

О РАСПРОСТРАНЕНИИ УПРУГИХ ВОЛН В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СРЕДАХ

Л. Я. Косачевский

(Сталино)

Динамике двухкомпонентных сред в настоящее время посвящен уже ряд работ; можно указать Я. И. Френкеля [1], Х. А. Рахматулина [2], Био [3,4], Цвиккера и Костена [5] и других. Однако основная задача о составлении уравнений движения двухкомпонентных сред еще не может считаться окончательно решенной и требует дополнительного изучения и экспериментальной проверки.

Ниже рассматривается простейший случай движения — распространение упругих волн в однородной изотропной среде, состоящей из твердой и жидкой компонент. Решены задачи об отражении плоских волн и о поверхностных волнах на свободной границе полупространства. Показано, что соотношения между напряжениями и деформациями, установленные Я. И. Френкелем, эквивалентны аналогичным соотношениям М. А. Био, а уравнения движения последнего являются более общими.

§ 1. Основные уравнения. Взаимопроникающее движение твердой и жидкой компонент мы будем рассматривать как движение жидкости в деформируемой пористой среде. Будем предполагать, что размеры пор малы по сравнению с расстоянием, на котором существенно изменяются кинематические и динамические характеристики движения. Это позволяет считать обе среды сплошными, и в каждой точке пространства у нас, таким образом, будут два вектора смещения: вектор смещения u твердой фазы (скелета пористой среды) и вектор смещения v жидкости. Как было показано Я. И. Френкелем [1], полный тензор напряжений в скелете (при наличии давления жидкости в порах) может быть записан в виде

$$P_{ik} = L\theta\delta_{ik} + 2Gu_{ik} + R_0\left(1 - m - \frac{K}{K_0}\right)\varphi\delta_{ik} \quad (1.1)$$

$$K = L + \frac{2}{3}G, \quad u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

$$\theta = u_{11} + u_{22} + u_{33} = \operatorname{div} u, \quad \varphi = -\frac{\Delta p}{\rho}$$

где L , G и K являются соответственно коэффициентами Ламэ и модулем всестороннего сжатия пористого скелета с пустыми порами, K_0 — истинный модуль сжимаемости твердой фазы, R_0 — модуль сжимаемости жидкости, m — пористость, u_{ik} — тензор деформации скелета, θ — относительное изменение объема скелета, φ — относительное изменение истинной плотности жидкости, δ_{ik} — символ Кронеккера, равный единице при $i = k$ и равный нулю при $i \neq k$.

Изменение пористости согласно [1] может быть выражено формулой

$$\Delta m = a\left(\theta - \frac{R_0}{K_0}\varphi\right) \quad (1.2)$$

Постоянный коэффициент a является некоторым дополнительным параметром, характеризующим упругие свойства пористой среды (при постоянной пористости $a = 0$).

Малое изменение давления в жидкости связано с малым изменением плотности равенством

$$\Delta p = -R_0 \varphi \quad (1.3)$$

Уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения вещества, имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} (m\rho) + \operatorname{div} \left(m\rho \frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.4)$$

Линеаризуя его и переходя к конечным разностям, получаем

$$m\Delta\rho + \rho\Delta m + m\rho\varepsilon = 0 \quad \varepsilon = \operatorname{div} v \quad (1.5)$$

где ε — относительное изменение объема жидкости. Учитывая (1.2), находим

$$\varphi = \beta \left(\frac{a}{m} \theta + \varepsilon \right), \quad \beta = \frac{1}{1 + aR_0 / mK_0} \quad (1.6)$$

Подставляя (1.6) в (1.1) и (1.3), приводим их к виду

$$P_{ik} = \lambda\theta\delta_{ik} + 2\mu u_{ik} + Q\varepsilon\delta_{ik}, \quad \sigma = -m\Delta p = Q'\theta + R\varepsilon \quad (1.7)$$

где σ представляет собой силу, действующую на жидкость, отнесенную к единице поперечного сечения пористой среды, и введены обозначения

$$\begin{aligned} \lambda &= L + \beta \frac{a}{m} \left(1 - m - \frac{K}{K_0} \right) R_0, & \mu &= G \\ Q &= \beta \left(1 - m - \frac{K}{K_0} \right) R_0, & Q' &= \beta a R_0, & R &= \beta m R_0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Для элементарной работы сил, действующих на твердую и жидкую компоненту, имеем

$$d'A = P_{ik} du_{ik} + \sigma d\varepsilon = \lambda\theta d\theta + 2\mu u_{ik} du_{ik} + Q\varepsilon d\theta + Q'\theta d\varepsilon + R\varepsilon d\varepsilon$$

Для существования потенциальной энергии это выражение должно быть полным дифференциалом, следовательно, имеет место равенство $Q = Q'$ и, поэтому, с учетом (1.8) получим

$$a = 1 - m - \frac{K}{K_0} \quad (1.9)$$

Уравнения (1.7) совпадают с соотношениями между напряжениями и деформациями, установленными Био [3]. Если пренебречь сдвигом скелета, в тензоре напряжений P_{ik} останутся только диагональные члены, т. е. $P_{ik} = -p_1\delta_{ik}$, где p_1 — сила давления на скелет, отнесенная к единице поперечного сечения пористой среды. Уравнения (1.7) при этом принимают вид:

$$-p_1 = \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \theta + Q\varepsilon, \quad -m\Delta p = Q'\theta + R\varepsilon \quad (1.10)$$

Пусть $R_0 \ll K \ll K_0$ (это может иметь место в случае, когда поры заполнены газом). Согласно (1.8) и (1.2) получим для этого случая

$$\lambda + \frac{2}{3} \mu = K, \quad R = mR_0, \quad Q = (1 - m)R_0, \quad \Delta m = (1 - m)\theta \quad (1.11)$$

Введем величину

$$p_2 = mp - m_0 p_0 \quad (1.12)$$

Здесь m_0 и p_0 — равновесные значения пористости и давления жидкости (газа). Используя равенство

$$\frac{\partial p_2}{\partial t} = m \frac{\partial p}{\partial t} + p_0 \frac{\partial m}{\partial t}$$

и учитывая (1.10) и (1.11), получим (1.13)

$$-\frac{\partial p_1}{\partial t} = K \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{1-m}{m} \frac{\partial p_2}{\partial t}, \quad -\frac{\partial p_2}{\partial t} = m R_0 \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (1-m)(R_0 - p_0) \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

что совпадает с уравнениями Цвиккера и Костена [5].

Получим теперь уравнения движения, пренебрегая вначале вязкостью жидкости.

Сила, действующая на скелет (в единице объема пористой среды), равна производной во времени от полного импульса скелета (в этом объеме). Последний складывается из импульса скелета при абсолютно пустых порах и добавочного импульса, возникающего за счет относительного движения компонент среды, т. е.

$$j_1 = \rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \rho_{11} \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_{12} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.14)$$

Таким образом, имеем

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \quad (1.15)$$

Аналогично находим полный импульс жидкости

$$j_2 = \rho_2 \frac{\partial v}{\partial t} + \rho_{12} \left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} \right) = \rho_{12} \frac{\partial u}{\partial t} + \rho_{22} \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.16)$$

и получаем второе уравнение движения:

$$\rho_{12} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \quad (1.17)$$

Коэффициент ρ_{12} назовем согласно [4] коэффициентом динамической связи скелета и жидкости, ρ_1 и ρ_2 — массы твердой и жидкой компонент в единице объема среды, ρ_{11} и ρ_{22} можно рассматривать как некоторые «эффективные массы» этих компонент:

$$\rho_{11} = \rho_1 - \rho_{12}, \quad \rho_{22} = \rho_2 - \rho_{12} \quad (1.18)$$

Поскольку при движении твердого тела в жидкости его «эффективная масса» больше истинной ($\rho_{11} > \rho_1$), коэффициент ρ_{12} должен быть отрицательным.

Для учета вязкости в уравнениях (1.15) и (1.17) следует добавить член, пропорциональный разности скоростей двух компонент:

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) &= \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + b \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) &= -m \frac{\partial p}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Постоянную b можно определить из условия выполнения закона Дарси для частного случая стационарного течения жидкости. Таким образом, находим

$$b = \frac{\mu m^2}{k} \quad (1.20)$$

Где μ — коэффициент вязкости, а k — коэффициент проницаемости, пропорциональный пористости и квадрату диаметра пор:

$$k = \text{const } m\delta^2 \quad (1.21)$$

Если в (1.19) пренебречь коэффициентом динамической связи ρ_{12} , получим уравнения движения, выведенные Я. И. Френкелем [1]. В случае гармонических волн частоты ω (в которых зависимость векторов смещения от времени выражается фактором $e^{-i\omega t}$) уравнения (1.19) могут быть записаны также в виде

$$\rho_1 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} + s \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial t} \right), \quad \rho_2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = -m \frac{\partial p}{\partial x_i} + s \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) \quad (1.22)$$

где

$$s = b - i\omega\rho_{12} \quad (1.23)$$

Если пренебречь сдвигом скелета, т. е.

$$P_{ik}^{\bar{}} = -p_1 \delta_{ik} = -(1-m)p_s \delta_{ik}$$

(P_s — истинное давление в скелете), из (1.22) получаем

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial P_s}{\partial x_i} + K_{12} \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} - \frac{\partial u_i}{\partial t} \right), \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + K_{21} \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} \right) \quad (1.24)$$

Здесь ρ_s и ρ — истинные плотности твердой и жидкой компонент:

$$\rho_s = \frac{\rho_1}{1-m}, \quad \rho = \frac{\rho_2}{m}, \quad K_{12} = \frac{s}{\rho_1}, \quad K_{21} = \frac{s}{\rho_2} \quad (1.25)$$

Уравнения (1.24) совпадают с уравнениями движения, выведенными Х. А. Рахматулиным [2] для многокомпонентных жидких или газообразных сред.

Разложим векторы смещения на безвихревые и соленоидальные составляющие

$$\begin{aligned} u &= u_l + u_t, & \text{rot } u_l &= 0, & \text{div } u_t &= 0 \\ v &= v_l + v_t, & \text{rot } v_l &= 0, & \text{div } v_t &= 0 \end{aligned} \quad (1.26)$$

Уравнения (1.19) с учетом (1.7), (1.9) и (1.26) приводятся к следующей системе:

$$\begin{aligned} \rho_{11} \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_l}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (u_l - v_l) &= (\lambda + 2\mu) \nabla^2 u_l + Q \nabla^2 v_l \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 u_l}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v_l}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (v_l - u_l) &= Q \nabla^2 u_l + R \nabla^2 v_l \\ \rho_{11} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 v_t}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (u_t - v_t) &= \mu \nabla^2 u_t \\ \rho_{12} \frac{\partial^2 u_t}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 v_t}{\partial t^2} + b \frac{\partial}{\partial t} (v_t - u_t) &= 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

В случае монохроматических волн частоты ω первые два уравнения (1.27) при помощи линейного преобразования

$$u_l = u_1 + u_2, \quad v_l = M_1 u_1 + M_2 u_2 \quad (1.28)$$

и после введения обозначений

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= \frac{\rho_{11}}{\rho}, & \gamma_{12} &= \frac{\rho_{12}}{\rho}, & \gamma_{22} &= \frac{\rho_{22}}{\rho}, & \rho &= \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12} \\ \sigma_{11} &= \frac{\lambda + 2\mu}{H}, & \sigma_{12} &= \frac{Q}{H}, & \sigma_{22} &= \frac{R}{H}, & H &= \lambda + 2\mu + R + 2Q \\ & & & & c^2 &= \frac{H}{\rho} \end{aligned} \quad (1.29)$$

приводятся к виду

$$\nabla^2 u_1 + k_1^2 u_1 = 0, \quad \nabla^2 u_2 + k_2^2 u_2 = 0 \quad (1.30)$$

где

$$k_1^2 = z_1 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2, \quad k_2^2 = z_2 \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 \quad (1.31)$$

z_1 и z_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\begin{aligned} &(\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2) z^2 - (\sigma_{11}\gamma_{22} + \sigma_{22}\gamma_{11} - 2\sigma_{12}\gamma_{12}) z + \\ &+ \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2 - \frac{ib}{\omega\rho} (z - 1) = 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

а коэффициенты преобразования (1.28) определяются формулами

$$M_1 = \frac{-\gamma_{12} + z_1\sigma_{12} + i\gamma}{\gamma_{22} - z_1\sigma_{22} + i\gamma}, \quad M_2 = \frac{-\gamma_{12} + z_2\sigma_{12} + i\gamma}{\gamma_{22} - z_2\sigma_{22} + i\gamma}, \quad \gamma = \frac{b}{\rho\omega} \quad (1.33)$$

Уравнения (1.30) описывают распространение продольных волн I и II типов.

Если связь между твердой и жидкой компонентами среды слаба

$$\gamma_{12} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \gamma = 0,$$

то из (1.32) находим

$$z_1 = \frac{\gamma_{11}}{\sigma_{11}}, \quad z_2 = \frac{\gamma_{22}}{\sigma_{22}} \quad (1.34)$$

при этом, очевидно, скорости I и II продольных волн равны скоростям волн, распространяющихся в сплошной упругой и в сплошной жидкой средах в отдельности. Согласно (1.33) имеем в этом случае

$$M_1 = 0, \quad M_2 = \infty \quad (1.35)$$

Найдем приближенные значения корней уравнения (1.32) при условии $\gamma > 1$, что соответствует случаю низкой частоты или большой вязкости:

$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - \frac{i}{\gamma} (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{11}\gamma_{22} - \sigma_{22}\gamma_{11} + 2\sigma_{12}\gamma_{12} + \gamma_{11}\gamma_{22} - \gamma_{12}^2) \\ z_2 &= i \frac{\gamma}{\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Как легко убедиться, при этом коэффициенты затухания волн (являющиеся мнимыми частями k_1 и k_2) будут пропорциональны: для I продольной — квадрату частоты, а для II продольной — квадратному корню из частоты. Поэтому при очень низкой частоте I продольная волна

испытывает незначительное затухание, в то же время II продольная волна из-за большого затухания практически исчезает.

Вторые два уравнения (1.27), описывающие распространение поперечной волны, приводятся к виду

$$v_t = M_t u_t, \quad \nabla^2 u_t + k_t^2 u_t = 0 \quad (1.37)$$

где

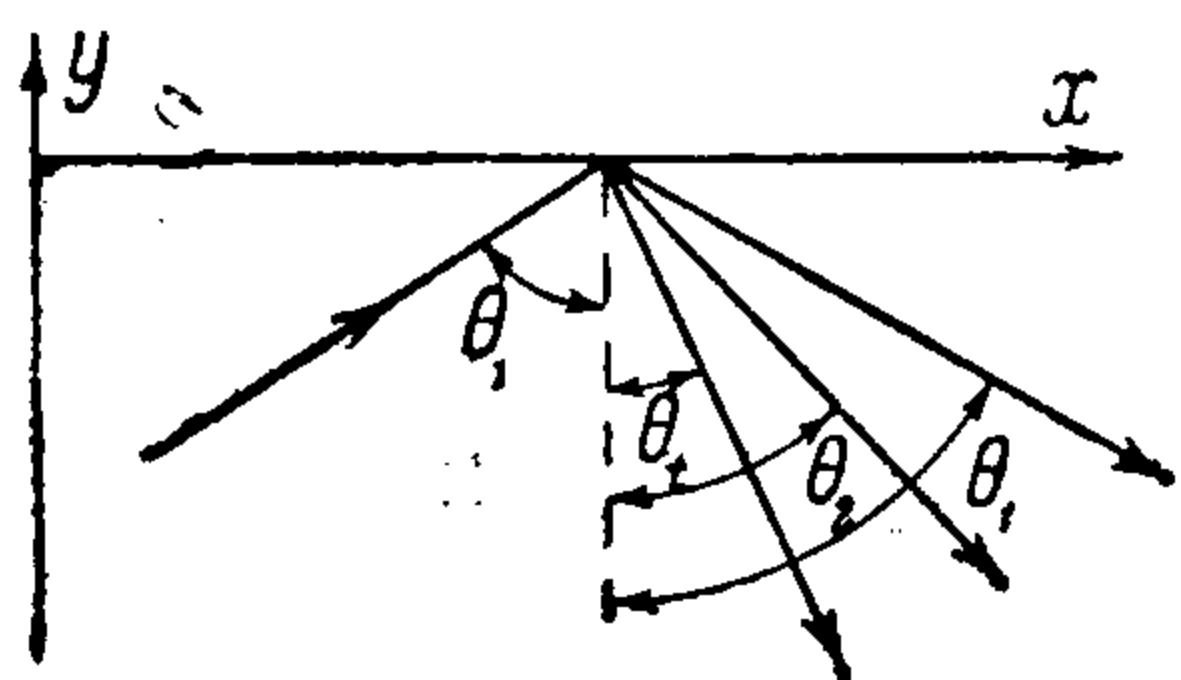
$$M_t = \frac{-\gamma_{12} + i\gamma}{\gamma_{22} + i\gamma}, \quad k_t^2 = \frac{\rho_1 + \rho_2 M_t}{\mu} \omega^2 \quad (1.38)$$

При низкой частоте здесь, так же как и для I продольной волны, коэффициент затухания пропорционален квадрату частоты.

Существование трех типов волн в пористых средах, а также характер их затухания установлены в работах [1.4]. Если $\gamma \ll 1$, эффектом вязкости можно пренебречь. Однако при этом следует иметь в виду, что ω должна оставаться меньше частоты, при которой длина волны сравнима с размерами пор.

§ 2. Отражение плоских волн на свободной границе полупространства. Граничными условиями на свободной поверхности среды будут

$$P_{yy} = 0, \quad P_{xy} = 0, \quad \sigma = 0 \quad (2.1)$$



или на основании (1.7)

$$\lambda \theta + 2\mu u_{yy} + Q\varepsilon = 0$$

$$u_{xy} = 0 \quad (2.2)$$

$$Q\theta + R\varepsilon = 0$$

Вводя потенциалы продольных и поперечной волн и принимая во внимание (1.26), (1.28) и (1.37), запишем выражения для полных векторов смещения скелета и жидкости

$$u = \text{grad}\varphi_1 + \text{grad}\varphi_2 + \text{rot}\Psi, \quad v = M_1 \text{grad}\varphi_1 + M_2 \text{grad}\varphi_2 + M_t \text{rot}\Psi \quad (2.3)$$

после чего граничные условия приводятся к виду

$$(\lambda + QM_1) \nabla^2 \varphi_1 + (\lambda + QM_2) \nabla^2 \varphi_2 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} \right) = 0$$

$$2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (2.4)$$

$$(Q + RM_1) \nabla^2 \varphi_1 + (Q + RM_2) \nabla^2 \varphi_2 = 0$$

Рассмотрим случай падения I продольной волны на границу. Три граничных условия можно удовлетворить, лишь допустив, что падающая волна возбуждает на границе систему из трех отраженных волн: двух продольных и поперечной. Таким образом, полное звуковое поле в среде будет (см. фигуру)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A e^{ik_1(x \sin \theta_1 + y \cos \theta_1)} + A W_1 e^{ik_1(x \sin \theta_1 - y \cos \theta_1)} \\ \varphi_2 &= A W_2 e^{ik_2(x \sin \theta_2 - y \cos \theta_2)} \\ \Psi &= A W_t e^{ik_t(x \sin \theta_t - y \cos \theta_t)} \end{aligned} \quad (2.5)$$

где W_1 , W_2 и W_t — искомые коэффициенты отражения (множитель $e^{-i\omega t}$ для краткости опускаем).

Подставляя (2.5) в (2.4) и решая полученную систему линейных уравнений, находим

$$W_1 = - \frac{F_1 - L_{12}F_2 - \mu (\sin 2\theta_1 + L_{12}\sin 2\theta_2) \operatorname{tg} 2\theta_t}{F_1 - L_{12}F_2 + \mu (\sin 2\theta_1 - L_{12}\sin 2\theta_2) \operatorname{tg} 2\theta_t}, \quad W_2 = - \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2 L_{12}(1 + W_1) \quad (2.6)$$

$$W_t = \frac{1}{\cos 2\theta_t} \left(\frac{k_1}{k_t}\right)^2 [\sin 2\theta_1 + L_{12}\sin 2\theta_2 - W_1 (\sin 2\theta_1 - L_{12}\sin 2\theta_2)]$$

Здесь введены обозначения (2.7)

$$F_1 = K_1 - 2\mu \sin^2 \theta_1, \quad F_2 = K_2 - 2\mu \sin^2 \theta_2, \quad L_{12} = \frac{Q + RM_1}{Q + RM_2}$$

$$K_1 = \lambda + 2\mu + QM_1, \quad K_2 = \lambda + 2\mu + QM_2,$$

При малых частотах коэффициент отражения W_2 будет согласно (1.36) и (1.31) пропорционален ω . Поэтому в первом приближении можно считать, что от границы отражаются лишь I продольная и поперечная волны.

В случае нормального падения волны на границу ($\theta_1 = \theta_2 = \theta_t = 0$)

$$W_1 = -1, \quad W_2 = 0, \quad W_t = 0 \quad (2.8)$$

т. е. будет отражаться только I продольная волна.

Устремляя пористость к нулю и учитывая, что при этом имеет место условие (1.35), а также равенства

$$\lambda + 2\mu = \rho_s c_1^2, \quad \mu = \rho_s c_t^2, \quad \frac{k_1}{k_t} = \frac{c_t}{c_1} = \frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_1}$$

где c_1 и c_t — скорости продольной и поперечной волн, получим известные коэффициенты отражения для сплошной изотропной упругой среды [6]:

$$W_t = \frac{c_t \cos \theta_1 \operatorname{tg}^2 2\theta_t - c_1 \cos \theta_t}{c_t \cos \theta_1 \operatorname{tg}^2 2\theta_t + c_1 \cos \theta_t}, \quad W_2 = 0 \quad (2.9)$$

$$W_t = \frac{c_t \sin 2\theta_1}{c_1 \cos 2\theta_t} \frac{2c_t \cos \theta_t}{c_t \cos \theta_1 \operatorname{tg}^2 2\theta_t + c_1 \cos \theta_t}$$

Пусть на границу падает II продольная волна. Аналогично предыдущему найдем

$$W_1 = - \frac{1}{L_{12}} \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 (1 + W_2)$$

$$W_2 = - \frac{F_1 - L_{12}F_2 + \mu (\sin 2\theta_1 + L_{12}\sin 2\theta_2) \operatorname{tg} 2\theta_t}{F_1 - L_{12}F_2 + \mu (\sin 2\theta_1 - L_{12}\sin 2\theta_2) \operatorname{tg} 2\theta_t} \quad (2.10)$$

$$W_t = \frac{1}{L_{12} \cos 2\theta_t} \left(\frac{k_2}{k_t}\right)^2 [\sin 2\theta_1 + L_{12}\sin 2\theta_2 + W_2 (\sin 2\theta_1 - L_{12}\sin 2\theta_2)]$$

Для случая падения поперечной волны на границу имеем (2.11)

$$W_1 = - \left(\frac{k_t}{k_1}\right)^2 \frac{\mu \sin 2\theta_t}{F_1 - L_{12}F_2} (1 - W_t), \quad W_2 = L_{12} \left(\frac{k_t}{k_2}\right)^2 \frac{\mu \sin 2\theta_t}{F_1 - L_{12}F_2} (1 - W_t)$$

$$W_t = - \frac{F_1 - L_{12}F_2 - \mu (\sin 2\theta_1 - L_{12}\sin 2\theta_2) \operatorname{tg} 2\theta_t}{F_1 - L_{12}F_2 + \mu (\sin 2\theta_1 - L_{12}\sin 2\theta_2) \operatorname{tg} 2\theta_t}$$

В предельном случае исчезающей пористости из (2.11) получаем

$$W_1 = -\frac{2c_1 \cos \theta_t \operatorname{tg} 2\theta_t}{c_t \cos \theta_t \operatorname{tg}^2 2\theta_t + c_1 \cos \theta_t}, \quad W_2 = 0, \quad W_t = \frac{c_t \cos \theta_t \operatorname{tg}^2 2\theta_t - c_1 \cos \theta_t}{c_t \cos \theta_t \operatorname{tg}^2 2\theta_t + c_1 \cos \theta_t} \quad (2.12)$$

что совпадает с известными выражениями для коэффициентов отражения в сплошных упругих средах [6].

В заключение этого параграфа отметим случаи полного внутреннего отражения.

Будем пренебрегать вязкостью и считать, что скорости двух продольных и поперечной волн удовлетворяют неравенствам

$$c_1 > c_2 > c_t \quad (2.13)$$

Если падает поперечная волна на границу, случай полного внутреннего отражения будет иметь место при

$$\sin \theta_t > \frac{c_t}{c_2} \quad (2.14)$$

Углы θ_1 и θ_2 , определяемые соотношением

$$\sin \theta_1 = \frac{c_1}{c_t} \sin \theta_t, \quad \sin \theta_2 = \frac{c_2}{c_t} \sin \theta_t \quad (2.15)$$

оказываются при этом комплексными, а I продольная и поперечная волны — неоднородными, амплитуды которых убывают при удалении от границы по экспоненциальному закону. В случае падения II продольной волны на границу под углом θ_2 , удовлетворяющим условию

$$\sin \theta_2 > \frac{c_2}{c_1} \quad (2.16)$$

комплексным будет угол θ_1 , а неоднородной — I продольная волна.

§ 3. Поверхностные волны. Будем рассматривать поверхностные волны как вырожденный случай отражения плоских волн. Для этого, как известно [6], необходимо устремить амплитуду падающей волны к нулю, а коэффициенты отражения к бесконечности так, чтобы амплитуды отраженных волн остались конечными. При этом мы получаем волновой процесс, распространяющийся вдоль границы без падающей волны, т. е. будем иметь случай поверхностной волны. Согласно (2.6) коэффициенты отражения обращаются в бесконечность при условии

$$(F_1 - L_{12}F_2) \cos 2\theta_t + \mu (\sin 2\theta_1 - L_{12} \sin 2\theta_2) \sin 2\theta_t = 0 \quad (3.1)$$

Вначале пренебрегаем вязкостью и поэтому считаем все коэффициенты вещественными. Введем обозначения

$$S = \sin^2 \theta_t, \quad q_1 = \left(\frac{c_t}{c_1}\right)^2, \quad q_2 = \left(\frac{c_t}{c_2}\right)^2 \quad (3.2)$$

Используя соотношения $\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} = \frac{\sin \theta_t}{c_t}$, приведем уравнение (3.1) к виду

$$(1 - 2S) \left[K_1 - 2\mu \frac{S}{q_1} - L_{12} \left(K_2 - 2\mu \frac{S}{q_2} \right) \right] + 4\mu S \left(\frac{1}{q_1} \sqrt{q_1 - S} - \frac{L_{12}}{q_2} \sqrt{q_2 - S} \right) \sqrt{1 - S} = 0 \quad (3.3)$$

Предположим, имеет место условие (2.13). Для существования поверхностной волны необходимо, чтобы уравнение (3.3) имело корень $S > 1$. При этом синусы углов θ_1 , θ_2 и θ_t будут больше единицы, а косинусы — чисто мнимые и, следовательно, поверхностная волна затухает с удалением от границы по экспоненциальному закону. Вдоль границы она распространяется без затухания с фазовой скоростью

$$v = \frac{c_t}{\sqrt{S}} \quad (3.4)$$

При $S \rightarrow \infty$ левая часть уравнения (3.3) приводится к виду

$$-2S[K_1 - \mu - L_{12}(K_2 - \mu)] \quad (3.5)$$

а при $S = 1$ она равна

$$-\left[K_1 - \frac{2\mu}{q_1} - L_{12}\left(K_2 - \frac{2\mu}{q_2}\right)\right] \quad (3.6)$$

Таким образом, уравнение (3.3) имеет хотя бы один корень $s > 1$, если выражения (3.5) и (3.6) противоположных знаков. Если учитывать вязкость, соответствующий корень уравнения (3.6) будет комплексным, а следовательно, комплексной будет и фазовая скорость (3.4). Это указывает на наличие затухания поверхностной волны в направлении, параллельном границе, которое вызвано диссипацией ее энергии за счет вязкости.

В предельном случае исчезающей пористости (3.3) переходит в известное уравнение, описывающее распространение поверхностной волны на границе раздела сплошной упругой среды и вакуума [6]:

$$(1 - 2S)^2 + 4S \sqrt{q_1 - S} \sqrt{1 - S} = 0 \quad (3.7)$$

В заключение я хочу выразить глубокую благодарность профессору Харьковского государственного университета В. Л. Герману за предложение заняться данными вопросами и внимание к работе.

Поступила 28 VII 1958

ЛИТЕРАТУРА

1. Френкель Я. И. К теории сейсмических и сейсмоэлектрических явлений во влажной почве. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., т. VIII, № 4, 1944.
2. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, т. XX, вып. 2, 1956.
3. Био М. А. Теория упругости и консолидации анизотропной пористой среды. Механика. Сб. переводов и обзоров иностранной периодической литературы, № 1, 1956.
4. Biot M. A. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. J. Acoust. Soc. Am., 28, No. 2, 1956.
5. Цвиккер К. и Костен К. Звукопоглощающие материалы. Изд-во иностр. лит., 1952.
6. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. АН СССР, 1957.