О ФОРМАХ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ, ВЫРАЖЕННЫХ ПРИ ПОМОЩИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В. М. Деев (Харьков)

Представим решение уравнения равновесия в перемещениях

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\nabla^2\cdot\mathbf{u} = 0 \qquad (1)$$

где Δ — оператор Лапласа, ∇ — оператор [1] Гамильтона, $\nabla^2 = \nabla\nabla$ (операторы перемножены диадно), ν — коэффициент Пуассона, а точка означает скалярное умножение в виде

$$\mathbf{u} = \alpha\mathbf{R} + \beta(\nabla\mathbf{R})\cdot\mathbf{r} + \gamma\mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R}) + \delta\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R}) + \varepsilon r^2(\nabla^2\cdot\mathbf{R}) \qquad (2)$$

где α, β, γ, δ, ε — постоянные, подлежащие определению, $\mathbf{R}$ — произвольный гармонический вектор, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $r^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r}$. В выражении (2) слагаемые $\mathbf{R}$ и $\mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R})$ являются гармоническими, а слагаемые $(\nabla\mathbf{R})\cdot\mathbf{r}$, $\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R})$ и $r^2(\nabla^2\cdot\mathbf{R})$ бигармоническими функциями. Подставляя (2) в (1), получаем условия, которым должны удовлетворять постоянные α, β, γ, δ, ε:

$$\gamma + \delta + 2(3-4\nu)\varepsilon = 0, \quad \alpha + (3-4\nu)\beta + 2\gamma + 2(3-2\nu)\delta + 4(2-3\nu)\varepsilon = 0 \qquad (3)$$

Определив из (3) α и γ, получаем решение уравнения (1) в виде

$$\mathbf{u} = [(4\nu-3)\beta + 4(1-\nu)(\varepsilon-\delta)]\mathbf{R} + \beta(\nabla\mathbf{R})\cdot\mathbf{r} + {}$$
$$+ [2(4\nu-3)\varepsilon - \delta]\mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R}) + \delta\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R}) + \varepsilon r^2(\nabla^2\cdot\mathbf{R}) \qquad (4)$$

где β, δ, ε — теперь уже произвольные постоянные, распоряжаясь которыми можно получить как все известные до сих пор формы общего решения, так и ряд новых.

Так, при $\delta = \varepsilon = 0$, $\beta = -1$ получаем решение Папковича — Нейбера [2,3]

$$\mathbf{u}_1 = (3-4\nu)\mathbf{R}_1 - (\nabla\mathbf{R}_1)\cdot\mathbf{r} \qquad (5)$$

При $\varepsilon = \beta = 0$, $\delta = -1$ получаем решение, указанное в работах [4-6]:

$$\mathbf{u}_2 = 4(1-\nu)\mathbf{R}_2 + \mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R}_2) - \mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R}_2) \qquad (6)$$

При $\varepsilon = -1$, $\delta = 2(1-2\nu)$, $\beta = -4(1-\nu)$ получаем решение, указанное в [3]:

$$\mathbf{u}_3 = 2(1-2\nu)\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R}_3) + 4(1-\nu)[\mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R}_3) - (\nabla\mathbf{R}_3)\cdot\mathbf{r}] - r^2(\nabla^2\cdot\mathbf{R}_3) \qquad (7)$$

Кроме решений (5) — (7), из (4) получаются следующие:

при
$$\beta = 0, \quad \varepsilon = \frac{1}{7-8\nu}, \quad \delta = \frac{2(4\nu-3)}{7-8\nu}$$
имеем
$$\mathbf{u}_4 = 4(1-\nu)\mathbf{R}_4 + \frac{2(4\nu-3)}{7-8\nu}\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R}_4) + \frac{1}{7-8\nu}r^2(\nabla^2\cdot\mathbf{R}_4) \qquad (8)$$

при
$$\varepsilon = 1, \quad \delta = 2(4\nu-3), \quad \beta = \frac{4(7-8\nu)(1-\nu)}{3-4\nu}$$
имеем
$$\mathbf{u}_5 = \frac{4(7-8\nu)(1-\nu)}{3-4\nu}(\nabla\mathbf{R}_5)\cdot\mathbf{r} + 2(4\nu-3)\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R}_5) + r^2(\nabla^2\cdot\mathbf{R}_5) \qquad (9)$$

при
$$\beta = 0, \quad \varepsilon = \delta = \frac{1}{8\nu-7}$$
имеем
$$\mathbf{u}_6 = \mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R}_6) + \frac{1}{8\nu-7}[\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R}_6) + r^2(\nabla^2\cdot\mathbf{R}_6)] \qquad (10)$$

при
$$\varepsilon = 0, \quad \delta = -1, \quad \beta = 1$$
имеем
$$\mathbf{u}_7 = \mathbf{R}_7 + (\nabla\mathbf{R}_7)\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R}_7) - \mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R}_7) \qquad (11)$$

при
$$\varepsilon = 1, \quad \delta = -8(1-\nu), \quad \beta = 9-8\nu$$
имеем
$$\mathbf{u}_8 = (9-8\nu)[\mathbf{R}_8 + (\nabla\mathbf{R}_8)\cdot\mathbf{r}] + 2\mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R}_8) - 8(1-\nu)\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R}_8) + r^2(\nabla^2\cdot\mathbf{R}_8) \qquad (12)$$

Решения (8) — (12) являются новыми. Решение (8) выгодно отличается от решения Папковича — Нейбера тем, что не содержит градиента вектора $\mathbf{R}$ и, следовательно, проще последнего по своей структуре (при решении пространственной задачи в криволинейных координатах проще находить $\nabla\cdot\mathbf{R}$, чем $\nabla\mathbf{R}$, причем $\nabla\cdot\mathbf{R}$ можно находить непосредственно). В решении (9) все слагаемые являются бигармоническими функциями. Достаточно простым является решение (10). Кроме решений (8)—(12), из (4) следует бесчисленное множество пятичленных решений вида (12), но с иными коэффициентами. Решения (8)—(12) называем общими, потому что для них $\nabla\cdot\mathbf{u}\neq 0$, $\nabla\times\mathbf{u}\neq 0$ (исключение составляет решение (11), для которого $\nabla\cdot\mathbf{u}_7=0$, $\nabla\times\mathbf{u}_7\neq 0$). Действительно, подставляя β, δ, ε, соответствующие этим решениям, в выражения дивергенции и ротации вектора смещений

$$\nabla\times\mathbf{u} = -2(1-2\nu)[(\beta+\varepsilon+\delta)\nabla\cdot\mathbf{R} + 2\varepsilon\mathbf{r}\cdot(\nabla^2\cdot\mathbf{R})] \tag{13}$$

$$\nabla\times\mathbf{u} = -[4(1-\nu)\beta + 2(1-2\nu)\varepsilon + (5-4\nu)\delta]\nabla\times\mathbf{R} + \\ + [2(4\nu-3)\varepsilon - \delta]\mathbf{r}\cdot(\nabla^2\times\mathbf{R}) + (\delta-2\varepsilon)(\nabla^2\cdot\mathbf{R})\times\mathbf{r} \tag{14}$$

видим, что выполняются неравенства (13). Некоторое разнообразие форм решений может быть получено еще на основе того, что алгебраическая сумма каких-либо решений уравнения (1) также является решением уравнения (1). Так, положив $\mathbf{R}_6 = -(8\nu-7)\mathbf{R}_5$, получаем новое решение в виде

$$u = \frac{u_5 - u_6}{8\nu-7} = -\frac{4(1-\nu)}{3-4\nu}(\nabla\mathbf{R})\cdot\mathbf{r} + \mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R}) - \mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R}) \tag{15}$$

Легко показать, что для того чтобы можно было привести решение (4) к виду решения Папковича — Нейбера (5), необходимо выполнение условий

$$\delta = -2(1-2\nu)\varepsilon, \qquad (7-8\nu)\delta + [2(3-4\nu)^2 - 4(1-\nu)]\varepsilon = 0 \tag{16}$$

Если эти условия выполнены, то решение (4) можно представить в виде

$$\mathbf{u} = (3-4\nu)\mathbf{D} - (\nabla\mathbf{D})\cdot\mathbf{r} \tag{17}$$

где $\mathbf{D}$ является гармоническим вектором, имеющим структуру

$$\mathbf{D} = [-\beta+\delta-2(4\nu-3)\varepsilon]\mathbf{R} + \frac{2(4\nu-3)\varepsilon-\delta}{4(1-\nu)}[\mathbf{r}\cdot(\nabla\mathbf{R}) - (\nabla\mathbf{R})\cdot\mathbf{r}] - \varepsilon\mathbf{r}(\nabla\cdot\mathbf{R}) \tag{18}$$

Из решений (6) — (12) только решение (7) может быть приведено к виду (17), так как его постоянные β, δ, ε удовлетворяют условиям (16). Следует также отметить, что к решениям (5)—(12) можно добавить частное решение уравнения (1) (такое, что $\nabla\cdot\mathbf{u}_r = 0$) в виде $\mathbf{u} = \nabla F + \nabla\times\mathbf{T} + \mathbf{r}\cdot\nabla^3\cdot\mathbf{S}$, где F — произвольная гармоническая скалярная функция, $\mathbf{T}$ и $\mathbf{S}$—произвольные гармонические векторы. Как показано в [5,7], иногда возникает необходимость сохранить в (19) или F, или $\mathbf{T}$ и $\mathbf{S}$. В заключение приведем выражение для тензора напряжений σ, соответствующее представлению u в виде (4):

$$\sigma = \frac{E}{2(1+\nu)}\{[(4\nu-2)(\varepsilon+\beta) - (5-4\nu)\delta](\nabla\mathbf{R} + \mathbf{R}\nabla) - 8\nu\varepsilon\mathbf{r}\cdot(\nabla^2\cdot\mathbf{R})\mathrm{I} + \\ + [2(4\nu-3)\varepsilon-\delta][\mathbf{r}\cdot(\nabla^2\mathbf{R}) + (\mathbf{R}\nabla^2)\cdot\mathbf{r}] + (\delta+2\varepsilon)[(\nabla^2\cdot\mathbf{R})\mathbf{r} + \\ + \mathbf{r}(\nabla^2\cdot\mathbf{R})] + 2\beta(\nabla^2\mathbf{R})\cdot\mathbf{r} + [2\delta(1-2\nu) - 4\nu(\varepsilon+\beta)](\nabla\cdot\mathbf{R})\mathrm{I} + 2\varepsilon r^2(\nabla^3\cdot\mathbf{R})\}$$

где E — модуль упругости, I — единичный тензор.

Поступила 27 III 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Лагалли М. Векторное исчисление. ОНТИ, 1936.
2. Папкович П. Ф. Обзор некоторых общих решений основных дифференциальных уравнений покоя изотропного упругого тела. ПММ, т. I, вып. 1, 1937.
3. Блох В. И. О представлении общего решения основных уравнений статической задачи теории упругости изотропного тела при помощи гармонических функций. ПММ, т. XXII, вып. 4, 1958.
4. Чуриков Ф. С. Об одной форме общего решения уравнений равновесия теории упругости в перемещениях. ПММ, т. XII, вып. 6, 1953.
5. Слободянский М. Г. Общие формы решений уравнений упругости для односвязных и многосвязных областей, выраженные через гармонические функции. ПММ, т. XVIII, вып. 1, 1954.
6. Аржаных И. С. Исследования по механике сплошной среды. Труды Ин-та математики и механики. Изд. АН Узб. ССР, вып. 9, 1952.
7. Eubanks R. A., Sternberg E. On the Completeness of the Boussinesq — Papkovich Stress Functions. J. Rational Mech. Anal., vol. 5, No. 5, 1956.