Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. А. Шестериков

(Москва)

Устойчивость при наличии ползучести рассматривалась разными авторами; некоторые исследования имеют уже десятилетнюю давность.

Большинство опубликованных работ относится к вопросам устойчивсти продольно-сжатого стержня, так как это простейшая постановка задачи, на которой можно выяснить большинство качественных характеристик устойчивости.

Необходимо отметить, что существует ряд принципиально отличных постановок задачи устойчивости при ползучести. Здесь будет рассматриваться лишь устойчивость прямолинейной формы равновесия.

Первое исследование устойчивости при наличии ползучести принадлежит А. Р. Ржаницыну [1]. В его работе рассматривалась устойчивость стержня, материал которого подчиняется соотношению вида

$$n\sigma^{\cdot} + \sigma = H\varepsilon + En\varepsilon^{\cdot} \tag{1}$$

Это уравнение описывает ограниченную ползучесть, т. е. при постоянном напряжении деформация стремится к определенному пределу. Следует подчеркнуть, что поведение стержня при продольном изгибе будет существенно различным в зависимости от того, как ползучесть материала зависит от величины накопленной деформации. Ниже будет указано предельное в этом смысле выражение. В случае установившейся ползучести показано [2], что стержень при любом сколь угодно малом эксцентрицитете выпучивается с монотонно возрастающей скоростью амплитуды, поэтому в дальнейшем рассматривается неустановившаяся ползучесть.

Перейдем к рассмотрению устойчивости стержня, материал которого подчиняется соотношению (1). Ржаницын как в работе 1946 г., так и в последующих работах рассматривал прямолинейный стержень, сжатый центральной силой, и, составляя уравнения равновесия для возмущенного состояния (не определяя достаточно точно расматриваемые возмущения), получил квазистатическое уравнение движения. Причем, как это отметил и сам автор [3], у него не выполнялись начальные условия. Далее он получал выражение для критической нагрузки, которая определялась по формуле Эйлера, где вместо E стоял длительный модуль H. Сам результат не вызывает сомнения, но метод его получения вызывает некоторое недоумение, так как уж раз приняты определенные гипотезы относительно зависимости для материала, то естественно ожидать до конца корректного решения задачи. Поэтому представляется интересным подойти к решению этой же задачи с несколько иных позиций.

Известно, что при решении задачи упругой устойчивости стержня в линейной постановке существуют несколько методов, среди которых наиболее распространенными являются: существование для данных нагрузок двух форм равновесия, устойчивость стержня при колебаниях, ограниченность прогибов, когда стержень имел начальное искривление. В данном случае при ползучести имеет место то обстоятельство, что при постоянных нагрузках деформированное состояние, вообще говоря, не остается постоянным. Поэтому вопрос о возможности одновременного существования двух форм равновесия определяется мгновенными характеристиками тела, а так как в большинстве теорий принимается, что мгновенные характеристики чисто упругие, то ничего, кроме упругой потери устойчивости, в этом направлении получить нельзя. Именно поэтому все попытки решить задачу прямым методом наталкиваются на такое противоречие, как невозможность удовлетворить начальным данным. Следовательно, такой путь не может дать полностью обоснованных результатов.

Второй метод исследования, основанный на устойчивости колебаний, применялся для определения критического состояния; он использовался в ряде работ (например, в работе [4]). Следует указать, что этот метод, вообще говоря, требует распространения принятых гипотез о поведении материала на процесс колебаний. Однако этого можно избежать, тем более что при скоростях ползучести инерция не играет роли.

Поэтому рассмотрим поведение шарнирно опертого стержня, сжатого продольной силой, материал которого подчиняется соотношению (1), причем примем, что стержень имеет начальный прогиб

$$y = a_{00} \sin \frac{\pi x}{L} \tag{2}$$

Из уравнения (1) можно выразить σ через деформацию ε; если принять гипотезу плоских сечений и рассматривать все в линейной постановке, то σ можно выразить через вторую производную от прогиба. Подставляя полученное выражение для напряжения σ в уравнение равновесия, получим окончательно уравнение для амплитуды прогиба a при продольном изгибе:

$$E(P_э - P)\dot{a} + (P_э H - PE)\frac{a}{n} = P_э \frac{H}{n} a_{00} \qquad \left(P_э = \frac{\pi^2 EI}{L^2}\right) \tag{3}$$

Здесь $P_э$ — эйлерова критическая сила,

$$a(0) = \frac{P}{P_э - P} a_{00} \quad \text{при } t = 0$$

Поэтому решение уравнения (3) имеет вид: (4)

$$\frac{a}{a_{00}} = \frac{P_э H}{P_э H - PE}\left[1 - \exp\left(-\frac{P_э H - PE}{P_э - P}\frac{t}{nE}\right)\right] + \frac{P}{P_э - P}\exp\left(-\frac{P_э H - PE}{P_э - P}\frac{t}{nE}\right)$$

при условии $P_э H - PE \neq 0$; очевидно, что при $PE > P_э H$ прогиб со временем растет неограниченно, при $PE < P_э H$ прогиб стремится к пределу:

$$a = \frac{P_э}{P_э - PE/H} a_{00} \tag{5}$$

В случае $P_э H = PE$ решение уравнения (3) имеет вид:

$$\frac{a}{a_{00}} = \frac{P}{P_э - P} + \frac{P_э(H/E)}{n(P_э - P)}\, t \tag{6}$$

которое также дает, что $a \to \infty$ при $t \to \infty$. Вывод из полученного решения совпадает с выводом А. Р. Ржаницына относительно критического напряжения, но он свободен от каких-либо недостатков.

Нужно подчеркнуть, что в отличие от исследований в упругой области при ползучести возможно кратковременное превышение нагрузкой критической величины, так как здесь существенную роль играет течение, а не мгновенные характеристики. Конечно, эта кратковременная нагрузка не может превышать упругую критическую силу.

Перейдем теперь к рассмотрению произвольного нелинейного закона упрочнения типа

$$\dot{p} = f(p, \sigma) \tag{7}$$

где p — пластическая деформация. В работе [4] был исследован вопрос устойчивости сжатого стержня при законе ползучести вида (7). В ней были предложены квазистатический и динамический подходы к решению проблемы и показано, что они дают одинаковый результат по определению устойчивости состояния. Причем для квазистатического метода точно так же, как в работах А. Р. Ржаницына, не удовлетворялись начальные условия. Здесь, последовательно проводя предложенную выше методику, покажем, что аналогичные результаты можно получить уже без каких-либо внутренних противоречий в выводе. Кроме того, метод исследования продольного изгиба при наличии начального искривления свободен от такого противоречия, которое дает квазистатическое исследование, что при течении сжатого стержня начальный прогиб может уменьшаться, что никак не соответствует ни логике рассуждений, ни экспериментальным данным.

Прежде чем приступить к исследованию, нужно отметить еще одно обстоятельство. При ползучести элементов конструкций, например при чистом изгибе, наблюдается постоянный рост прогибов со временем, поэтому определение устойчивости конструкции как ограниченность прогибов при неограниченном времени нельзя признать практически целесообразным. Поэтому введем другое определение устойчивости продольно сжатого стержня.

Состояние продольно сжатого стержня считаем устойчивым, если при постоянной нагрузке его начальный прогиб растет не быстрее, чем линейная функция времени, или, другими словами, скорость нарастания прогиба со временем не увеличивается и состояние считается неустойчивым, если прогибы растут с все увеличивающейся скоростью.

Здесь дано весьма частное определение устойчивости, которое нуждается в уточнении и расширении. Процесс продольного изгиба стержня в случае ползучести разбивается на два этапа: первый, когда рост прогибов ограничен (это имеет место при ограниченной ползучести) или происходит с примерно постоянной скоростью, и второй, когда рост прогибов носит лавинообразный характер (с ростом прогиба растет скорость прогиба).

Это определение имеет определенный смысл и для объяснения экспериментальных результатов, в которых первоначально наблюдается сближение траверс испытательной машины с постоянной скоростью, а затем быстрое нарастание скорости.

Согласно введенному определению один и тот же стержень при одних и тех же нагрузках может находиться как в устойчивом, так и в неустойчивом состоянии в зависимости от накопленной пластической деформации.

Рассмотрим шарнирноопертый стержень, сжатый продольной силой P; для начального прогиба примем соотношение (2). Считаем прогибы малыми и поэтому для приращений напряжений и деформаций, характеризующих изгиб стержня, примем варьированное соотношение (7):

$$\delta p^{\cdot} = \frac{\partial f}{\partial p}\delta p + \frac{\partial f}{\partial \sigma}\delta\sigma = \lambda\delta p + \mu\delta\sigma \tag{8}$$

Учитывая, что

$$\delta\varepsilon = \varkappa z - \varkappa_0 z = \delta p + \frac{\delta\sigma}{E}, \qquad \int\limits_F \delta\sigma z dz = -P^{\cdot} y$$

и принимая $y = a\sin(\pi x / L)$, получим для a уравнение

$$(P_э - P)\, a^{\cdot} + (-\lambda P_э + \lambda P - E\mu P)\, a = -P_э\lambda a_{00} + \frac{aP^{\cdot}}{E} \tag{9}$$

Перейдем к безразмерному прогибу

$$u = \frac{a}{a_0} = \frac{a}{a_{00}}\left(1 - \frac{P}{P_э}\right) \tag{10}$$

и считаем $P^{\cdot} = 0$, тогда (9) перепишется в виде

$$u^{\cdot} + u(-\lambda - E\beta\mu) = -\lambda \qquad \left(\beta = \frac{P}{P_э - P}\right) \tag{11}$$

Уравнение (11) не зависит от начального прогиба a_{00}, начальное условие имеет вид: $u(0) = 1$; следовательно, все качественные выводы относительно определения устойчивого и неустойчивого состояний стержня не будут зависеть от величины начального прогиба стержня.

Исследуем уравнение (11). Принимаем, что (7) характеризует упрочнение, тогда $\lambda < 0$ и $\mu > 0$. При $t = 0$ имеем $u^{\cdot} > 0$, т. е. после приложения нагрузки прогиб растет. Исследуем рост прогиба со временем. Так как μ и λ — характеристики основного деформированного состояния стержня, получаемого из интегрирования (7) при $\sigma = \mathrm{const}$, то они представляют собой известные функции времени. Тогда легко получить решение уравнения (11), которое имеет вид

$$u = \left\{c_1 - \int\limits_0^t \lambda \exp\left[-\int\limits_0^\tau (E\mu\beta + \lambda)\, d\tau\right] d\tau\right\} \exp\left[\int\limits_0^\tau (E\mu\beta + \lambda)\, d\tau\right] \tag{12}$$

Из (12) можно найти области, где $u^{\cdot}$ не возрастает и $u^{\cdot}$ возрастает, которые согласно введенному определению дадут область устойчивости и неустойчивости. В общем виде точно исследовать это соотношение вряд ли возможно, но некоторые данные можно получить из рассмотрения уравнения (11). Если принять, что коэффициенты в этом уравнении меняются мало и их можно считать постоянными, то решение уравнения (11) запишется в виде

$$u = \frac{\lambda}{\lambda + E\mu\beta} + ce^{(-\lambda - E\beta\mu)\,t} \tag{13}$$

Пусть $\lambda + E\mu\beta < 0$ и $\lambda < 0$; так как прогиб с ростом t увеличивается, то $c < 0$ и, следовательно, $u^{\cdot\cdot} < 0$, поэтому $u^{\cdot}$ не возрастает и, таким образом, имеем устойчивое состояние.

Если $\lambda + E\mu\beta > 0$ и $\lambda < 0$, то $c > 0$, в этом случае имеем неустойчивое состояние.

Границей областей устойчивости и неустойчивости будет условие $\lambda + E\mu\beta = 0$, что полностью совпадает с квазистатическим критерием устойчивости.

Здесь представляет интерес рассмотреть один случай, когда выполняется равенство $\lambda + E\mu\beta = 0$ не для одного какого-то момента времени, а для всех значений, а следовательно, для любого p, предположив, кроме того, что f представлена в виде $f = g(p)\psi(\sigma)$; получим

$$\psi \frac{dg}{dp} + E\beta g \frac{d\psi}{d\sigma} = 0 \tag{14}$$

и так как $\sigma = \text{const}$, то $g = e^{-\gamma p}$

$$-\psi\gamma + E\beta \frac{d\psi}{d\sigma} = 0 \tag{15}$$

Второе соотношение определяет критическое значение σ_*, причем легко показать, что при $\sigma < \sigma_*$ стержень всегда устойчив, при $\sigma > \sigma_*$ стержень всегда неустойчив. Закон ползучести вида (15) описывает неограниченную ползучесть, но здесь деформации ползучести при постоянном напряжении растут, как $\ln t$. Видно, что здесь условия такие же, как для соотношения (1), и можно сказать, что этот закон представляет верхнюю границу для соотношений, описывающих ограниченную и, как показано выше, даже неограниченную ползучесть, для которых существует критическое напряжение, не зависящее от величины накопленной деформации.

Необходимо указать также, что в случае установившейся ползучести $\lambda = 0$ и, следовательно, всегда имеет место неустойчивое состояние.

Исследуем уравнение (11) с учетом переменности λ и μ для одного частного закона ползучести, когда соотношение (7) имеет вид:

$$p^{\cdot} = f(p, \sigma) = \varphi(p)\psi(\sigma) \tag{16}$$

Согласно этому равенству

$$dt = \frac{dp}{f} \tag{17}$$

Из (11) получим

$$\frac{du}{dp} + u\left(-\frac{d\ln\varphi}{dp} - \frac{n}{\varepsilon_э - \varepsilon}\right) = -\frac{d\ln\varphi}{dp} \qquad \left(n = \sigma\frac{d\ln\psi}{d\sigma},\ \varepsilon = \frac{\sigma}{E}\right) \tag{18}$$

Здесь $\varepsilon_э$ — эйлерова критическая деформация для стержня, p как функция времени определяется соотношением (17). Проинтегрируем (18) с учетом начального условия, что $u = 1$ при $t = 0$, а это означает, что и при $p = 0$:

$$u = \varphi e^{p_1}\int_0^p e^{-p_1} d\left(\frac{1}{\varphi}\right), \qquad p_1 = \frac{np}{\varepsilon_э - \varepsilon} \tag{19}$$

Условие критического состояния имеет вид:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = 0 \tag{20}$$

В общем виде интеграл (19) в элементарных функциях не выражается. Рассмотрим частный вид зависимости (16). Примем

$$\varphi(p) = p^{-\alpha} \tag{21}$$

В этом случае (19) имеет вид:

$$u = p^{-\alpha} e^{p_1} \int_0^p e^{-p_1} \, dp^{\alpha} \tag{22}$$

В этом выражении, когда α — целое число, легко произвести интеграцию; так в случае $\alpha = 1$ равенство (22) имеет вид

$$u = \frac{e^{p_1} - 1}{p_1} \tag{23}$$

Используя условие (20), получим для определения критического состояния условие

$$e^{p_1} = \frac{1}{1 - p_1 + {}^1/_3\, p_1^2} \tag{24}$$

Кроме решения $p_1 = 0$, существует еще одно

$$p_1 = 1.36 \tag{25}$$

По приближенному и квазистатическому критериям имеем условие

$$p_1 = \alpha \tag{26}$$

Условие (25), являющееся более точным и оправданным, дает значения критического времени больше, чем по приближенной теории, что, вообще говоря, соответствует экспериментальным данным.

В случаях $\alpha = 2$ и $\alpha = 3$ аналогичным методом получаем, что

$$p_1 = 3.10 \quad (\alpha = 2), \qquad p_1 = 4.98 \quad (\alpha = 3) \tag{27}$$

Очевидно, что с ростом α разница по точному и по приближенному методам растет.

Все сказанное верно, когда рассматриваются достаточно гладкие соотношения вида (8), т. е. такие, что выражение $-\lambda - \beta\mu E$ меняет знак лишь один раз. В противном случае могут существовать несколько зон устойчивости и неустойчивости.

В заключение необходимо указать, что обычно линейная постановка дает верхнее значение критической силы. В данном случае имеем нижнюю оценку несущей способности стержня, т. е. по достижении критического состояния стержень не разрушается, а будет наблюдаться только ускоренный рост прогибов.

Поступила 11 VI 1959

МГУ, Кафедра теории пластичности

ЛИТЕРАТУРА

1. Ржаницын А. Р. Процессы деформирования конструкций из упруговязких элементов. Докл. АН СССР, т. 52, вып. 25, 1946.
2. Хофф Н. Продольный изгиб и устойчивость. Изд.-во иностр. лит.-ры, М., 1955.
3. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. Изд.-во лит. по стр. и арх., М., 1954.
4. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок. ПММ, т. XXI, вып 3, 1957.