ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОЙ ГИРОСКОПИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

И. З. Пирогов
(Москва)

При исследовании при помощи второй методы Ляпунова вопроса об устойчивости движения гироскопической системы стабилизации, установленной на корабле, совершающем сложное маневрирование, необходимо построить функцию Ляпунова для уравнений в вариациях. Последние в этом случае представляют собой систему линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Эффективные методы построения функций Ляпунова для таких систем даны Н. Г. Четаевым [1]. Границы областей устойчивости, получаемых при помощи этих методов, изучены Б. С. Разумихиным [2]. В работе Я. Н. Ройтенберга [3], примыкающей к указанным трудам, для построения функции Ляпунова исходная система дифференциальных уравнений предварительно преобразовывается к новым переменным, являющимся нормальными координатами для некоторой вспомогательной системы дифференциальных уравнений. Следуя этому методу, построим функцию Ляпунова для дифференциальных уравнений рассматриваемой гироскопической системы, имеющих следующий вид:

$$x_1 + x_2^{\cdot} - f_1(t)\,x_3 = 0, \qquad x_1^{\cdot} - m_1x_2 + f_1(t)\,x_4 - m_2x_5 = 0$$

$$-f_1(t)\,x_1 + m_1x_3 + x_4^{\cdot} + m_3x_4 = 0, \qquad f_1(t)\,x_2 + x_3^{\cdot} - [m_4 + f_2(t)]\,x_4 = 0 \qquad (1)$$

$$m_5x_2 + x_5^{\cdot} + m_5x_5 = 0$$

Здесь $x_1, \ldots, x_5$ — координаты системы, $m_1, \ldots, m_5$ — постоянные коэффициенты, $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — некоторые функции времени, определяемые законом маневрирования корабля.

Преобразуем систему уравнений (1) к новым переменным ξ_i $(i = 1, \ldots, 5)$, представляющим собой нормальные координаты для системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, в которую переходит система (1) при $f_1(t) \equiv f_2(t) \equiv 0$.

Характеристическое уравнение указанной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для реальных значений параметров будет иметь один действительный корень и две пары комплексных корней, которые обозначим так:

$$\lambda_1 = \varkappa, \qquad \lambda_2, \lambda_3 = \varepsilon_1 \pm i\omega_1, \qquad \lambda_4, \lambda_5 = \varepsilon_2 \pm i\omega_2 \qquad (2)$$

Переменные ξ_i определяются из следующих соотношений [3]:

$$x_1 = \frac{\varkappa(\varkappa + m_5)}{m_5}\,\xi_1 + \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + m_5) - \omega_1^2}{m_5}\,\xi_2 + \frac{(2\varepsilon_1 + m_5)\,\omega_1}{m_5}\,\xi_3$$

$$x_2 = -\frac{\varkappa + m_5}{m_5}\,\xi_1 - \frac{\varepsilon_1 + m_5}{m_5}\,\xi_2 - \frac{\omega_1}{m_5}\,\xi_3$$

$$x_3 = \xi_4, \qquad x_4 = \frac{1}{m_4}\,(\varepsilon_2\xi_4 + \omega_2\xi_5), \qquad x_5 = \xi_1 + \xi_2 \qquad (3)$$

Новые переменные ξ_i будут удовлетворять следующим дифференциальным уравнениям:

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \varkappa\xi_1 + f_1(t)\,(c_{14}\xi_4 + c_{15}\xi_5)$$

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \varepsilon_1\xi_2 + \omega_1\xi_3 + f_1(t)\,(c_{24}\xi_4 + c_{25}\xi_5)$$

$$\frac{d\xi_3}{dt} = \varepsilon_1\xi_3 - \omega_1\xi_2 + f_1(t)\,(c_{34}\xi_4 + c_{35}\xi_5) \qquad \mathbf{(4)}$$

$$\frac{d\xi_4}{dt} = \varepsilon_2\xi_4 + \omega_2\xi_5 + f_1(t)\,(c_{41}\xi_1 + c_{42}\xi_2 + c_{43}\xi_3) + f_2(t)(c_{44}\xi_4 + c_{45}\xi_5)$$

$$\frac{d\xi_5}{dt} = \varepsilon_2\xi_5 - \omega_2\xi_4 + f_1(t)\,(c_{51}\xi_1 + c_{52}\xi_2 + c_{53}\xi_3) + f_2(t)\,(c_{54}\xi_4 + c_{55}\xi_5)$$

где

$$c_{14} = -c_{24} = -\frac{m_5(\varkappa m_4 + \varepsilon_2)}{m_4[\omega_1^2 + (\varepsilon_1 - \varkappa)^2]}, \quad c_{15} = -c_{25} = -\frac{m_5\omega_2}{m_4[\omega_1^2 + (\varepsilon_1 - \varkappa)^2]}$$

$$c_{34} = -\frac{m_5[m_4\omega_1^2 + (\varepsilon_1 - \varkappa)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)]}{m_4\omega_1[\omega_1^2 + (\varepsilon_1 - \varkappa)^2]}, \quad c_{35} = -\frac{m_5\omega_2(\varepsilon_1 - \varkappa)}{m_4\omega_1[\omega_1^2 + (\varepsilon_1 - \varkappa)^2]}$$

$$c_{41} = \frac{m_5 + \varkappa}{m_5}, \quad c_{51} = \frac{m_5 + \varkappa}{m_5\omega_2}(\varepsilon_2 + m_3 + \varkappa m_4) \tag{5}$$

$$c_{42} = \frac{m_5 + \varepsilon_1}{m_5}, \quad c_{52} = \frac{m_5 + \varepsilon_1}{m_5\omega_2}(\varepsilon_2 + m_3 + \varepsilon_1 m_4) - \frac{m_4\omega_1^2}{m_5\omega_2}$$

$$c_{43} = \frac{\omega_1}{m_5}, \quad c_{53} = \frac{\omega_1}{m_5\omega_2}[\varepsilon_2 + m_3 + m_4(2\varepsilon_1 + m_5)]$$

$$c_{44} = \frac{\varepsilon_2}{m_4}, \quad c_{54} = \frac{(\varepsilon_2 + m_3)\varepsilon_2}{m_4\omega_2}, \quad c_{45} = \frac{\omega_2}{m_4}, \quad c_{55} = \frac{\varepsilon_2 + m_3}{m_4}$$

В качестве функции Ляпунова примем следующую определенно-отрицательную функцию:

$$V = -\frac{1}{2}[p_1\xi_1^2 + p_2(\xi_2^2 + \xi_3^2) + p_3(\xi_4^2 + \xi_5^2)] \tag{6}$$

где p_1, p_2, p_3 — некоторые постоянные положительные коэффициенты. Производная по времени от функции Ляпунова (6)

$$V^{\cdot} = -\left[p_1\frac{d\xi_1}{dt}\xi_1 + p_2\left(\frac{d\xi_2}{dt}\xi_2 + \frac{d\xi_3}{dt}\xi_3\right) + p_3\left(\frac{d\xi_4}{dt}\xi_4 + \frac{d\xi_5}{dt}\xi_5\right)\right] \tag{7}$$

после подстановки значений $d\xi_i / dt$ $(i = 1, \ldots, 5)$ из уравнений (4) принимает вид:

$$V^{\cdot} = a_{11}\xi_1^2 + a_{22}\xi_2^2 + a_{33}\xi_3^2 + a_{44}\xi_4^2 + a_{55}\xi_5^2 + 2a_{14}f_1(t)\xi_1\xi_4 + 2a_{15}f_1(t)\xi_1\xi_5 + $$
$$+ 2a_{24}f_1(t)\xi_2\xi_4 + 2a_{25}f_1(t)\xi_2\xi_5 + 2a_{34}f_1(t)\xi_3\xi_4 + 2a_{35}f_1(t)\xi_3\xi_5 + 2a_{45}f_2(t)\xi_4\xi_5 \tag{8}$$

где

$$a_{11} = -p_1\varkappa, \quad a_{22} = a_{33} = -p_2\varepsilon_1, \quad a_{44} = -p_3[\varepsilon_2 + c_{44}f_2(t)], \quad a_{55} = -p_3[\varepsilon_2 + c_{55}f_2(t)]$$

$$a_{14} = -\frac{p_1c_{14} + p_3c_{41}}{2}, \quad a_{15} = -\frac{p_1c_{15} + p_3c_{51}}{2}, \quad a_{24} = -\frac{p_2c_{24} + p_3c_{42}}{2}, \quad a_{25} = -\frac{p_2c_{25} + p_3c_{52}}{2}$$

$$a_{34} = -\frac{p_2c_{34} + p_3c_{43}}{2}, \quad a_{35} = -\frac{p_2c_{35} + p_3c_{53}}{2}, \quad a_{45} = -\frac{p_3(c_{45} + c_{54})}{2} \tag{9}$$

Дискриминант квадратичной формы (8) будет следующим:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14}f_1(t) & a_{15}f_1(t) \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24}f_1(t) & a_{25}f_1(t) \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34}f_1(t) & a_{35}f_1(t) \\ a_{14}f_1(t) & a_{24}f_1(t) & a_{34}f_1(t) & a_{44} & a_{45}f_2(t) \\ a_{15}f_1(t) & a_{25}f_1(t) & a_{35}f_1(t) & a_{45}f_2(t) & a_{55} \end{vmatrix} \tag{10}$$

Достаточные условия асимптотической устойчивости системы (1) состоят в том, что $V^{\cdot}$ должна быть определенно-положительной квадратичной формой. Для последнего же необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры D_i $(i = 1, \ldots, 5)$ дискриминанта (10) были строго положительными для любого момента времени t, т. е. чтобы для любого момента времени t выполнялись следующие неравенства:

$$D_1 = -p_1\varkappa > 0, \qquad D_2 = p_1p_2\varkappa\varepsilon_1 > 0, \qquad D_3 = -p_1p_2^2\varkappa\varepsilon_1^2 > 0$$

$$D_4 = p_1p_2^2\varkappa\varepsilon_1^2a_{44} - p_2[p_2a_{14}^2 + p_1\varepsilon_1\varkappa(a_{24}^2 + a_{34}^2)]f_1^2 > 0$$

$$D_5 = \{-p_1\varkappa(a_{24}a_{35} - a_{25}a_{34})^2 - p_2\varepsilon_1[(a_{14}a_{35} - a_{15}a_{34})^2 + (a_{14}a_{25} - a_{15}a_{24})^2]\}f_1^4 -$$
$$- p_2\{a_{44}[p_1\varkappa\varepsilon_1(a_{35}^2 + a_{25}^2) + p_2\varepsilon_1^2a_{15}^2] + a_{55}[p_1\varkappa\varepsilon_1(a^2_{34} + a_{24}^2) + p_2\varepsilon_1^2a_{14}^2] -$$
$$- 2[p_1\varkappa\varepsilon_1(a_{34}a_{35} + a_{24}a_{25}) + p_2\varepsilon_1^2a_{14}a_{15}]a_{45}f_2\}f_1^2 - p_1p_2^2\varkappa\varepsilon_1^2(a_{44}a_{55} - a_{45}^2f_2^2) > 0$$

Область устойчивости построим в координатной плоскости f_1f_2. При этом для максимального расширения этой области будем варьировать значения коэффициентов

p_1, p_2, p_3 в функции Ляпунова (6). Для значений параметров системы (1)

$m_1 = 1.54 \cdot 10^{-6}$ сек^2, $m_2 = 0.924 \cdot 10^{-6}$ сек$^{-2}$, $m_3 = 6 \cdot 10^{-3}$ сек$^{-1}$, $m_4 = 25.974$, $m_5 = 10^{-3}$ сек$^{-1}$

оптимальными оказываются следующие значения варьируемых коэффициентов:

$$p_1 = 0.1, \qquad p_2 = 1, \qquad p_3 = 0.127$$

При этом неравенства (11) удовлетворяются в следующей области:

$$|f_1(t)| \leqslant 0.75 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}, \qquad |f_2(t)| \leqslant 2 \tag{12}$$

Неравенства (12) определяют область, внутри которой функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ могут изменяться по любому произвольному закону без нарушения устойчивости рассматриваемой гироскопической системы.

Заметим, что при $f_1 = \text{const}$, $f_2 = \text{const}$, как следует из условий Гурвитца, система устойчива в области

$$|f_1| \leqslant 1.24 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^{-1}, \qquad |f_2| \leqslant 2$$

Поступила
29 VIII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. Изд. 2. ГИТТЛ, М., стр. 174, 1955.
2. Разумихин Б. С. Об устойчивости неустановившихся движений. ПММ, т. XX, вып. 2, стр. 266, 1956.
3. Ройтенберг Я. Н. Об одном методе построения функций Ляпунова для линейных систем с переменными коэффициентами. ПММ, т. XXII, вып. 2, стр. 167, 1958.

О НАКОПЛЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЙ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ

Л. С. Гноенский

(Москва)

Задача об определении максимального в момент времени T значения $y_{\max}(T)$ частного решения линейного дифференциального уравнения $L\{y(t)\} = f(t)$ при условии, что $|f(t)| \leqslant M_0$; $0 \leqslant t \leqslant T$ была решена в работах Б. В. Булгакова и Н. Т. Кузовкова [1,2]. Аналогичную задачу для линейных разностных уравнений рассмотрел Я. Н. Ройтенберг [3]. Однако, в ряде случаев, на правую часть уравнения накладываются более жесткие условия, а именно, кроме ограниченности модуля функции $f(t)$ имеет место ограниченность по модулю и некоторых ее производных, например $f'(t)$, $f''(t)$. Такая постановка имеет, например, место для следящих систем, когда ограниченны положение, скорость и ускорение объекта, за которым осуществляется слежение. При наличии этих дополнительных ограничений на правую часть, величина $y_{\max}(T)$ может быть значительно меньше, чем в случае ограниченности только $|f(t)|$. Ниже излагается способ определения максимального значения $y_{\max}(T)$ частного решения линейного разностного уравнения $L\{y(t)\} = f(t)$ в случаях, когда

$$|f^{(m)}(t)| \leqslant M_m, \qquad m > 0 \tag{0.1}$$

$$|f(t)| \leqslant M_0, \qquad |f'(t)| \leqslant M_1, \qquad |f''(t)| \leqslant M_2 \tag{0.2}$$

1. Частное решение уравнения

$$y(t+n) + P_1(t)\, y(t+n-1) + \ldots + P_n(t)\, y(t) = f(t) \tag{1.1}$$

имеет вид

$$y(t) = \sum_{i=0}^{[t]-1} \psi_i(t)\, f(t - [t] + i) \tag{1.2}$$

Здесь и в дальнейшем символ $[t]$ означает целую часть t, а функции $\psi_i(t)$ определяются линейно независимой системой решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (1.1).