

К ТЕОРИИ ИДЕАЛЬНОЙ ПЛАСТИЧЕСКОЙ АНИЗОТРОПИИ

Д. Д. И в л е в

(Москва)

Исследуется поведение идеального анизотропного жестко-пластического тела при условии пластичности, обобщающем условие пластичности Треска.

Отметим, что Хилл [1] предложил, по-видимому, первое условие пластичности идеального анизотропного тела, обобщающее условие пластичности Мизеса, неоднократно использовавшееся в приложениях.

1. Рассмотрим элемент среды, зафиксированный в ортогональной системе координат x, y, z . Будем предполагать, что пределы текучести при растяжении и сжатии элемента по любому направлению, фиксированному в системе x, y, z , известны.

Таким образом, если обозначить пределы текучести при растяжении через k , а пределы текучести при сжатии через s , то в общем случае будем иметь $k = k(l_i)$, $s = s(l_i)$, $i = 1, 2, 3, \dots$, где l_i — направляющие косинусы, образованные направлением растяжения-сжатия с осями x, y, z . Имеет место

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1 \quad (1.1)$$

Откладывая в направлениях растяжения-сжатия отрезки, пропорциональные величинам k и s , получим поверхности, которые назовем соответственно поверхностями анизотропии растяжения и сжатия. Для изотропного тела эти поверхности, очевидно, являются сферами. В общем случае поверхности анизотропии растяжения и сжатия могут быть разрывными, например, для слоистых материалов.

Обозначим через 1, 2, 3 три ортогональных направления, по которым действуют главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Ориентацию осей 1, 2, 3 в фиксированной системе координат x, y, z определим направляющими косинусами таблицы, приведенной справа.

Рассмотрим условие пластичности. В силу предположения о независимости условия пластичности от величины гидростатического давления условие пластичности интерпретируется в пространстве главных напряжений некоторой цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$. Кривую пересечения поверхности условия пластичности с плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$ назовем кривой пластичности. На фиг. 1 показана кривая пластичности, определяющая, очевидно, экстремальные свойства пластического течения среди возможных невогнутых условий пластичности, проходящих через известные точки, определяемые величинами пределов текучести при растяжении-сжатии.

	1	2	3
x	l_1	m_1	n_1
	l_2	m	n_2
z	l_3	m_3	n_3

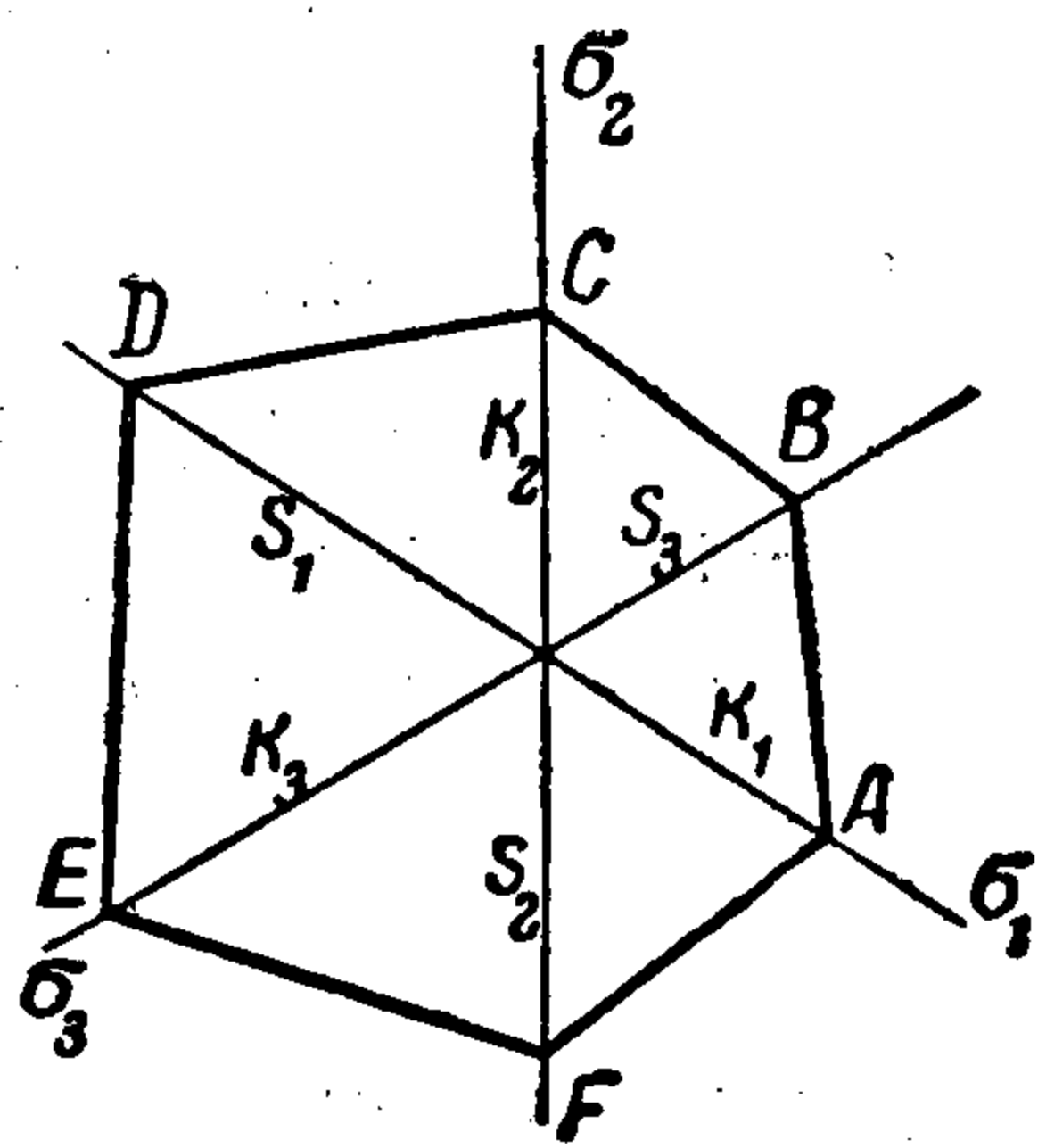
Следует отметить, что условие невогнутости кривой фиг. 1 устанавливает некоторые очевидные ограничения на величины пределов при растяжении-сжатии.

Таким образом, в сделанных предположениях условие пластичности идеально пластического анизотропного тела интерпретируется некоторой шестигранной призмой, грани которой параллельны прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, полностью определенной для каждого фиксированного положения осей 1, 2, 3 величинами пределов текучести при растяжении-сжатии. При изменении ориентации осей 1, 2, 3 в системе x, y, z изменяется и призма, интерпретирующая условие пластичности.

Запишем условие пластичности. Обозначим через $k_1(l_i), k_2(m_i), k_3(n_i)$ пределы текучести при растяжении и $s_1(l_i), s_2(m_i), s_3(n_i)$ пределы текучести при сжатии в направлениях 1, 2, 3. Уравнения плоскости, параллельной прямой $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, запишем в виде

$$a\sigma_1 + b\sigma_2 + c\sigma_3 = 0 \quad (a + b + c = 0) \quad (1.3)$$

Отсюда легко получить уравнения искомого условия пластичности (фиг. 1) (1.4)



Фиг. 1

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_1}{k_1} - \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{s_3} \right) \sigma_2 - \frac{\sigma_3}{s_3} &= 1 & (AB) \\ - \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{s_3} \right) \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{k_2} - \frac{\sigma_3}{s_3} &= 1 & (BC) \\ - \frac{\sigma_1}{s_1} + \frac{\sigma_2}{k_2} + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{k_2} \right) \sigma_3 &= 1 & (CD) \\ - \frac{\sigma_1}{s_1} + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{k_3} \right) \sigma_2 + \frac{\sigma_3}{k_3} &= 1 & (DE) \\ \left(\frac{1}{s_2} - \frac{1}{k_3} \right) \sigma_1 - \frac{\sigma_2}{s_2} + \frac{\sigma_3}{k_3} &= 1 & (EF) \\ \frac{\sigma_1}{k_1} - \frac{\sigma_2}{s_2} - \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{s_2} \right) \sigma_3 &= 1 & (FA) \end{aligned}$$

Определим уравнения ребер призмы, интерпретирующей условие пластичности. Легко убедиться, что искомые уравнения ребер запишутся в виде

$$\sigma_i = \sigma_j = \sigma_k - 2k_k, \quad \sigma_i = \sigma_j = -\sigma_k - 2s_k \quad (1.5)$$

Соотношения (1.5) обобщают условие полной пластичности изотропного тела. В дальнейшем рассмотрим условие $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 - 2k_3$, причем опустим индекс 3 у величины k_3 .

Известно, что

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 l_1^2 + \sigma_2 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2 \\ \tau_{xy} &= \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_2 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Здесь и в дальнейшем символы (xyz) , $(1\ 2\ 3)$ означают, что остальные зависимости олучаются круговой перестановкой индексов. Используя (1.6), получим

$$\sigma_x = \sigma - \frac{2}{3}k + 2kn_1^2, \quad \tau_{xy} = 2kn_1 n_2 \quad (xyz) (1, 2, 3) \quad (1.7)$$

где

$$k = k(n_i), \quad \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad n_1 = \cos \theta_1, \quad n_2 = \cos \theta_2, \quad n_3 = \cos \theta_3$$

Из (1.7) легко получить

$$(\sigma_x - \sigma - \frac{2}{3} k) (\sigma_y - \sigma - \frac{2}{3} k) = \tau_{xy}^2 \quad (xyz) \quad (1.8)$$

или

$$(\sigma_x - \sigma - \frac{2}{3} k) \tau_{yz} - \tau_{zx} \tau_{xy} = 0 \quad (xyz) \quad (1.9)$$

Аналогично можно найти выражение условия пластичности, соответствующее грани призмы, обобщающее выражения, данные М. Леви [2].

Подставим соотношения (1.7) в уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (xyz) \quad (1.10)$$

Получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial k}{\partial n_1} \left(\frac{1}{3} - n_1^2 \right) - 2kn_1 \right] \sin \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} - \left[\frac{\partial k}{\partial n_1} n_1 n_2 + kn_2 \right] \sin \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} - \\ & - \left[\frac{\partial k}{\partial n_1} n_1 n_3 + kn_3 \right] \sin \theta_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial n_2} \left(\frac{1}{3} - n_1^2 \right) \sin \theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial x} - \\ & - \left[\frac{\partial k}{\partial n_2} n_1 n_2 + kn_1 \right] \sin \theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial y} - \frac{\partial k}{\partial n_2} n_1 n_3 \sin \theta_2 \frac{\partial \theta_2}{\partial z} + \frac{\partial k}{\partial n_3} \left(\frac{1}{3} - n_1^2 \right) \sin \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial x} - \\ & - \frac{\partial k}{\partial n_3} n_1 n_2 \sin \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial y} - \left[\frac{\partial k}{\partial n_3} n_1 n_2 + kn_1 \right] \sin \theta_3 \frac{\partial \theta_3}{\partial z} = 0 \end{aligned} \quad (1.11)$$

причем

$$p = \sigma, \quad \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1 \quad (1.12)$$

Система четырех уравнений (1.11), (1.12) относительно четырех неизвестных p, θ_i является системой гиперболического типа.

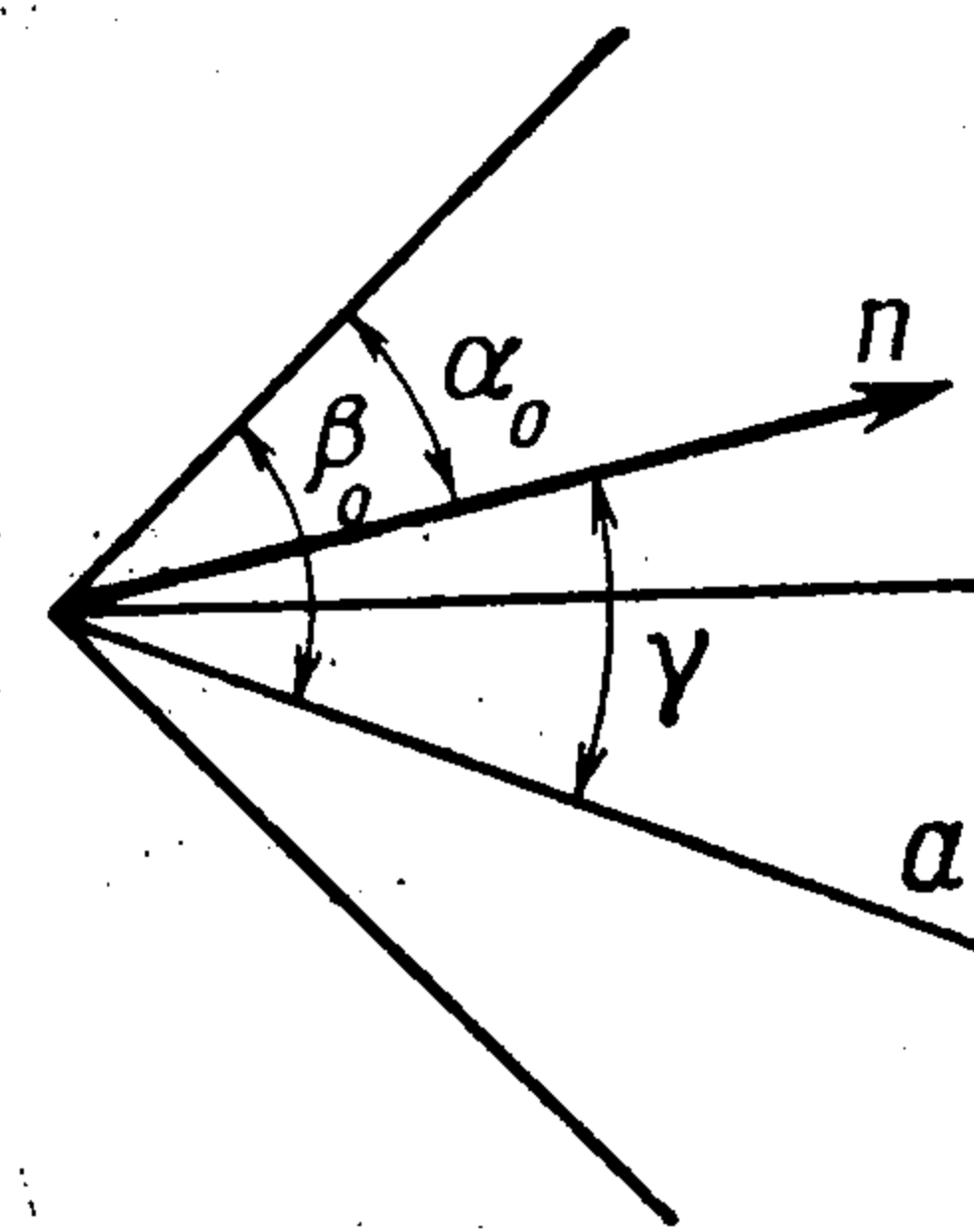
Записывая уравнение характеристической поверхности в виде $\Psi(x, y, z)$, найдем, что характеристический определитель в векторной форме имеет вид:

$$-(\text{grad } \Psi)^2 + 2(\text{grad } \Psi \cdot \mathbf{n})^2 - \frac{1}{k} (\text{grad } \Psi \cdot \mathbf{n}) \quad (1.13)$$

$$(\text{grad } \Psi \cdot \mathbf{a}) + \frac{1}{k} (\text{grad } \Psi \cdot \mathbf{n})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) = 0$$

где

$$\mathbf{n} = \mathbf{n} \{n_i\}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{a} \left\{ \frac{\partial k}{\partial n_i} \right\}$$



Фиг. 2

Обозначим через α угол между векторами $\text{grad } \Psi$ и \mathbf{n} , через β — угол между векторами $\text{grad } \Psi$ и \mathbf{a} , через γ — угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{n} . Из (1.3) получим

$$-1 + 2 \cos^2 \alpha - b \cos \alpha \cos \beta + b \cos^2 \alpha \cos \gamma = 0 \quad \left(b = \frac{|\mathbf{a}|}{k} \right) \quad (1.14)$$

В данной точке тела при заданном напряженном состоянии направления \mathbf{a} и \mathbf{n} фиксированы, направления $\text{grad } \Psi$ образуют некоторый характеристический конус. Следовательно, угол γ фиксирован, углы α, β определяют направления образующих характеристического конуса.

Предположим, что направления $\mathbf{a}, \mathbf{n}, \text{grad } \Psi$ лежат в одной плоскости (фиг. 2). Тогда $\alpha_0 = \beta_0 + \gamma_0$. Из (1.4) получим

$$\text{ctg } 2\alpha_0 = \frac{1}{2} b \sin \gamma \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что направления $\text{grad } \Psi$ в плоскости $\mathbf{a}\mathbf{n}$ взаимно ортогональны. Проведем в плоскости $\mathbf{a}\mathbf{n}$ прямую, составляющую с направле-

ниями $\text{grad } \Psi$, лежащими в этой плоскости, углы, равные $1/4 \pi$. Это направление, которое назовем осью характеристического конуса, составляет с направлением \mathbf{n} угол, равный $\alpha_0 - 1/4 \pi$. Найдем, чему равен угол, образуемый любой образующей характеристического конуса с осью. Легко найти, что искомый угол определится из выражения

$$\cos \nu = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha + \sin \alpha_0 \cos \alpha_0}{\cos \alpha (\sin \alpha_0 + \cos \alpha_0)} \right)$$

Очевидно, что для изотропного материала $\mathbf{a} = 0$, $\alpha = \alpha_0 = 1/4 \pi$, $\cos \nu = 1/2 \sqrt{2}$. В общем же случае характеристический конус не будет прямым и круговым. Это обстоятельство является следствием анизотропии материала.

Отметим, что из (1.15) следует $\cos \alpha \neq 0$.

Обратимся к определению закона пластического течения. Используя представления Мизеса [3] об экстремальности пластической работы, а также соответствующие обобщения Койтера [4] и Прагера [5] для случая наличия угловых точек на поверхности текучести, из условий пластичности (1.8) или (1.9) найдем

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{2}{3} \lambda_1 \left(1 - \frac{\partial k}{\partial \sigma_x} \tau_{yz} \right) - \frac{2}{3} \lambda_2 \left(2 - \frac{\partial k}{\partial \sigma_x} \tau_{zx} \right) - \frac{2}{3} \lambda_3 \left(2 - \frac{\partial k}{\partial \sigma_x} \tau_{xy} \right) \\ \epsilon_{xy} &= -\lambda_1 \left(\frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial \tau_{xy}} \tau_{yz} + \tau_{xz} \right) - \lambda_2 \left(\frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial \tau_{xy}} \tau_{xz} + \tau_{yz} \right) + \lambda_3 \left[\left(\sigma_z - \sigma - \frac{2}{3} k \right) - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial \tau_{xy}} \tau_{xy} \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

где

$$\frac{\partial k}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial k}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial k}{\partial n_2} \frac{\partial n_2}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial k}{\partial n_3} \frac{\partial n_3}{\partial \sigma_{ij}}$$

В данном случае существенным является необходимость дифференцирования функции k по компонентам напряженного состояния.

Для дальнейшего необходимо вывести некоторые соотношения. Из (1.7) получим

$$2\sigma_x - \sigma_y - \sigma = 2k(3n_1^2 - 1), \quad \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = 4k^2 n_1^2 (1 - n_1^2) \quad (1.17)$$

Из (1.17) следует

$$\frac{(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma)^2}{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{(3n_1^2 - 1)^2}{n_1^2 (1 - n_1^2)} \quad (1.18)$$

Из (1.18) найдем

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_x} &= \frac{n_1 (1 - n_1^2)}{1 + n_1^2}, & \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_y} &= \frac{\partial n_1}{\partial \sigma_z} = -\frac{n_1 (1 - n_1^2)}{2(1 + n_1^2)} \\ \frac{\partial n_1}{\partial \tau_{xy}} &= -\frac{n_2 (3n_1^2 - 1)}{2(1 + n_1^2)}, & \frac{\partial n_1}{\partial \tau_{xz}} &= -\frac{n_3 (3n_1^2 - 1)}{2(1 + n_1^2)}, & \frac{\partial n_1}{\partial \tau_{yz}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Подставляя выражения (1.19) в соотношения (1.16), исключая величины $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, получим

$$\begin{aligned} & d_1 \left[\epsilon_x + \epsilon_{xy} \frac{\sigma_y - \sigma - 2/3 k}{\tau_{xy}} + \epsilon_{xz} \frac{\sigma_z - \sigma - 2/3 k}{\tau_{xz}} \right] = \\ & = d_2 \left[\epsilon_{xy} \frac{\sigma_x - \sigma - 2/3 k}{\tau_{xy}} + \epsilon_y + \epsilon_{yz} \frac{\sigma_z - \sigma - 2/3 k}{\tau_{yz}} \right] = \\ & = d_3 \left[\epsilon_{xz} \frac{\sigma_x - \sigma - 2/3 k}{\tau_{xz}} + \epsilon_{yz} \frac{\sigma_y - \sigma - 2/3 k}{\tau_{yz}} + \epsilon_z \right] \end{aligned} \quad (1.20)$$

где

$$d_i = 2k + \frac{1}{n_i} \frac{\partial k}{\partial n_i} - \left(\frac{\partial k}{\partial n_1} n_1 + \frac{\partial k}{\partial n_2} n_2 + \frac{\partial k}{\partial n_3} n_3 \right)$$

Легко видеть, что справедливо также условие несжимаемости

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 0 \quad (1.21)$$

Три уравнения (1.20), (1.21) относительно трех неизвестных составляющих скоростей перемещений u, v, w принадлежат к гиперболическому типу, характеристические поверхности их определяются из уравнения (1.13). Таким образом, в рассматриваемом случае анизотропии характеристические многообразия систем уравнений, определяющих напряженное и деформированное состояния, совпадают.

Что же касается напряженного и деформированного состояния, соответствующего граням призмы условия пластичности, то этот вопрос должен быть рассмотрен особо.

2. Рассмотрим кручение призматических стержней из идеального жестко-пластического анизотропного материала. Предположим, что анизотропия стержней такова, что она не зависит от координаты z , направленной вдоль оси стержня. Как обычно, положим

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \quad (2.1)$$

Соотношения (1.6) удовлетворим, полагая $\sigma_1 = -\sigma_2, \sigma_3 = 0$, при этом ориентация осей 1, 2, 3 в системе x, y, z определяется таблицей косинусов, приведенной справа.

Любое из условий пластичности (1.4) сводится к выражению

$$\sigma_1 = \sigma_1(\theta) \quad \text{или} \quad \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2(\theta) \quad (2.2)$$

Подставляя в единственное уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

выражения напряжений $\tau_{xz} = k(\theta) \cos \theta, \tau_{yz} = k(\theta) \sin \theta$, получим

$$\left(-k \sin \theta + \frac{dk}{d\theta} \cos \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \left(k \cos \theta + \frac{dk}{d\theta} \sin \theta \right) \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \quad (2.3)$$

Определим характеристики уравнения (2.3)

$$\frac{dx}{-k \sin \theta + k' \cos \theta} = \frac{dy}{k \cos \theta + k' \sin \theta} = \frac{d\theta}{0} \quad \left(k' = \frac{dk}{d\theta} \right) \quad (2.4)$$

Из (2.4) следует, что характеристики суть прямые

$$y = \frac{k \cos \theta + k' \sin \theta}{-k \sin \theta + k' \cos \theta} x + \Phi(\theta) \quad (2.5)$$

вдоль которых $\theta = \text{const}$. Далее, используя соотношения ассоциированного закона течения, получим

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = 2\lambda \left(\tau_{xz} - k k' \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{xz}} \right), \quad \gamma_{yz} = 2\lambda \left(\tau_{yz} - k k' \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{yz}} \right) \quad (2.6)$$

Из выражения $\theta = \arctg(\tau_{yz} / \tau_{xz})$ найдем

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau_{xz}} = -\frac{\tau_{yz}}{k^2}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{yz}} = \frac{\tau_{xz}}{k^2} \quad (2.7)$$

Следовательно, закон пластического течения запишется в виде

$$\gamma_{xz} = 2\lambda \left(\tau_{xz} + \frac{k'}{k} \tau_{yz} \right), \quad \gamma_{yz} = 2\lambda \left(\tau_{yz} - \frac{k'}{k} \tau_{xz} \right) \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\tau_{yz} - \frac{k'}{k} \tau_{xz} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\tau_{xz} + \frac{k'}{k} \tau_{yz} \right) = 0 \quad (2.9)$$

Положим, что $u = cyz$, $v = -cxz$ ($c = \text{const}$), тогда из (2.9) найдем

$$(k \sin \theta - k' \cos \theta) \frac{\partial w}{\partial x} - (k \cos \theta + k' \sin \theta) \frac{\partial w}{\partial y} + cy(k \sin \theta - k' \cos \theta) + cx(k \cos \theta + k' \sin \theta) = 0 \quad (2.10)$$

Из уравнения (2.10) следует, что характеристики уравнений (2.4) и (2.10) в плоскости xy совпадают, вдоль прямых $\theta = \text{const}$ имеет место

$$w = c \int (ydx - xdy) + \text{const} \quad (2.11)$$

Выражение (2.11) совпадает с соотношением Манделя [6], выведенным для депланации при кручении призматического стержня из идеального жестко-пластического материала.

3. Обратимся к рассмотрению случая плоского деформированного состояния. Направим ось z вдоль оси бесконечно длинного цилиндрического тела и будем считать, что ни одна из компонент не зависит от z . В этом случае

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0, \quad \varepsilon_z = \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz} = 0 \quad (3.1)$$

Ограничимся рассмотрением выражений (1.9), тогда

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 = 4k^2(\theta), \quad \sigma_z = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + k(\theta) \quad (3.2)$$

Сделаем замену переменных:

$$\sigma_x = p + k \cos 2\theta, \quad \sigma_y = p - k \cos 2\theta, \quad \tau_{xy} = k \sin 2\theta \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в уравнения равновесия, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + k' \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - 2k \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + k' \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2k \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + k' \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2k \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial x} - k' \cos 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} + 2k \sin 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Характеристики системы уравнений (3.4) имеют вид:

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)_{1,2} = \frac{-k' \cos 2\theta - 2k \sin 2\theta \pm \sqrt{k'^2 + 4k^2}}{k' \sin 2\theta + 2k \cos 2\theta} \quad (3.5)$$

Легко видеть, что характеристики (3.5) взаимно ортогональны. Далее можно получить соотношения, обобщающие известные интегралы Генки [7]:

$$p \pm F(\theta) = \text{const}, \quad F(\theta) = \int \sqrt{k'^2 + 4k^2} d\theta \quad (3.6)$$

Соотношения (3.6) позволяют сформулировать обобщения теоремы Генки, устанавливающие некоторые свойства линий скольжения.

Рассмотрим закон пластического течения. Будем искать экстремум работы напряжений на приращениях деформаций для некоторого элемента тела при дополнительном условии (3.2):

$$dA = \sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + 2\tau_{xy} d\varepsilon_{xy} - d\mu [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2 - 4k^2(\theta)]$$

Экстремум находится из условий $\frac{\partial A}{\partial \sigma_x} = \frac{\partial A}{\partial \sigma_y} = \frac{\partial A}{\partial \tau_{xy}} = 0$. Будем иметь

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \lambda \left[\sigma_x - \sigma_y - 4kk' \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_x} \right] \\ \epsilon_y &= \lambda \left[\sigma_y - \sigma_x - 4kk' \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_y} \right], \quad \epsilon_{xy} = 4\lambda \left[\tau_{xy} - kk' \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{xy}} \right] \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (3.3) следует, что $\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$, откуда получим

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma_x} = -\frac{\sin 2\theta}{4k}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_y} = \frac{\sin 2\theta}{4k}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \tau_{xy}} = \frac{\cos 2\theta}{2k}$$

Окончательно закон пластического течения анизотропных сред примет вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \lambda \left(\sigma_x - \sigma_y + \frac{k'}{k} \tau_{xy} \right), \quad \epsilon_y = \lambda \left(\sigma_y - \sigma_x - \frac{k'}{k} \tau_{xy} \right) \\ \epsilon_{xy} &= 2\lambda \left[2\tau_{xy} - \frac{1}{2} \frac{k'}{k} (\sigma_x - \sigma_y) \right] \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выражения (3.8), если исключить λ , представляют два уравнения относительно двух неизвестных u, v — компонент скорости перемещения. Легко убедиться в том, что уравнения относительно компонент скорости перемещения принадлежат к гиперболическому типу и характеристики их совпадают с характеристиками уравнений для напряжения. Вдоль характеристик удлинения равны нулю, поэтому имеют место соотношения Гейрингер [4].

Отметим, что условие пластичности (3.2) по виду напоминает условие пластичности Треска, однако вследствие анизотропии линии скольжения не совпадают с линиями максимальных касательных напряжений. Следует отметить также, что в плоскости xy может реализоваться несколько условий (1.4), поэтому в общем случае необходимо предусмотреть возможность сопряжения решений.

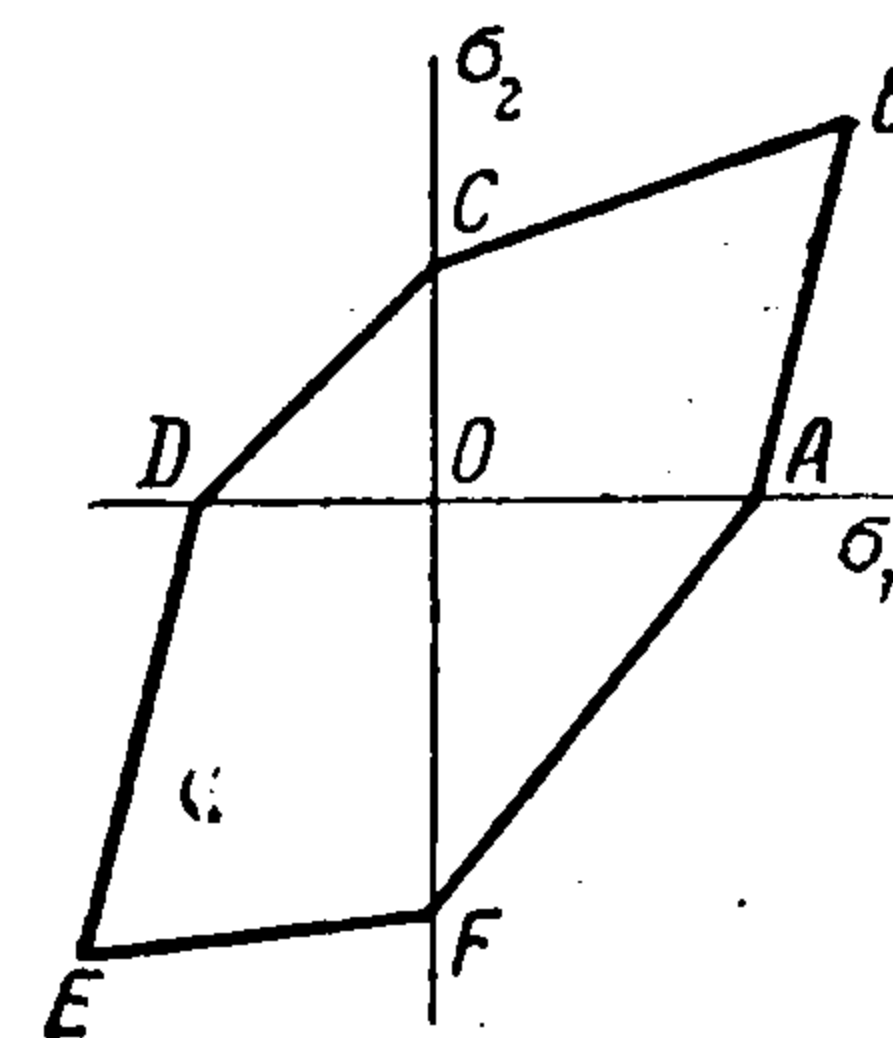
4. Наконец, рассмотрим случай плоско-напряженного состояния. Предположим, что $\sigma_3 = \sigma_z = 0, \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$. В таблице (1.2) будет иметь место $n_3 = 1, n_1 = n_2 = l_3 = m_3 = 0$. В этих предположениях величины k_3 и s_3 — постоянные.

Условие пластичности изобразится шестиугольником, представленным на фиг. 3. Из (1.4) следует, что в общем случае условие пластичности можно записать в виде

$$A(\theta) \sigma_1 + B(\theta) \sigma_2 = 1 \quad (4.1)$$

Переходя к компонентам в декартовой системе координат, получим

$$\begin{aligned} \sigma_x &= p + [C_1(\theta) - C_2(\theta) p] \cos^2 \theta \quad \left(C_1 = \frac{1}{A} \right) \\ \sigma_y &= p + [C_1(\theta) - C_2(\theta) p] \sin^2 \theta \quad \left(C_2 = \frac{A+B}{A} \right) \\ \tau_{xy} &= -[C_1(\theta) - C_2(\theta) p] \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (4.2)$$



Фиг. 3

Для сторон AB, BC, DE, EF шестиугольника фиг. 3 будем иметь $k_2 = \kappa k_1$, где κ — постоянная, равная k_3 или s_3 .

Условие пластичности (4.1) можно переписать в виде

$$AB(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + (A^2 + B^2) \sigma_x \sigma_y - (A + B)(\sigma_x + \sigma_y) - [(A - B)\tau_{xy}]^2 + 1 = 0$$

Подставляя выражения (4.2) в уравнения равновесия, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x}(1 - C_2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2} C_2 \sin 2\theta \frac{\partial p}{\partial y} + (D \sin 2\theta + D' \cos^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial x} - \Delta \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y}(1 - C_2 \sin^2 \theta) + \frac{1}{2} C_2 \sin 2\theta \frac{\partial p}{\partial x} + (D \sin 2\theta + D' \sin^2 \theta) \frac{\partial \theta}{\partial y} - \Delta \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Здесь

$$D = C_1 - C_2 p, \quad D' = \frac{dC_1}{d\theta} - p \frac{dC_2}{d\theta}, \quad \Delta = D \cos 2\theta + \frac{1}{2} D' \sin 2\theta \quad (4.4)$$

Уравнение характеристик системы (4.4) запишется в виде

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{D' \cos 2\theta - D(2 - C_2) \sin 2\theta \pm \sqrt{4D^2(2 - C_2) + D'^2}}{2(-DC_2 \cos^2 \theta + D \cos 2\theta + \frac{1}{2} D' \sin 2\theta)} \quad (4.5)$$

Вдоль характеристик имеют место соотношения

$$p + F(\theta) = \text{const}, \quad F(\theta) = \int \frac{D' \pm \sqrt{4D^2(2 - C_2) + D'^2}}{2(1 - C_2)} \quad (4.6)$$

Определим закон пластического течения. Используя соотношения (4.4) в качестве пластического потенциала, найдем

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \lambda \{2AB\sigma_x + (A^2 + B^2)\sigma_y - (A + B) - [(A'B + AB')(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \\ &+ 2(AA' + BB')\sigma_x\sigma_y - (A' + B')(\sigma_x + \sigma_y) - 2(A - B)(A' - B')\tau_{xy}^2] \tau_{xy}^\circ\} \\ \epsilon_y &= \lambda \{2AB\sigma_y + (A^2 + B^2)\sigma_x - (A + B) - [(A'B + AB')(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + \\ &+ 2(AA' + BB')\sigma_x\sigma_y - (A' + B')(\sigma_x + \sigma_y) - 2(A - B)(A' - B')\tau_{xy}^2] \tau_{xy}^\circ\} \\ 2\epsilon_{xy} &= \lambda \{-2(A - B)^2 \tau_{xy} + [(A'B + AB')(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) + 2(AA' + BB')\sigma_x\sigma_y - \\ &- (A' + B')(\sigma_x + \sigma_y) - 2(A - B)(A' - B')\tau_{xy}^2] \sigma^\circ \} \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}, \quad \tau_{xy}^\circ = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}, \quad \sigma^\circ = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

Легко убедиться, что уравнения, определяющие поле скоростей перемещений, принадлежат к гиперболическому типу и характеристики их совпадают с характеристиками (4.5).

Поступила 11 VII 1959

ЛИТЕРАТУРА

1. Hill R. Mathematical Theory of Plasticity. Oxford, 1950 (русский перевод Гостехтеоретиздат, 1956).
2. Lévy M. Extrait du Mémoire sur les équations générales des mouvements intérieurs des corps solides ductiles au delà des limites de l'élasticité pour les ramener à leur premier état. Journ. de Math. pures et appl., ser. II, t. 16, 1871 (русский перевод в сб. Теория пластичности». Изд-во иностр. лит-ры», 1948).
3. Mises R. Mechanik der plastischen Formänderung von Kristallen. ZAMM, Bd. 8, 1928.
4. Koiter W. Stress-strain relations, uniqueness and variational theorems for elastic-plastic materials with a singular yield surface. Quart. Appl. Math., 11, 1953.
5. Prager W. On the use of singular yield conditions and associated flow rules. J. Appl. Mech., 20, 1953.
6. Mandel J. Sur les déformations de la torsion plastique. C. R. Ac. Sci., Paris, 222, 1946.
7. Hencky H. Über einige statisch bestimmten Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. ZAMM, Bd. 3, 1923 (русский перевод в сб. «Теория пластичности». Изд-во иностр. лит-ры, 1948).
8. Geiringer H. Fondements mathématiques de la théorie des corps plastiques isotropes. Mem. Sci. math., Paris, 1937.