Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

ИЗГИБ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ПЕРЕМЕННЫМ ПО ГЛУБИНЕ МОДУЛЕМ УПРУГОСТИ

Г. Я. Попов

(Новосибирск)

Задача о вдавливании штампа в неоднородное упругое полупространство разбиралась в работах Б. Г. Коренева [1] и В. И. Моссаковского [2]. В настоящей заметке дается решение задачи об изгибе неограниченной тонкой плиты, лежащей на упругом полупространстве, модуль упругости которого является степенной функцией глубины. Более детально разобран плоский случай этой задачи, т. е. изгиб балочной плиты. Путем предельного перехода получено в новой форме решение задачи об изгибе балочной плиты на однородном упругом полупространстве [3].

§ 1. Известно [4], что в случае полупространства с модулем упругости изменяющимся с глубиной по закону $E = E_\nu z^\nu$, вертикальные смещения $w(x, y)$ граничных точек $z = 0$ полупространства и нормальные напряжения $p(x, y)$, распределенные по площади S плоскости $z = 0$, связаны зависимостью

$$w(x, y) = \frac{1}{\pi D_\nu} \iint\limits_S \frac{p(\xi, \eta)\, d\xi d\eta}{\sqrt{[(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2]^{\nu+1}}}, \qquad D_\nu = \frac{\alpha}{E_\nu} \tag{1.1}$$

где α — коэффициент, зависящий от ν и коэффициента Пуассона μ, берется из графиков или таблиц работы [4].

Здесь, как и в работах [1,2], предполагается, что $0 \leqslant \nu < 1$.

Пусть на неограниченную тонкую плиту с цилиндрической жесткостью D, лежащую на полупространстве с указанными выше свойствами, приложена вертикальная нагрузка вида

$$q(x, y) = \delta(x) \cos \lambda y, \qquad \lambda \geqslant 0$$

$\delta(x)$ — импульсная функция, описывающая здесь единичную сосредоточенную силу, приложенную в начале. В этом случае напряжение под плитой $p(x, y)$ будет иметь аналогичный вид, т. е. $p(x, y) = p_\lambda(x) \cos \lambda y$.

Подставив написанное выражение для $p(x, y)$ в правую часть (1.1), после элементарных преобразований получим

$$w(x, y) = w_\lambda(x) \cos \lambda y, \quad w_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} k(|x - \xi|)\, p_\lambda(\xi)\, d\xi \tag{1.2}$$

причем

$$k(\alpha) = \frac{1}{\pi D_\nu} \int_{-\infty}^{\infty} (a^2 + t^2)^{-\frac{\nu+1}{2}} \cos \lambda t\, dt \tag{1.3}$$

Здесь не учитывается касательное взаимодействие между плитой и полупространством и предполагается двусторонняя связь между плитой и полупространством. Последнее означает, что прогибы плиты равны смещениям граничных точек полупространства.

Ввиду этого $w(x,y)$ должна удовлетворять известному бигармоническому уравнению теории тонких плит, т. е. в разбираемом случае будем иметь уравнение

$$D\left(\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\right)^2 w_\lambda(x)=\delta(x)-p_\lambda(x) \tag{1.4}$$

Подставив (1.2) в (1.4), для $p_\lambda(x)$ получим уравнение

$$p_\lambda(x)+\left(\frac{d^2}{dx^2}-\lambda^2\right)^2 D\int_{-\infty}^{\infty} k(|x-\xi|)\,p_\lambda(\xi)\,d\xi=\delta(x) \tag{1.5}$$

Это интегро-дифференциальное уравнение легко решается средствами операционного исчисления. Применим для этой цели, например, преобразование Фурье. Введем следующие обозначения:

$$\frac{\nu+3}{2}=\frac{m}{n}, \qquad \frac{D_\nu\Gamma(^1/_2(1+\nu))}{2^{1-\nu}D\Gamma(^1/_2(1-\nu))}=\gamma=c^m \tag{1.6}$$

Решения уравнения (1.5) можно представить в виде

$$p_\lambda(x)=\frac{c^m}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-iux}du}{c^m+(u^2+\lambda^2)^{m/n}} \tag{1.7}$$

Преобразование Фурье ядра разбираемого уравнения согласно (1.3)

$$K(u)=\int_{-\infty}^{\infty}k(\alpha)\,e^{i\alpha u}d\alpha=\frac{1}{\pi D_\nu}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos\lambda t\cos u\alpha}{(\alpha^2+t^2)^{1/_2(\nu+1)}}\,dt\,d\alpha \tag{1.8}$$

Применяя к двойному интегралу (1.8) преобразования, аналогичные проделанным над интегралом (2.63) в работе [5] (стр. 171), найдем

$$K(u)=c^{-m}D^{-1}\sqrt{(u^2+\lambda^2)^{\nu-1}}$$

Подставив (1.8) в (1.2), найдем

$$w_\lambda(x)=\frac{1}{2\pi D}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{(u^2+\lambda^2)^{\nu-1}}\,e^{-iux}}{c^m+(u^2+\lambda^2)^{m/n}}\,du \tag{1.9}$$

§ 2. Преобразуем плохо сходящиеся интегралы, фигурирующие в формулах (1.7), (1.9), в быстро сходящиеся с помощью методов контурного интегрирования.

С этой целью установим корни и особые точки функции

$$F_\lambda(w)=c^m+(w^2+\lambda^2)^{m/n} \tag{2.1}$$

При этом будем предполагать, что m и n — целые числа. Это ограничение затем будет отброшено.

Очевидно, функция $F_\lambda(w)$ имеет две точки ветвления $w=\pm i\lambda$. Чтобы найти корни функции (2.1), представим ее в виде произведения

$$F_\lambda(w)=\prod_{k=1}^{m}\left(\sqrt[n]{w^2+\lambda^2}-a_k\right), \qquad a_k=c\cdot\exp\left(i\pi\frac{1-2k}{m}\right) \quad (k=1,\ldots,m) \tag{2.2}$$

Условимся во всем дальнейшем выбирать ту однозначную ветвь функции

$$z = (w^2 + \lambda^2)^{m/n}$$

которая определена в плоскости с выключенными лучами $(-i\infty, -i\lambda)$ и $(i\infty, i\lambda)$ и посредством которой указанная область отображается на клинообразную область

$$|\arg z| = \pi \frac{m}{n} \quad \text{или} \quad \left|\arg \sqrt[n]{(w^2+\lambda^2)^m}\right| < \frac{\pi m}{n}$$

и, в частности,

$$\left|\arg \sqrt[n]{w^2+\lambda^2}\right| < \frac{\pi}{n}$$

Следовательно, корнями функции $F_\lambda(w)$ будут только такие из чисел $\sqrt{a_k{}^n - \lambda^2}$, $k = 1, \ldots, m$, для которых справедливо неравенство

$$|\arg a_k| \leqslant \frac{\pi}{n} \tag{2.3}$$

Нетрудно обнаружить, учитывая неравенство $m > n$, что числа

$$a_1 = c \exp\left(-i\frac{\pi}{m}\right) = b_2, \qquad a_m = c \exp i\frac{\pi}{m} = b_1 \tag{2.4}$$

удовлетворяют условию (2.3).

Кроме чисел (2.4) не найдется других из совокупности $a_1, \ldots, a_m$, обладающих свойством (2.3). Это следует из того, что аргументы всех чисел a_k монотонно убывают от $\arg a_1 = -\pi/m$ до $\arg a_m = \pi/m - 2\pi$ и уже для a_2 не выполняется требование (2.3), так как $^3/_2 \leqslant m/n < 2$ в силу (1.6) и $0 \leqslant \nu < 1$; наконец, числа a_k должны быть попарно сопряженными.

Таким образом, в общем случае $(0 \leqslant \nu < 1)$ функция $F_\lambda(w)$ будет иметь только два корня в нижней и только два в верхней полуплоскости

$$w = \alpha_j = \sqrt{b_j{}^n - \lambda^2}, \qquad \operatorname{Im}\sqrt{b_j{}^n - \lambda^2} > 0 \qquad (j = 1, 2) \tag{2.5}$$

$$w = -\alpha_j \qquad (j = 1, 2) \tag{2.6}$$

§ 3. Вернемся теперь к формулам (1.7) и (1.9). Учитывая изложенное в § 2, продеформируем путь интегрирования в интеграле правой части (1.7) при $x < 0$ в петлю, охватывающую луч $(i\lambda, i\infty)$, а при $x > 0$ в петлю, охватывающую луч $(-i\lambda, -i\infty)$.

В результате выполнения связанных с этим выкладок и использования (1.6) и $c^m = \gamma$ вместо (1.8) будем иметь

$$p_\lambda(x) = \gamma\left(\frac{1}{\pi}\sin\frac{\nu+3}{2}\pi\int\limits_\lambda^\infty \frac{(s^2-\lambda^2)^{1/2(\nu+3)}\, e^{-s|x|}\, ds}{\gamma^2 + 2\gamma\cos\left[{}^1/_2(\nu+3)\pi\right](s^2-\lambda^2)^{1/2(\nu+3)} + (s^2-\lambda^2)^{\nu+3}} + \right.$$

$$\left. + i\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\nu+3}\frac{e^{i\alpha|x|}}{\alpha_j \beta_j^{m-n}}\right) \tag{3.1}$$

При этом нетрудно убедиться, что $b_{1,2}{}^{m-n} = (b_{1,2}{}^n)^{1/2(\nu+1)}$, в свою очередь,

$$b_{1,2}{}^n = \gamma^{2/(\nu+3)} \exp\left(\pm i\pi\frac{2}{\nu+3}\right) \tag{3.2}$$

Аналогично преобразовывается формула (1.9)

$$w_\lambda(x) = -\frac{\gamma}{\pi D}\sin\frac{\nu+3}{2}\pi\int\limits_\lambda^\infty \frac{(s^2-\lambda^2)^{1/2(\nu-1)}e^{-s|x|}ds}{\gamma^2+2\gamma\cos[{}^1/_2(\nu+3)\pi](s^2-\lambda^2)^{1/2(\nu+3)}+(s^2-\lambda^2)^{\nu+3}}+$$

$$+i\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\nu+3}\frac{e^{i\alpha_j|x|}}{a_j b_j{}^n} \qquad (3.3)$$

Выражения для напряжения $p(x, y)$ под плитой и прогибов $w(x, y)$ плиты, нагруженной единичной сосредоточенной силой в начале будут

$$p(x, y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty p_\lambda(x)\cos\lambda y d\lambda, \quad w(x, y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty w_\lambda(x)\cos\lambda y d\lambda \qquad (3.4$$

При этом, если приходится пользоваться прямоугольной системой координат, например, при расчете фундаментной плиты под прямоугольную сетку колонн, то в правые части формул (3.4) следует подставлять $p_\lambda(x$ и $w_\lambda(x)$, взятые в виде (3.1) и (3.3).

В тех же случаях, когда более удобна полярная система координат (осесимметричные нагрузки), то для $p_\lambda(x)$ и $w_\lambda(x)$ следует брать их первоначальные выражения (1.7) и (1.9)

При этом для напряжения под плитой, нагруженной единичной силой в начале, $p(r)$ для прогибов плиты $w(r)$ будем иметь

$$p(r) = \frac{\gamma}{2\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\rho I_0(\rho r)}{\gamma+\rho^{\nu+3}}d\rho, \quad w(r) = \frac{1}{2\pi D}\int\limits_0^\infty \frac{\rho^{(\nu)}I_0(\rho r)}{\gamma+\rho^{\nu+3}}d\rho \qquad (3.5)$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$

§ 4. Остановимся подробнее на плоском случае разбираемой задачи. Рассмотрим вначале задачу об изгибе балочной плиты, нагруженной будет единичной сосредоточенной по линии $x = 0$-нагрузкой.

Нетрудно убедиться, что напряжение $p_x(x)$ под плитой в этом случае определяться из следующего предельного соотношения

$$p_I(x) = \lim p_\lambda(x) \qquad \text{при } \lambda \to 0 \qquad (4.1)$$

а изгибающие моменты в плите $M_I(x) = Dy''(x)$ из соотношения

$$M_I(x) = \lim_{\lambda\to 0} D\frac{d^2w_\lambda(x)}{dx^2} \qquad (4.2)$$

Полагая $\lambda = 0$ в правой части (3.1) и учитывая, что на основании (2.5) и (3.2)

$$\lim_{\lambda\to 0}\alpha_{1,2} = \pm\gamma^{\frac{1}{\nu+3}}\exp\left(\pm\frac{\pi}{\nu+3}\right)$$

получим

$$p_I(x) = \gamma^{\frac{1}{\nu+3}}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\sin[{}^1/_2(\nu+3)\pi]s^{\nu+3}\exp(-\gamma^{\frac{1}{\nu+3}}s|x|)ds}{1+2\cos[{}^1/_2(\nu+3)\pi]s^{\nu+3}+s^{2(\nu+3)}}+\right. \qquad (4.3)$$

$$\left.+\frac{2}{\nu+3}\sin\left(\gamma^{\frac{1}{\nu+3}}|x|\cos\frac{\pi}{\nu+3}+\frac{\pi}{\nu+3}\right)\exp\left(-\gamma^{\frac{1}{\nu+3}}|x|\sin\frac{\pi}{\nu+3}\right)\right\}$$

Аналогично (после двукратного дифференцирования) из (3.2) найдем

$$M_I(x) = -\gamma^{-\frac{1}{\nu+3}}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin[{}^1/_2(\nu+3)\pi]\, s^{\nu+1}\exp\left(-\gamma^{\frac{1}{\nu+3}}|x|s\right)ds}{1+2s^{\nu+3}\cos[{}^1/_2(\nu+3)\pi]+s^{2(\nu+3)}} -\right.$$

$$\left. -\frac{2}{\nu+3}\sin\left(\gamma^{\frac{1}{\nu+3}}|x|\cos\frac{\pi}{\nu+3}-\frac{\pi}{\nu+3}\right)\exp\left(-\gamma^{\frac{1}{\nu+3}}|x|\sin\frac{\pi}{\nu+3}\right)\right\} \quad (4.4)$$

Пользуясь полученными выражениями для $p_I(x)$ и $M_I(x)$, можно дать весьма простые формулы для отыскания наибольшего напряжения $\max p_I$ под плитой и наибольшего изгибающего момента в плите $\max M_I$. Эти формулы имеют вид

$$\max\begin{cases}p_I\\ M_I\end{cases} = \frac{1}{\nu+3}\gamma^{\pm\frac{1}{\nu+3}}\left(2\sin\frac{\pi}{\nu+3}+\frac{\cos[2\pi/(\nu+3)]}{\sin[\pi/(\nu+3)]}\right) \quad (4.5)$$

Чтобы получить формулы (4.5) из (4.3) и (4.4), следует положить там $x=0$. Затем полученные в результате этого предельного перехода несобственные интегралы преобразовать к такому виду, чтобы можно было воспользоваться соотношением

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{t^\alpha dt}{1-2t\cos\lambda+t^2} = \frac{\sin\alpha(\pi-\lambda)}{\sin\lambda\sin\pi\alpha}, \qquad \lambda^2<\pi^2 \quad (4.6)$$

Последнее соотношение было получено методами контурного интегрирования. При этом контур интегрирования состоял из петли, охватывающей начало координат и отрезок $(O,\ R)$ вещественной оси, и окружности радиуса $R\to\alpha$.

Полагая в формулах (4.3) и (4.4)

$$\nu=0, \quad \gamma^{\frac{1}{\nu+3}} = \{E_0[2(1-\mu^2)D]^{-1}\}^{\frac{1}{3}} = c_0 \quad (4.7)$$

найдем следующие формулы для напряжения $p_0(x)$ под плитой и изгибающего момента $M_0(x)$ в балочной плите, лежащей на упругом однородном полупространстве и нагруженной единичной нагрузкой, сосредоточенной по линии

$$p_0(x) = \frac{2c_0}{3}e^{-0.5\sqrt{3}c_0|x|}\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{c_0|x|}{2}\right) - \frac{c_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-c_0|x|s}\, s^3 ds}{1+s^6} \quad (4.8)$$

$$M_0(x) = -\frac{2}{3c_0}e^{-0.5\sqrt{3}c_0|x|}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{c_0|x|}{2}\right) + \frac{1}{\pi c_0}\int_0^\infty \frac{c^{-c_0|x|s}\, s ds}{1+s^6} \quad (4.9)$$

Эти формулы, полученные впервые нами в работе [3] иным путем имеют некоторые преимущества перед формулами других авторов; следует заметить, что формула (10) работы [3] содержит опечатку: вместо $\cos({}^1/_2\pi - {}^1/_2 c|x|)$ должно быть $\cos({}^1/_6\pi - {}^1/_2 c|x|)$.

§ 5. Если на балочную плиту по линии $x=0$ действует сосредоточенная моментная нагрузка, вращающаяся по часовой стрелке, то формулы для изгибающих моментов $M_{II}(x)$ в сечениях плиты и напряжения под плитой $p_{II}(x)$ можно легко получить, исходя из формул (4.3), (4.4), пользуясь зависимостью

$$M_{II},\ p_{II} = -\frac{d}{dx}(M_I,\ p_I) \quad (5.1)$$

В том случае, если балочная плита загружена единичной деформацией [5] по сечению $x = 0$, то для вычисления изгибающих моментов $M_{III}(x)$ в плите и напряжения $p_{III}(x)$ под плитой следует воспользоваться зависимостями (ср.[3])

$$M_{III},\ p_{III} = \frac{d^2}{dx^2}(M_I,\ p_I) \tag{5.2}$$

В заключение заметим, что можно получить точное решение задачи об изгибе полубесконечной плиты, лежащей на упругом полупространстве, рассмотренного здесь вида.

Для этого аналогично тому, как сделано в работе [7], следует сперва задачу свести к интегральному уравнению типа Винера—Хопфа 1-го рода, а затем решить последнее, применяя известную методику [6].

Новосибирский
инженерно-строительный институт

Поступила 6 X 1958.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коренев Б. Г. Штамп, лежащий на упругом полупространстве, модуль упругости которого является функцией глубины. ДАН СССР, т. 112, № 5, 1957.
2. Моссаковский В. И. Давление круглого штампа на упругое полупространство, модуль упругости которого является степенной функцией глубины. ПММ, т. XXII, вып. 1, 1958.
3. Попов Г. Я. О расчете неограниченной шарнирно-разрезной балочной плиты, лежащей на упругом полупространстве. Изв. высш. уч. зав., Стр. и арх., № 3, 1959.
4. Клейн Г. К. Учет неоднородности, разрывности деформаций и других механических свойств грунта при расчете сооружений на сплошном основании. Сб. тр. МИСИ, № 14, 1956.
5. Коренев Б. Г. Некоторые вопросы расчета балок и плит на упругом основании. Госстройиздат. М., 1954.
6. Крейн М Г. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. УМН, № 5, 1958.
7. Попов Г. Я. Изгиб полубесконечной плиты на упругом комбинированном основании. ДАН СССР, т. 126, № 3, 1959.