ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

И. Ш. Рабинович
(Ленинград)

Рассматривается решение задачи о загружении границы полупространства вдоль бесконечной прямой нормальной нагрузкой, изменяющейся по линейному закону.

Пусть граница упругого полупространства есть плоскость $z=0$, ось z направлена по внутренней нормали. Нагрузка распределена вдоль прямой $y=0$ по закону

$$p_x = p_0 x \tag{1}$$

В точке ($x=\xi$, $y=z=0$) выделим из распределенной нагрузки элементарную силу $dP_\xi = p_\xi d\xi = p_0 \xi d\xi$. Компоненты вызываемого этой силой элементарного смещения на основании решения Бусинеска равны ([1], стр. 157)

$$du_\xi = \frac{p_0}{4\pi\mu}\frac{(x-\xi)\,z\xi d\xi}{R_1^3} - \frac{p_0}{4\pi(\lambda-\mu)}\frac{(x-\xi)\,\xi d\xi}{R_1(R_1+z)} \qquad (R_1^2=(x-\xi)^2+y^2+z^2) \tag{2}$$

$$dv_\xi = \frac{p_0}{4\pi\mu}\frac{yz\xi d\xi}{R_1^3} - \frac{p_0}{4\pi(\lambda+\mu)}\frac{y\xi d\xi}{R_1(R_1+z)}, \qquad dw_\xi = \frac{p_0}{4\pi\mu}\frac{z^2\xi d\xi}{R_1^3} + \frac{p_0(\lambda+2\mu)}{4\pi\mu(\lambda+\mu)}\frac{\xi d\xi}{R_1}$$

Интегрируя выражения (2) в пределах изменения ξ от $-\infty$ до $+\infty$, получаем решение поставленной задачи в компонентах смещения:

$$u = \frac{p_0(\lambda+2\mu)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\, z\ln r + \frac{p_0}{2\pi(\lambda+\mu)}\, y \operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y} + \frac{p_0 z}{2\pi\mu} \qquad (r^2=y^2+z^2)$$

$$v = \frac{p_0}{2\pi\mu}\frac{xyz}{r^2} + \frac{p_0}{2\pi(\lambda+\mu)}\, x\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y}, \qquad w = \frac{p_0}{2\pi\mu}\frac{xz^2}{r^2} - \frac{p_0(\lambda+2\mu)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\, x\ln r \tag{3}$$

Отсюда легко получить зависимости для компонент напряжения

$$X_x = \frac{2p_0\sigma}{\pi}\frac{xz}{r^2} \qquad X_y = \frac{p_0}{\pi}\frac{yz}{r^2} + \frac{p_0(1-2\sigma)}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y}, \qquad Y_y = -\frac{2p_0}{\pi}\frac{xy^2z}{r^4}$$

$$Y_z = -\frac{2p_0}{\pi}\frac{xyz^2}{r^4}, \qquad Z_z = -\frac{2p_0}{\pi}\frac{xz^3}{r^4} \qquad Z_x = \frac{p_0}{\pi}\frac{z^2}{r^2} + \frac{p_0(1-\sigma)}{\pi} \tag{4}$$

Здесь σ — коэффициент Пуассона.

Решение Фламана для случая, когда интенсивность распределенной нагрузки равна p_0, при наших обозначениях имеет вид в компонентах смещения [1]

$$u^\circ = 0, \quad v^\circ = \frac{p_0}{2\pi\mu}\frac{yz}{r^2} - \frac{p_0}{2\pi(\lambda+\mu)}\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{z}, \quad w^\circ = -\frac{p_0}{2\pi\mu}\frac{y^2}{r^2} - \frac{p_0(\lambda+2\mu)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\ln r \tag{5}$$

Путем элементарных преобразований эти выражения приводятся к виду

$$u^\circ = 0, \quad v^\circ = \frac{p_0}{2\pi\mu}\frac{yz}{r^2} + \frac{p_0}{2\pi(\lambda+\mu)}\operatorname{arc\,tg}\frac{z}{y}, \quad w^\circ = \frac{p_0}{2\pi\mu}\frac{z^2}{r^2} - \frac{p_0(\lambda+2\mu)}{2\pi\mu(\lambda+\mu)}\ln r \tag{6}$$

Этим смещениям соответствуют компоненты напряжения ([1], стр. 207)

$$X_x^\circ = \frac{2p_0\sigma}{\pi}\frac{z}{r^2}, \quad Y_y^\circ = -\frac{2p_0}{\pi}\frac{zy^2}{r^4}, \quad Y_z^\circ = -\frac{2p_0}{\pi}\frac{yz^2}{r^4}, \quad Z_z^\circ = -\frac{2p_0}{\pi}\frac{z^3}{r^4} \tag{7}$$

Сопоставляя полученное нами решение (3) и (4) с решением Фламана (6) и (7), замечаем следующее:

$$v = v^\circ x, \quad w = w^\circ x, \quad X_x = X_x^\circ x, \quad Y_y = Y_y^\circ x, \quad Z_z = Z_z^\circ x \quad Y_z = Y_z^\circ x$$

Этим аналогия между обеими задачами не ограничивается. В задаче Фламана $u^\circ = 0$ указывает на наличие состояния плоской деформации. В нашей задаче $u \neq 0$, но $du/dx = 0$, линейная деформация вдоль оси x отсутствует, все плоскости $x = \mathrm{const}$ депланируют одинаково.

Следует отметить, что рассмотренная задача может быть решена также методом, предложенным С. Г. Гутманом специально для задач с линейно изменяющейся нагрузкой [2].

Поступила 13 VII 1959.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Курс теории упругости, 1947.
2. Гутман С. Г. (Gutman S. G.) «Some Problems of the Statics of Large Dams in the Light of Laboratorial Model Research». Extrait du Sixième Congrês du Grands Barrages, New York, 1958; Paris, Imprimerie Gauthier Villars.