О НАПРЯЖЕНИЯХ В УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

(Тбилиси)

А. И. Каландия

Рассматриваются постановка и решение в замкнутом виде первой основной задачи теории упругости для полуплоскости, когда для напряжения на бесконечности допускаются любые конечные значения, а главный вектор внешних усилий, приложенных в границе среды, вообще говоря, не конечен. Решение строится методом Н. И. Мусхелишвили [1].

1°. Пусть область S, занятая упругой средой, представляет собой нижнюю полуплоскость $y < 0$ плоскости переменной $z = x + iy$. Границу области — действительную ось x — обозначим через L.Речь идет об определении напряженного состояния упругой полуплоскости S при заданных на ее границе внешних воздействиях.

Относительно компонент напряжения будем предполагать, что они ограниченны во всей области S. Точнее, будем требовать, чтобы компоненты напряжения стремились к определенным конечным пределам, отличным, вообще говоря, от нуля, когда z удаляется в бесконечность по любому пути, оставаясь внутри S. Вращение на бесконечность принимается равным нулю.

Зададимся контурными условиями задачи в виде (ср. [1], стр 346)

$$N(t) = a + f_1(t), \qquad T(t) = b + f_2(t) \qquad (Y_y = N,\ X_y = T \text{ на } L) \tag{1}$$

Здесь N и T — нормальная и касательная составляющие внешнего напряжения, действующего на границу среды a, b — заданные постоянные, а f_1, f_2— заданные на L непрерывные функции абсциссы t, удовлетворяющие при больших $|t|$ условиям

$$f_1(t) = o(t^{-1}), \qquad f_2(t) = o(t^{-1}) \tag{2}$$

Как будет видно из дальнейшего, наличие одних краевых условий (1) недостаточно для однозначного определения напряженного состояния. Точнее говоря, для определенности задачи необходимо, помимо величин a и b, представляющих собой значения на бесконечности компонент напряжения Y_y и X_y соответственно, задавать также значение напряжения X_x на бесконечности:

$$\lim X_x = c \quad \text{при } |z| \to \infty \tag{3}$$

Будем считать, что величина c задана. Положим

$$Y = \int_L f_1(t)\,dt, \qquad X = \int_L f_2(t)\,dt \tag{4}$$

Потребуем теперь, чтобы искомые голоморфные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ представлялись при больших $|z|$ в виде

$$\Phi(z) = \Gamma - \frac{X+iY}{2\pi z} + o(z^{-1}), \qquad \Psi(z) = \Gamma' + \frac{X-iY}{2\pi z} + o(z^{-1}) \tag{5}$$

$$\Phi'(z) = \frac{X+iY}{2\pi z^2} + o(z^{-2}), \qquad \Gamma = \frac{a+c}{4}, \qquad \Gamma' = \frac{1}{2}(a-c) + ib$$

Присоединим к предыдущим условиям следующие условия (6)

$$\varphi(z) = \Gamma z - \frac{X+iY}{2\pi}\ln z + o(1) + \text{const}, \qquad \psi(z) = \Gamma' z + \frac{X-iY}{2\pi}\ln z + o(1) + \text{const}$$

Нетрудно доказать, что при поставленных выше условиях задача допускает одно единственное решение.

Замечание. В известной книге С. П. Тимошенко в качестве применения общего представления функции Эри в виде бесконечного ряда по частным решениям бигармонического уравнения в круговом кольце рассматривается задача о напряжениях в клине, ограниченном прямыми $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \beta$ (ϑ — полярный угол точки $z = re^{i\vartheta}$, $0 < \beta < 2\pi$), при краевых условиях ([2], § 37)

$$N = -q, \quad T = 0 \quad \text{при } \vartheta = 0, \qquad N = T = 0 \quad \text{при } \vartheta = \beta \tag{7}$$

где q — заданная постоянная. Никаких других ограничений, кроме (7), на искомое напряженное состояние не накладывается. Решение задачи разыскивается в виде

$$\Phi(z) = iC\ln z + B, \qquad \Psi(z) = B' + iC' \tag{8}$$

где B, C, B', C'— действительные постоянные, подлежащие определению.

Подстановка (8) в краевые условия (7) дает систему линейных уравнений относительно искомых постоянных, откуда они могут быть определены однозначно, за исключением случаев $\beta = \pi$ (случай полуплоскости) и $\beta - \operatorname{tg} \beta = 0$.

В двух указанных случаях, как показывает ближайшая проверка, определитель системы обращается в нуль.

В случае $\beta = \pi$ наряду с решением ([2], стр. 139, формула [d])

$$\Phi(z) = \frac{q}{2\pi i} \ln z - \frac{q}{2}, \qquad \Psi(z) = -\frac{q}{2\pi i}$$

задача допускает множество решений, даваемых формулами

$$\Phi(z) = \frac{q}{2\pi i} \ln z - \frac{q}{2} + A, \qquad \Psi(z) = -\frac{q}{2\pi i} - 2A \tag{9}$$

где A — произвольная действительная постоянная. Нетрудно убедиться, что величина A влияет лишь на компоненту напряжения X_x, которую поэтому следует подчинить некоторому дополнительному условию для обеспечения единственности.

Что касается случая $\beta - \operatorname{tg} \beta = 0$, то здесь решения вида (8) вообще не существует. Точнее, задача разрешима в функциях (8) лишь при $q = 0$, и тривиальное решение имеет вид:

$$\Phi(z) = A\left(i \ln z + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \beta\right), \qquad \Psi(z) = -A(i + \operatorname{tg} \beta)$$

где A — произвольная действительная постоянная.

2°. При решении поставленной задачи будем следовать Н. И. Мусхелишвили, указавшему простое решение в случае, когда $a = b = c = 0$ ([1], § 93).

На границе полуплоскости S, как известно, будем иметь

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} + t\overline{\Phi'(t)} + \overline{\Psi(t)} = N - iT \tag{10}$$

Производя над обеими частями предыдущего равенства операцию

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{dt}{t - z}$$

где z — произвольная точка области S, принимая во внимание условия (1), (5) и используя известные свойства интеграла типа Коши по бесконечной прямой ([1], § 72), получим

$$\Phi(z) = \Gamma - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{t - z}, \qquad f(t) = f_1(t) - if_2(t) \tag{11}$$

После определения $\Phi(z)$ функция $\Psi(z)$ может быть найдена аналогичным образом, исходя из граничного условия, получаемого из (10) путем перехода к сопряженным значениям. Принимая при этом во внимание (11), получим

$$\Psi(z) = \Gamma + \Gamma' - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t - z} - \Phi(z) - z\Phi'(z) = \Gamma' - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(t)\,t\,dt}{(t - z)^2} \tag{12}$$

На основании известных свойств интеграла вида (11) ([1], § 71) непосредственно заключаем, что если функция $f'(t)$ удовлетворяет условию Гельдера на любом конечном отрезке прямой L, а произведения $tf(t)$, $t^2 f'(t)$ удовлетворяют условию Гельдера также в окрестности бесконечно удаленной точки, то найденные выше функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ будут удовлетворять всем поставленным условиям нашей задачи. В частности, функции Φ, Φ', Ψ будут иметь при больших $|z|$ вид, определяемый формулами (5). Задача решена.

Поступила 27 V 1959

Тбилисский государственный университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М.— Л., 1949.
2. Тимошенко С. П. Теория упругости (пер. с английского). Гостехиздат, Л.— М., 1934.