О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИХ ВОЛН ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Н. Кристеску

(Бухарест)

В работе [1] Х. А. Рахматулин рассмотрел несколько задач о распространении упруго-пластических волн при наличии сложного нагружения. Он рассмотрел случай, когда волна сложного нагружения является волной сильного разрыва, распространяющейся со скоростью, меньшей, чем скорость обыкновенных упруго-пластических волн (волн Римана). Таким образом, Рахматулин предполагает, что в случае сложного нагружения при ударе в пластическом теле сначала распространяется пучок обыкновенных пластических волн и затем волна сильного разрыва, которая является волной сложного нагружения.

В данной работе исследуется та же самая задача на основе уравнений, установленных Рахматулиным, но рассматриваются и другие возможные случаи распространения, которые могут появляться для некоторых материалов. Например, показывается, что для таких материалов сложное динамическое нагружение вообще передается в пластическом теле только сложными волнами. Эти волны распространяются в теле быстрее, чем обыкновенные пластические волны [2, 3]. Проведенное исследование является скорее качественным, нежели количественным, так как теория малых упруго-пластических деформаций, используемая в настоящей работе, еще не была экспериментально проверена (и должным образом приспособлена) для динамических задач.

Рассмотрим поставленную Рахматулиным задачу о сжимающе-сдвигающем соударении двух свободных полос. Считается, что материал полос упруго-пластический и удовлетворяет уравнениям теории малых упруго-пластических деформаций. Делая некоторые физически оправданные упрощения, Рахматулин приводит эти уравнения к виду уравнений (1.5) работы [1].

$$\frac{2}{3} X_x - \frac{1}{3} Y_y = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} \left(\frac{2}{3} e_{xx} - \frac{1}{3} e_{zz} \right)$$

$$-\frac{1}{3} (X_x + Y_y) = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{e_i} \left(\frac{2}{3} e_{zz} - \frac{1}{3} e_{xx} \right)$$

$$\frac{1}{3} (X_x + Y_y) = k (e_{xx} + e_{zz}) \tag{1}$$

$$e_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} - e_{zz}\right)^2 + e_{zz}^2 + \frac{3}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}$$

Интенсивность напряжения σ_i представляет собой функцию интенсивности деформации

$$\sigma_i = \sigma_i (e_i) \tag{2}$$

К уравнениям (1) и (2) нужно добавить уравнения движения, которые можно записать в виде

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x}, \qquad \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial Y_x}{\partial x} \tag{3}$$

так как предполагается, что составляющие перемещения u и v зависят только от одной пространственной координаты x и времени t:

$$u = u(x, t), \qquad v = v(x, t) \tag{4}$$

Во всех приведенных выше формулах все составляющие являются «средними» составляющими, которые были обозначены Рахматулиным индексом °. Для упрощения этот индекс опускается.

В дальнейшем для облегчения вычислений будем предполагать, что материал является несжимаемым:

$$e_{xx} + e_{zz} = 0 \tag{5}$$

Используя условие несжимаемости (5), приведем систему (1) к виду

$$2X_x - Y_y = 2\frac{\sigma_i}{e_i}e_{xx}, \qquad X_x + Y_y = 2\frac{\sigma_i}{e_i}e_{xx}$$

$$e_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{4\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2} \tag{6}$$

где $e_{xx} = \partial u / \partial x$ и $e_{xy} = \partial v / \partial x$ — составляющие деформации.

Можно выразить составляющие напряжения в зависимости от составляющих деформации следующим образом:

$$X_x = \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y_y = \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad Y_x = \frac{1}{3}\frac{\sigma_i}{e_i}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{7}$$

Будем предполагать, что функция, входящая в (2), является монотонно возрастающей и имеет вогнутость кривой, направленную к оси Oe_i (в частности, она может быть, например, экспоненциальной функцией).

Вводя (7) в (3), получим

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4N\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \qquad \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = M\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + N\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{8}$$

где

$$L = \frac{4}{3}\left[\frac{\sigma_i}{e_i} + \frac{4}{3e_i^3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2(e_i\sigma_i' - \sigma_i)\right], \qquad N = \frac{4}{9e_i^3}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}(e_i\sigma_i' - \sigma_i)$$
$$M = \frac{1}{3}\left[\frac{\sigma_i}{e_i} + \frac{1}{3e_i^3}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2(e_i\sigma_i' - \sigma_i)\right], \tag{9}$$

Следовательно, посредством выражений (2) и (7) функции L, M, N выражаются только через $\partial u / \partial x$ и $\partial v / \partial x$.

Уравнения (8) являются уравнениями движения, соответствующими уравнениям (1.6) работы [1]. Из (8) следует, что для рассматриваемой задачи в общем случае имеют место два типа волн. Сделаем обычное предположение, что при переходе через любой фронт волны приращения

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}dx + \frac{\partial u_x}{\partial t}dt, \qquad du_t = \frac{\partial u_t}{\partial x}dx + \frac{\partial u_t}{\partial t}dt$$

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial t}dt, \qquad dv_t = \frac{\partial v_t}{\partial x}dx + \frac{\partial v_t}{\partial t}\partial t$$

взятые вдоль этого фронта, остаются непрерывными; к уравнениям (8) присоединим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}dt^2 = du_x dx - du_t dt, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}dx^2 - \frac{d^2 v}{dt^2}dt^2 = dv_x dx - dv_t dt \tag{10}$$

Разрешив систему, составленную из уравнений (8) и (10), относительно производных наибольшего порядка, легко получим уравнения характеристик системы

$$\rho^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^4 - \rho(L+M)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + LM - 4N^2 = 0 \tag{11}$$

и дифференциальные выражения, удовлетворенные на характеристиках. Этих выражений четыре, но, учитывая (11), только одно из них является независимым, например выражение

$$(cdu_x - du_t)N + (\rho c^2 - L)(cdv_x - dv_t) = 0 \tag{12}$$

Здесь c — скорость распространения фронта пластической волны, на которой выражение (12) удовлетворяется. Как вытекает из (11), скорость сможет иметь два значения:

$$\left.\begin{aligned} c_I^2 &= c_I^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ c_{II}^2 &= c_{II}^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)\end{aligned}\right\} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{L + M \pm \sqrt{(L-M)^2 + 16N^2}}{2\rho} \tag{13}$$

Так как, очевидно, $L > 0$ и $M > 0$, то отсюда следует

$$c_I > c_{II} \tag{14}$$

Скорости c_I и c_{II}, определяемые соотношением (13), являются скоростями распространения двух типов волн сложного нагружения. Обозначим эти типы волн соответственно (I) и (II). В частности, в областях, где можно считать $v = 0$, будут распространяться волны со скоростью

$$c_{I1}^2 = \frac{4}{3} \frac{\sigma_{i1}'}{\rho} \tag{15}$$

волны Римана (I1); здесь (σ_{i_1}') вычисляется из формально похожего на (2) выражения

$$\sigma_{i1} = \sigma_{i1} (e_{i1})$$

однако в действительности эти выражения различны.

Наконец, в областях, где можно считать $u = 0$, будут распространяться только волны Римана (II 2) со скоростью

$$c_{II2}^2 = \frac{1}{3} \frac{\sigma_{i2}'}{\rho} \tag{16}$$

Здесь σ_{i2}' вычисляется из другого выражения типа $\sigma_{i2} = \sigma_{i2} (e_{i2})$.

Покажем, что при некоторых условиях, т. е. при некоторых механических свойствах пластического материала,

$$c_I^2 > \frac{L}{\rho} > c_{I1}^2 \tag{17}$$

Первая часть неравенства (17) вытекает непосредственно из (13); для доказательства второй части нужно сравнить выражение L из соотношения (9) с c_{I1}^2 из (15), т. е. нужно иметь

$$\frac{1}{3}\left[4 \frac{\sigma_i}{e_i} + \frac{16}{3e_i^3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 (e_i\sigma_i' - \sigma_i)\right] > \frac{4}{3}\sigma_{i1}'$$

или

$$\frac{1}{3e_i^2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\sigma_i}{e_i} - \sigma_i'\right) + \sigma_i' > \sigma_{i1}' \tag{18}$$

Неравенство (18) удовлетворяется для очень многих типов материалов, для которых обычно $\sigma_i / e_i \gg \sigma_i'$ и σ_i' не слишком сильно отличается от σ_{i1}'.

Из (17) можно сделать важное заключение, что в материалах, удовлетворяющих прежним условиям, волны сложного нагружения (I) распространяются быстрее, чем обыкновенные пластические волны Римана (I1). В самом деле, если сравнить скорость c_I со скоростью $c_{I\,1\text{уп}}$ упругих волн, получим $c_I < c_{I\,1\text{уп}}$, но в некоторых случаях эти две скорости являются почти равными. Следовательно, для мгновенного сложного нагружения на конце пластического тела нужно считать, что волна (I) является волной сильного разрыва.

Это рассуждение не проходит для скорости c_{II} потому, что из (13) легко вытекает $c_{II}^2 < M / \rho$, а сравнивая M / ρ с c_{II2}^2, получаем $c_{II2}^2 < M / \rho$ и, следовательно, таким образом не получается сравнение c_{II} с c_{II2}. Непосредственно сравнивая c_{II} и c_{II2} и делая те же предположения, что и выше, можно доказать, что

$$c_{II2}^2 < c_{II}^2 \tag{19}$$

и, следовательно, волны (II 2) распространяются медленнее, чем волна (II).

Покажем теперь, что волны (I) и (II) являются действительно волнами сложного нагружения, а не обыкновенными пластическими волнами. Обозначим через α и β скачки производных $\partial^2 u/\partial x^2$ и $\partial^2 v / \partial x^2$ при переходе фронта волн

$$\alpha = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_+ - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_-, \qquad \beta = \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|_+ - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\Big|_-$$

Если этот фронт является фронтом волны (I), то эти скачки обозначим через α_I и β_I, а если волны типа (II), то через α_{II} и β_{II}. Из (10) следует, что между скачками производных второго порядка существуют зависимости

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] c^2 - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right] = 0, \qquad \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right] c^2 - \left[\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\right] = 0 \tag{20}$$

а из (8), если примем во внимание и (20), получим выражения

$$(\rho c^2 - L)\,\alpha - 4N\beta = 0, \qquad N\alpha - (\rho c^2 - M)\,\beta = 0 \tag{21}$$

Уравнения (21) не независимы, так как из (11) вытекает

$$\frac{\rho c^2 - L}{N} = \frac{4N}{\rho c^2 - M} \tag{22}$$

Выражения (21) и (12) также не являются независимыми, если принять во внимание соотношение (10).

Следовательно, на фронте волны (I) имеем

$$(\rho c_I{}^2 - L)\,\alpha_I - 4N\beta_I = 0 \tag{23}$$

а на фронте волны (II) имеем

$$(\rho c_{II}{}^2 - L)\,\alpha_{II} - 4N\beta_{II} = 0 \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что как на фронте волны I, так и на фронте волны I все производные второго порядка от u и v прерывны. Следовательно, обе волны являются волнами сложного нагружения. Эти волны сложного нагружения вырождаются в обыкновенные пластические волны только при $N = 0$. Это может иметь место в двух случаях.

В первом случае одна из составляющих деформаций равна нулю. Следовательно, $\partial u / \partial x = 0$ или $\partial v / \partial x = 0$. В этом случае система (8) сводится к одному уравнению: второму или соответственно первому из уравнений (8) (где $N = 0$). Дифференциальное соотношение (12), удовлетворяемое на характеристиках, сводится к одному из известных соотношений:

$$dv_t = c_{II2} dv_x \qquad \text{или } du_t = c_{I1} du_x$$

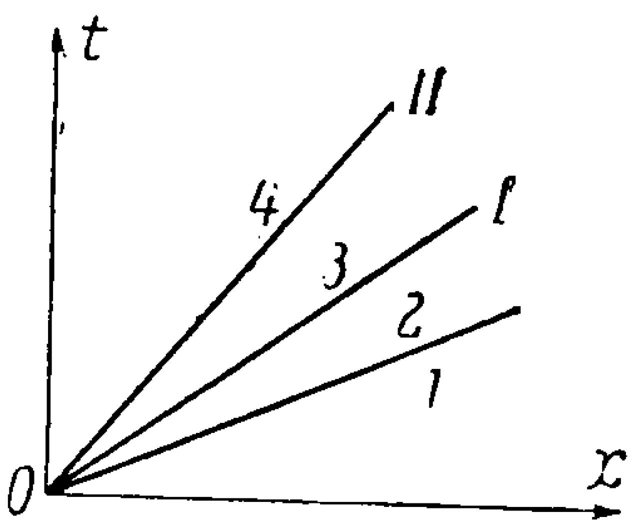
Следовательно, в этом случае в пластическом теле распространяется только один тип обыкновенных волн; скорость распространения определяется соотношением (16) или соответственно (15).

Вторым случаем, когда $N = 0$, является случай упругого тела ($\sigma_i / e_i = \sigma_i'$). В этом случае система (8) сводится к двум обыкновенным уравнениям распространения двух типов упругих волн и скорости распространения сводятся к известным постоянным скоростям. Разрывы на этих двух фронтах обыкновенных волн являются независимыми в том смысле, что они не связаны никаким соотношением [например, типа соотношений (12)] и распространяются с различными скоростями.

Из сказанного выше следует, что сложное нагружение распространяется в теле двумя пучками обыкновенных волн, если тело остается упругим, т. е. при ударе предел упругости не достигнут. При переходе за предел упругости, пластические деформации распространяются в теле двумя типами волн сложного нагружения, скорости распространения которых определяются соотношением (13). Перед этими волнами могут, вообще говоря, распространяться и упругие волны. Во всяком случае при мгновенном сложном нагружении в теле не возникает обыкновенных пластических волн, так как волны сложного нагружения, возникающие одновременно на конце полосы, распространяются быстрее.

Если ударное нагружение не является сложным нагружением в том смысле, что различные составляющие деформации не возрастают одновременно, а возникают постепенно, и если нагружение не является мгновенным, то в пластическом теле будут распространяться два типа обыкновенных пластических волн. В зависимости от краевых условий существует возможность одновременного распространения двух типов обыкновенных пластических волн в определенных областях пластического тела. Тем не менее в этом случае не появляется пластических волн сложного нагружения, потому что разрывы производной $\partial^2 u / \partial x^2$ распределяются со скоростью, отличной от скорости разрыва производной $\partial^2 v / \partial x^2$, и между этими разрывами не существует связи. Таким образом, эти волны распространяются независимо, хотя волна, которая распространяется скорее, делает тело неоднородным и в этом смысле влияет на последующую волну.

Вычислим теперь скачки, предполагая, что в пластическом теле распространяется как волна I, так и волна II. Предположим, что в некотором сечении x_0 в момент t_0 одновременно пройдут два фронта волн I и II. Заметим, что скачки на двух фронтах волн не независимы, так как если принять во внимание соотношение $\rho(c_I^2 + c_{II}^2) = L + M$, то выражения (23) и (24) могут быть записаны в виде



$$\frac{2N}{\rho c_I^2 - L} = \frac{\alpha_I}{2\beta_I} = -\frac{2\beta_{II}}{\alpha_{II}} \tag{25}$$

где N, L и c_I вычислены для $x = x_0$ и $t = t_0$. Полный скачок α^* производной $\partial^2 u / \partial x^2$ при переходе двух фронтов волн является суммой двух скачков $\alpha^* = \alpha_I + \alpha_{II}$. Аналогично и для полного скачка β^* производной $\partial^2 v / \partial x^2$ получаем

$$\beta^* = \beta_I + \beta_{II}$$

Коэффициенты скачков всегда удовлетворяют соотношению

$$\alpha_I \alpha_{II} - 4\beta_I \beta_{II} = 0 \tag{26}$$

Если в некотором сечении x_0 (в частности, $x_0 = 0$) в момент t_0 мы знаем полные скачки α^* и β^*, а также и напряженное состояние, то из (25) получаем скачки на каждой волне в отдельности:

$$\alpha_I = \frac{\alpha^*}{2} + \beta^*\omega, \qquad \beta_I = \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^*}{2\omega} + \beta^*\right), \qquad \alpha_{II} = \frac{\alpha^*}{2} - \beta^*\omega \tag{27}$$

$$\beta_{II} = \frac{1}{2}\left(\beta^* - \frac{\alpha^*}{2\omega}\right) \qquad \omega = \frac{2N}{\rho c_I^2 - L}$$

Следует отметить, что не все скачки имеют один и тот же знак.

Для приблизительного решения рассмотренной задачи можно предложить много приемов.

Если нагружение мгновенно, то предположим, что волны I и II являются волнами сильного разрыва, распространяющимися с постоянными скоростями (13). Тогда в плоскости xOt будем иметь (фигура) и четыре области: область *1* не деформирована, область *2* упруго деформирована и области *3* и *4* являются пластически деформированными областями после прохождения волн сложного нагружения I и соответственно II.

В области *2* решение известно из решения упругой задачи. В этой области, следовательно, известны значения деформации и скоростей u_{x2}, u_{t2}, v_{x2}, v_{t2}. Их определение в области *3* осуществляется при помощи выражений

$$\begin{aligned} v_{t3} + c_I v_{x3} &= v_{t2} + c_I v_{x2}, \qquad & c_I \rho (v_{t3} - v_{t2}) &= -X_{y3} + X_{y2} \\ u_{t3} + c_I u_{x3} &= u_{t2} + c_I u_{x2}, \qquad & c_I \rho (u_{t3} - u_{t2}) &= -X_{x3} + X_{x2} \end{aligned} \tag{28}$$

к которым добавим первое выражение (13) для определения c_I, а также выражение (7).

Переход из области *3* в область *4* выполняется аналогично.

Если нагружение в $x = 0$ можно рассматривать как последовательность мгновенных нагружений, то можно действовать точно так же, но деля плоскость xt на большее количество областей.

Поступила 9 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О распространении упруго-пластических волн при сложном нагружении. ПММ, т. XXII, вып. 6, 1958.
2. Кристеску Н. Некоторые замечания относительно распространения пластических волн в пластинках. ПММ, т. XIX, вып. 4, 1955.
3. Cristescu N. Probleme dinamice in Teoria plasticitatii. Bucuresti, 1958.