u - c_{j0})$, получим (2.15)

$$-Z\left(c_{j0} + \frac{M_1}{M_2}\right) + Z(c_{j0}) + Z(c_{j0} + L) - Z\left(c_{j0} + \frac{2M_0}{M_1}\right) = 0; \qquad Z(u) = \int_0^u F_1(u)\, du$$

Легко показать, что это уравнение имеет хотя бы один действительный корень на $(u_j - L,\ u_j + L)$, и что все действительные корни, лежащие на этом интервале, доставляют одно и тоже значение выражению (2.13). Функцию $h(u)$, у которой $c_{j0}$ есть корни (2.14), обозначим $f_{\max}(u)$; это и есть максимальная функция. Заметим, что максимальная функция может быть и не единственной, но все максимальные функции доставляют одно и то же значение функционалу (2.5).

Учитывая вид функции $f_{\max}(u)$ и применяя теорему о среднем, $y_{\max}(T)$ можно представить в виде:

$$|y_{\max}(T)| = |F_1(u_0^*)M_0 - \sum_{j=1}^{k} F_1(u_j^*)\,2M_0(-1)^{j-1}| \tag{2.16}$$

Здесь

$$u_0^* \in (0, L_2)|, \qquad u_j^* \in (c_{j0}, c_{j1})|, \qquad c_{j1} - c_{j0} = L.$$

Если $M_2 \to \infty$, $M_1 \to \infty$, то $L_2 \to 0$, $L \to 0$, и, следовательно, в этом случае

$$|y_{\max}(T)| = |F_1(0)M_0 - \sum_{j=1}^{k} F_1(u_{j,l})\,2M_0(-1)^{j+1}| = M_0 \sum_{j=1}^{[T]-1} |\psi_j| \tag{2.17}$$

(последнее равенство получаем, используя выражения (1.7) и (1.8), таким образом приходим к случаю, рассмотренному Я. Н. Ройтенбергом [3].

*Замечание 1.* Указанный выше метод построения максимальной функции полностью применим и к линейным дифференциальным уравнениям.

*Замечание 2.* Очевидно, что указанный выше метод позволяет определить величину $y_{\max}(T)$ в следующей нелинейной системе автоматического регулирования

$$x_1^{\cdot} = F_0(f(t) - x_4), \qquad x_2^{\cdot} = F_1(x_1), \qquad x_3^{\cdot} = F_2(x_2)$$
$$L_1\{y(t)\} = x_3, \qquad L_2\{x_4\} = y$$

Здесь

$$F_i(u) = u \text{ при } |u| \leqslant M_i, \qquad F_i(u) = M_i \quad \text{при } |u| > M_i$$

а $L_1$ и $L_2$ — линейные дифференциальные операторы, точка — производные по времени.

*Пример.* Определим максимальное значение $y_{\max}(T)$ при $T = 13$ частного решения уравнения

$$y(t+2) + 1.75\,y(t+1) + y(t) = f(t) \tag{2.18}$$

в случаях

$$(1)\ |f(u)| \leqslant M_0, \quad |f'(u)| \leqslant M_1, \quad |f''(u)| \leqslant M_2, \qquad (2)\ |f(u)| \leqslant M_0. \qquad \begin{pmatrix} M_0 = 3 \\ M_1 = 2 \\ M_2 = 13 \end{pmatrix}$$

Используя указанный выше метод, находим, что в первом случае $y_{\max}(T) = 19$, во втором случае $y_{\max}(T) = 24$. Таким образом, если не учитывать ограничений, наложенных на $|f'(u)|$ и $|f''(u)|$, то $y_{\max}(T)$ увеличится на 25%.

Поступила 6 VII 1959

## ЛИТЕРАТУРА

1. Булгаков Б. В. и Кузовков Н. Т. О накоплении возмущений в линейных системах с переменными параметрами. ПММ, т. XIV, вып. 1, 1950.
2. Булгаков Б. В. Прикладная теория гироскопов, Гостехиздат, 1955.
3. Ройтенберг Я. Н. О накоплении возмущений в нестационарных линейных импульсных системах. ПММ, т. XXII, вып. 4, 1958.
4. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. Гостехиздат, 1952.
5. Фельдбаум А. А. К вопросу о синтезе оптимальных систем автоматического регулирования. Тр. второго Всесоюз. совещ. по теории автоматического регулирования, т. II, 1955.
6. Фельдбаум А. А. Электрические системы автоматического регулирования. Оборонгиз, 1957.