

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО НЕОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕХОДНОЙ ТОЧКОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К РАСЧЕТАМ ТОРООБРАЗНЫХ ОБОЛОЧЕК И ЛОПАСТЕЙ

С. А. Тумаркин

(Москва)

Во многих областях применяются асимптотические решения дифференциальных уравнений вида (1.1), содержащих малый параметр.

Малому параметру при старшей производной сопутствуют явления пограничного слоя или краевого эффекта. При этом обычные приближенные методы практически не пригодны (способы степенных и тригонометрических рядов, интерполяционные и т. п.). При асимптотическом методе наличие малого параметра не влечет трудностей, а, напротив, вносит упрощение. Отпадает процесс численного решения дифференциального уравнения, так как общее решение выражается формулами через известные и табулированные функции — показательные, бесселевы и т. п.

Асимптотические решения наталкиваются на трудности, если коэффициент $q(x)$ в уравнении (1.1) имеет простой нуль внутри или на краю рассматриваемого интервала. (Такой случай имеет место, например, при расчетах торообразных оболочек, содержащих участки, где нормаль к меридиану параллельна оси вращения, а также при расчетах труб с криволинейной осью. Примером, где коэффициент обращается в нуль на краю интервала, служит расчет лопастей, где $q(x)$ исчезает в силу того, что в крайнем сечении лопасти центробежная сила равна нулю; то же бывает при расчетах стержней.)

В этих случаях обычные асимптотические решения, выражающиеся через $e^{\pm x}$, не пригодны. Для решений однородных уравнений получены асимптотические ряды, которые вместо $e^{\pm x}$ содержат функции Эйри [1-8].

В данной статье рассматриваются асимптотические решения неоднородных уравнений и некоторые их приложения [8]. Отметим, что некоторые результаты в этой области опубликованы также в работах [9, 10, 11].

Изложенный метод позволяет получать решения и в случаях, когда $q(x)$ имеет нуль какого-либо иного порядка¹.

В § 1 уравнение (1.1) приводится к типовому виду; в § 2 выводится асимптотический ряд для решения неоднородного уравнения в случае комплексных значений малого параметра; в § 3 даны контурные интегралы, степенные и асимптотические ряды для специальных функций, входящих в решение; в § 4 рассматривается случай действительных значений малого параметра (этот случай является особым); в § 5 указывается вторая форма асимптотического решения неоднородного уравнения; в § 6 и 7 в качестве примеров даны приложения метода к расчету торообразных оболочек и к расчету стержней и лопастей; в § 8 приведены таблицы и графики функций, входящих в решение.

¹ После разработки излагаемого здесь метода автору стали известны работы Рейсснера и Кларка [9, 10], рассматривавших неоднородное уравнение

$$z'' - i\mu z \sin \xi = i\mu k \cos \xi$$

и близкие к нему уравнения. Сравнение показывает, что метод Рейсснера и Кларка иной и ими получено значительно менее полное и точное решение. Точность этого решения, в частности, ниже точности уравнений теории оболочек (см. ниже § 2 и 6).

§ 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\varepsilon \frac{d}{dx} \left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \varepsilon r(x)] y = f(x) \quad (1.1)$$

где ε — малый параметр, действительный или комплексный; независимая переменная x — действительная; коэффициенты уравнения — действительные и имеют необходимое число производных; неизвестная функция y и правая часть f могут быть комплексными; относительно коэффициентов p и q предполагается, что $p(x) \neq 0$, а $q(x)$ обращается в нуль в одной точке заданного отрезка (a, b) , которую можно считать точкой $x = 0$, причем $q(x) = xq_1(x)$, где $q_1(x) \neq 0$.

Не уменьшая общности, можно считать $p(x)$ и $q_1(x)$ положительными.

Уравнение (1.1) можно привести к виду [1, 2, 4–7].

$$\varepsilon \frac{d^2 \eta}{du^2} + u \eta = g \quad (1.2)$$

т. е. к известному уравнению

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + t \eta = 0 \quad (1.3)$$

с правой частью. Для этого в уравнении (1.1) независимая переменная x заменяется на u , где u — ряд по степеням параметра [5]

$$u = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots \quad (1.4)$$

а функция y заменяется на η подстановкой

$$y = w \eta, \quad w = \frac{1}{\sqrt{pu'}} \quad (1.5)$$

где w выбрано так, чтобы избавиться от $d\eta/du$.

Штрихами здесь обозначены производные по x . Коэффициенты ряда (1.4) определяются квадратурами из рекуррентных дифференциальных уравнений. Выражения первых двух коэффициентов

$$u_0 = \pm \left(\frac{3}{2} \int_0^x \sqrt{\frac{|q|}{p}} dx \right)^{2/3} \quad (1.6)$$

где знак u_0 берется такой же, как знак x , и

$$u_1 = \frac{1}{2u_0^{1/2}} \int_0^{\sigma} \frac{\sigma}{u_0^{1/2}} dx \quad \left(\sigma = v [rv + (pv)'], v = \frac{1}{\sqrt{pu_0'}} \right) \quad (1.7)$$

Правая часть уравнения (1.2) равна

$$g = \frac{f}{pu_0'^2} = \frac{f}{\sqrt{pu_0'^3}} = \frac{fw}{u'} \quad (1.8)$$

где функцию g в силу (1.4) можно было бы представить в виде ряда

$$g = g_0(x) + \varepsilon g_1(x) + \varepsilon^2 g_2(x) + \dots \quad (1.9)$$

Отметим полезные равенства:

$$pu_0'^2 = q, \quad pqu_0'^4 = u_0, \quad pv^2 u_0' = 1 \quad (1.10)$$

При сохранении в ряде (1.4) одного, двух, трех, ... членов, решения уравнения (1.2) дают для решений уравнения (1.1) асимптотические приближения все более высоких порядков [5].

Введем вместо x комплексную независимую переменную

$$t = \rho u \quad \left(\rho^3 = \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (1.11)$$

Уравнение (1.2) примет вид:

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} + t \eta = \rho g \quad (1.12)$$

При малых ε в правой части (1.12) величина g — медленно изменяющаяся функция t , так как по (1.9) и (1.11) она изменяется как функция аргумента t/ρ .

Решениями однородного уравнения (1.3) служат функции Эйри. Для них имеются таблицы [2, 3, 12—14].

§ 2. Найдем асимптотический ряд для частного решения уравнения (1.12) с медленно изменяющейся правой частью на прямой $t = \rho u$ комплексной плоскости t . Эти прямые проходят через начало $t = 0$ и точку $t = \rho$. Будем называть их ρ -прямыми.

Для приложений существенно получить асимптотический ряд для того единственного решения, которое вне окрестности $x = 0$ близко к решению вырожденного уравнения, получающегося при $\varepsilon = 0$. Преимущества такого решения связаны с краевым эффектом, возможностью раздельного удовлетворения краевых условий и отсутствием малых разностей.

Решения уравнения (1.12) или (1.2) по способу вариации произвольных постоянных представляются в виде

$$\eta = \frac{\rho^2}{W} \left[h_2(\rho u) \int_{\alpha}^u h_1(\rho \xi) g(\xi) d\xi - h_1(\rho u) \int_{\beta}^u h_2(\rho \xi) g(\xi) d\xi \right] \quad (2.1)$$

где $h_1(t)$, $h_2(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (1.3); вронскиан

$$W = h_1 \frac{dh_2}{dt} - h_2 \frac{dh_1}{dt} = \text{const} \quad (2.2)$$

Из асимптотических выражений функций Эйри следует, что на всякой ρ -прямой, кроме трех прямых, содержащих три особых луча (фиг. 1)

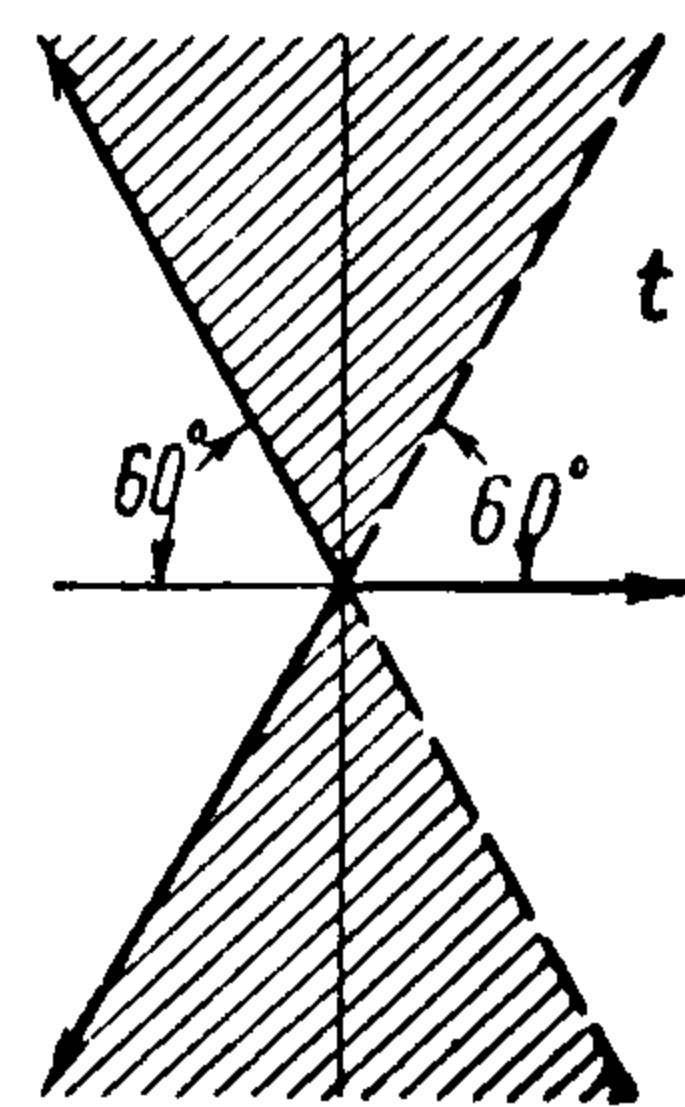
$$\arg t = 0, \quad \frac{2}{3} \pi, \quad \frac{4}{3} \pi \quad (2.3)$$

существуют решения h_1 и h_2 , растущие по абсолютной величине в противоположных направлениях по закону, близкому к

$$|t|^{-1/4} \exp(\pm c |t|^{3/2})$$

где c — постоянная, зависящая от $\arg t$.

На особых лучах все решения стремятся к нулю. ρ -прямые содержат особые лучи в том и только в том случае, когда параметр $\varepsilon = \rho^{-3}$ — действительный. Рассмотрим сначала случай комплексных ε , а позже, в § 4, вернемся к действительным ε .



Фиг. 1

Через $h_1(t)$ обозначим решение, растущее в направлении от $t = 0$ к $t = \rho$. В интегралах (2.1) $h_1(\rho\xi)$ и $h_2(\rho\xi)$ — быстро изменяющиеся функции, так как ρ — большой параметр.

Беря для $g(\xi)$ формулу (или ряд) Тейлора

$$g(\xi) = \sum \frac{(\xi - u)^n}{n!} g^{(n)}(u) \quad (2.4)$$

приходим к искомому выражению частного решения уравнения (1.2) в виде ряда по степеням $1/\rho = \varepsilon^{1/3}$:

$$\begin{aligned} H &= \rho e_0(\rho u) g(u) + e_1(\rho u) g'(u) + \frac{1}{\rho} e_2(\rho u) g''(u) + \dots = \\ &= \rho \sum_{n=0, 1, 2, \dots} \frac{1}{\rho^n} e_n(\rho u) g^{(n)}(u) \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$e_n(t) = \frac{1}{n! W} \left[h_2(t) \int_{-\infty\rho}^t h_1(\tau) (\tau - t)^n d\tau + h_1(t) \int_t^{\infty\rho} h_2(\tau) (\tau - t)^n d\tau \right] \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

В частности, первое асимптотическое приближение равно

$$H = \rho e_0(\rho u) g(u) \quad (2.7)$$

где

$$e_0(t) = \frac{1}{W} \left[h_2(t) \int_{-\infty\rho}^t h_1(\tau) d\tau + h_1(t) \int_t^{\infty\rho} h_2(\tau) d\tau \right] \quad (2.8)$$

Общим решением уравнения (1.12) будет

$$\eta = H + c_1 h_1 + c_2 h_2 \quad (2.9)$$

Функции $e_n(t)$, вполне определенные на ρ -прямых, одни и те же для всех уравнений (1.1); эти функции ограничены на ρ -прямой, так как из асимптотических выражений функций Эйри h_1 и h_2 следует, что $e_0(t) \sim 1/t$, $e_1(t) \sim 2/t^3$, ... при $t \rightarrow \infty$. Пределы $-\infty\rho$ и $\infty\rho$ в интегралах (2.6) выбраны с целью получить ограниченные $e_n(t)$.

Поскольку $y = w\eta$ по (1.5), то в силу (2.9) получено выражение общего решения дифференциального уравнения (1.1) через функции Эйри $h_1(t)$ и $h_2(t)$ и через функции $e_n(t)$.

Таблицы и графики функций $e_n(t)$ приведены в § 8.

Замечания. 1. Из уравнения (1.1) видно, что при малых ε для частного решения верна асимптотическая формула $y \sim f/q$, которая теряет силу лишь в окрестности $x = 0$. То же самое дает формула (2.7), если учесть асимптотическую формулу $e_0(t) \sim t^{-1}$, данную в § 3, и формулы (1.5), (1.8) и (1.10); но (2.7) не теряет силы вблизи $x = 0$.

2. При отсутствии параметра в уравнении (1.1), т. е. при $\varepsilon = 1$, ряд (2.5) при $\rho = 1$ представляет интерес в качестве решения уравнения $\eta'' + t\eta = g(t)$.

3. Ряд (2.5) позволяет судить о погрешности решения, полученного для оболочек Кларком и Рейсснером [9, 10]. Решение Кларка и Рейсснера отличается от первого члена ряда (2.5), но в точке $[x = 0$ отличия

не будет. Следовательно, решение Кларка — Рейсснера пренебрегает величиной порядка $\varepsilon^{1/3}$ по сравнению с единицей. Эта погрешность выше, например, погрешности теории оболочек, в которой ε пропорционально толщине оболочки h и где обычно сохраняют не только $h^{1/3}$, но и $h^{1/2}$.

4. Оценку остаточного члена ряда (2.5) можно выполнить либо по (2.1) и (2.4), либо непосредственно по (2.5), используя ограниченность функций $e_n(t)$. На прямой $t = \rho u$ справедливо $|e_n(t)| < A$, где A не зависит от n и t . Из выражений $e_n(t)$ контурными интегралами (§ 3) следует, что на указанной прямой $|e_n(t)|_{\max}$ стремятся к нулю при $n \rightarrow \infty$ быстрее членов любой геометрической прогрессии, так как отношение $|e_{n+1}(t)|_{\max}$ к $|e_n(t)|_{\max}$ убывает как $n^{-1/3}$.

То же верно для производных $e_n'(t)$ и $e_n''(t)$. Поэтому ряд (2.5) сходится для широких классов функций $g(u)$ и является решением, так как по § 3 ряд формально удовлетворяет дифференциальному уравнению и получаются, кроме того, оценки остатка ряда. Если, например, $|g^{(n)}(u)| < B^n$, где $B = \text{const}$, то, отбрасывая в ряде члены, начиная с ρ^{-m} , и беря указанную грубую оценку $|e_n(t)| < A$, получаем при $|\rho| \geq 2B$ границу погрешности ряда

$$R_m = 2AB^{m+1}\rho^{-m}$$

так что ряд (2.5) — сходящийся и в то же время асимптотический.

§ 3. 1°. Функции $e_1(t), e_2(t), \dots$ могут быть выражены через $e_0(t)$. Из (2.6) нетрудно получить

$$(n + 3)e_{n+3}(t) + te_{n+2}(t) + e_n(t) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.1)$$

В результате

$$\begin{aligned} e_1(t) &= 1 - te_0(t) \\ e_2(t) &= -\frac{1}{2}te_1(t) = \frac{1}{2!}[t^2e_0(t) - t] \\ e_3(t) &= \frac{1}{3!}[-(t^3 + 2)e_0(t) + t^2] \\ &\dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

2°. Принимая в (1.12) и (2.5) функции $g = 1, t, t^2, \dots$, видим, что $e_0(t), e_1(t), \dots$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} e_0'' + te_0 &= 1 \\ e_1'' + te_1 &= -2e_0' \\ e_2'' + te_2 &= -(2e_1' + e_0) \\ &\dots \\ e_n'' + te_n &= -(2e_{n-1}' + e_{n-2}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{aligned} \quad (3.3)$$

В силу этих уравнений при подстановке ряда (2.5) в уравнение (1.2) обращаются в нуль коэффициенты при всех степенях $1/\rho$.

Эти уравнения вытекают непосредственно и из (2.6). Обратное, дифференциальные уравнения (3.3) могут служить для определения функций $e_n(t)$; функции $e_n(t)$, определенные формулами (2.6), являются единственными решениями уравнений (3.3), ограниченными на всей прямой $t = \rho u$, так как другие решения получаются прибавлением $c_1h_1 + c_2h_2$.

3°. Обозначим $L(\eta) = \eta''(t) + t\eta$. Функции $e_0(t), 1, t, t^2, t^3, \dots$ суть частные решения соответственно уравнений

$$L(\eta) = 1, t, t^2, t^3 + 2 \cdot 1, t^4 + 3 \cdot 2t, \dots \quad (3.4)$$

В § 5 равенства (3.4) использованы для получения асимптотического решения в форме, отличной от ряда (2.5).

4°. Решая уравнения (3.3) по способу Лапласа, можно выразить функции $e_n(t)$ контурными интегралами¹.

Рассматривая пока комплексные значения параметра ε , условимся выбирать то значение $\rho = \varepsilon^{-1/3}$, при котором ρ , а следовательно, и прямая $t = \rho u$ находятся внутри двойного сектора (фиг. 1)

$$\frac{1}{3}\pi < |\arg t| < \frac{2}{3}\pi \quad (3.5)$$

Решение первого из уравнений (3.3) можно получить в виде

$$e_0(t) = \int_0^{\infty} \exp\left(-tx - \frac{1}{3}x^3\right) dx \quad (3.6)$$

Этот интеграл совпадает с (2.8) внутри двойного сектора (3.5), так как это единственное решение, которое ограничено на всей прямой $t = \rho u$.

Ограниченность интеграла следует из асимптотического ряда (3.11), полученного по методу перевала и справедливого в секторе $-\frac{2}{3}\pi < \arg t < \frac{2}{3}\pi$. Границы сектора содержат особые лучи и соответствуют действительным значениям параметра ε , рассмотренным в следующем параграфе. Отметим, что на луче $t > 0$ интеграл конечен и асимптотически равен $1/t$, а на луче $t \rightarrow -\infty$ интеграл бесконечно возрастает.

Так же получается

$$e_1(t) = \int_0^{\infty} x^2 \exp\left(-tx - \frac{1}{3}x^3\right) dx \quad \text{и т. д.} \quad (3.7)$$

Из этих выражений видно, что

$$e_n(\bar{t}) = \overline{e_n(t)} \quad (3.8)$$

Поэтому достаточно иметь таблицы $e_n(t)$ в секторе (3.5), лежащем в верхней полуплоскости.

Из $e_0'' + te_0 = 1$ получается для $e_0(t)$ степенной ряд с бесконечным радиусом сходимости:

$$\begin{aligned} e_0(t) = & e_0(0) \left(1 - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{4}{6!}t^6 - \frac{4 \cdot 7}{9!}t^9 + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{12!}t^{12} - \dots\right) + \\ & + e_0'(0) t \left(1 - \frac{2}{4!}t^3 + \frac{2 \cdot 5}{7!}t^6 - \frac{2 \cdot 5 \cdot 8}{10!}t^9 + \dots\right) + \\ & + t^2 \left(\frac{1}{2!} - \frac{3}{5!}t^3 + \frac{3 \cdot 6}{8!}t^6 - \frac{3 \cdot 6 \cdot 9}{11!}t^9 + \dots\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

¹ Функция $e_0(t)$ связана с обобщенными интегралами Эйри $Ei_3(\alpha)$ и $Si_3(\alpha)$ и с функциями Ломмеля [15]. Аналогичная функция на мнимой оси использована в упомянутой статье Кларка и Рейсснера [9]. Функции $Gi(x)$ и $Ni(x)$, эквивалентные $e_0(t)$ на действительной оси, применялись для задач, отличных от асимптотических решений, в работах [16-21].

Начальные значения по (3.6) равны

$$e_0(0) = 3^{-2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = 1.287899, \quad e_0'(0) = -3^{-1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = -0.938893 \quad (3.10)$$

По (3.6) и (3.2) получаются асимптотические ряды при больших t на прямых $t = \rho u$, проходящих внутри двойного сектора (3.5):

$$\begin{aligned} e_0(t) &\sim \frac{1}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (3k-1)!}{(k-1)! 3^{k-1} t^{3k+1}} = \frac{1}{t} - \frac{2}{t^4} + \frac{40}{t^7} - \dots \\ e_1(t) &\sim \frac{2}{t^3} - \frac{40}{t^6} + \dots, \quad e_2(t) \sim -\frac{1}{t^2} + \frac{20}{t^5} - \dots \\ e_3(t) &\sim -\frac{6}{t^4} + \frac{360}{t^7} - \dots \end{aligned} \quad (3.11)$$

Ряды показывают, что функции $e_n(t)$ стремятся к нулю при удалении в бесконечность. Графики функций $e_n(t)$ для действительных и для чисто мнимых значений t даны в § 8.

§ 4. При действительном ε можно взять действительное значение $\rho = \varepsilon^{-1/3}$; значения $t = \rho u$ лежат тогда на действительной оси (фиг. 1) плоскости t , содержащей особый луч $\arg t = 0$.

Можно сохранить форму решения (2.5) и соотношений (3.2) и (3.3) для функций $e_n(t)$. Сохранить асимптотическое свойство $e_0(t) \sim 1/t$ на всей действительной оси нельзя, но можно сохранить это и остальные асимптотические свойства (3.11) отдельно для $t > 0$ и для $t < 0$, беря в качестве $e_0(t)$ при $t > 0$ и при $t < 0$ два разных решения уравнения $e_0'' + te_0 = 1$. При $t > 0$ берем по-прежнему решение (3.6). Это единственное решение, убывающее как $1/t$ при $t \rightarrow +\infty$. При этом сохраняется степенной ряд (3.9) с начальными условиями (3.10).

При $t < 0$ в качестве $e_0(t)$ возьмем решение

$$E_0(t) = \int_0^{\infty} \sin\left(t\xi - \frac{1}{3}\xi^3\right) d\xi \quad (4.1)$$

Это не единственное решение, убывающее на луче $t < 0$ как $1/t$, но другие такие решения получаются прибавлением решения однородного уравнения, убывающего как

$$(-t)^{-1/4} \exp\left[-\frac{2}{3}(-t)^{3/2}\right]$$

Начальные значения для ряда (3.9) получаются из (4.1) и отличаются от значений (3.10) множителем $-1/2$:

$$\begin{aligned} E_0(0) &= -\frac{1}{2} 3^{-2/3} \Gamma\left(\frac{1}{3}\right) = -0.643950 \\ E_0'(0) &= \frac{1}{2} 3^{-1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) = 0.469446 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для решения (4.1), т. е. не для особого луча, сохраняет силу выражение (2.8), где в качестве $h_1(t)$ и $h_2(t)$ можно взять интегралы Эйри $Ai(x)$ и $Bi(x)$. При этом отметим, что

$$\int_{-\infty}^0 Bi(x) dx = 0$$

Что касается решения (3.6), то оно связано с (4.1) зависимостью $e_0(t) - E_0(t) = \pi \text{Bi}(-t)$. Для $E_n(t)$ сохраняются (3.2), (3.11) и другие свойства $e_n(t)$. Графики функций даны в § 8.

§ 5. Существует другая форма асимптотического решения неоднородного уравнения. Уравнение (1.2) запишем в виде

$$L(\eta) \equiv \varepsilon \frac{d^2 \eta}{du^2} + u\eta = g, \quad g(u) = \sum_{v=0}^m a_v u^v \quad (5.1)$$

Подобно (3.4) легко получить

$$\begin{aligned} 1 &= L[\rho e_0(\rho u)], & u &= L(1), & u^2 &= L(u) \\ u^3 &= L[u^2 - 1 \cdot 2\varepsilon \rho e_0(\rho u)] \\ u^4 &= L(u^3 - 2 \cdot 3\varepsilon) \quad \text{и т. д.} \end{aligned} \quad (5.2)$$

Частным решением (5.1) будет

$$\begin{aligned} H &= \rho e_0(\rho u) (a_0 - 1 \cdot 2a_3\varepsilon + 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5a_6\varepsilon^2 - \dots) + \\ &+ (a_1 + a_2u + a_3u^2 + \dots) - \varepsilon (2 \cdot 3a_4 + 3 \cdot 4a_5u + 4 \cdot 5a_6u^2 + \dots) + \\ &+ \varepsilon^2 (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6a_7 + 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7a_8u + \dots) + \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Это решение можно записать в виде

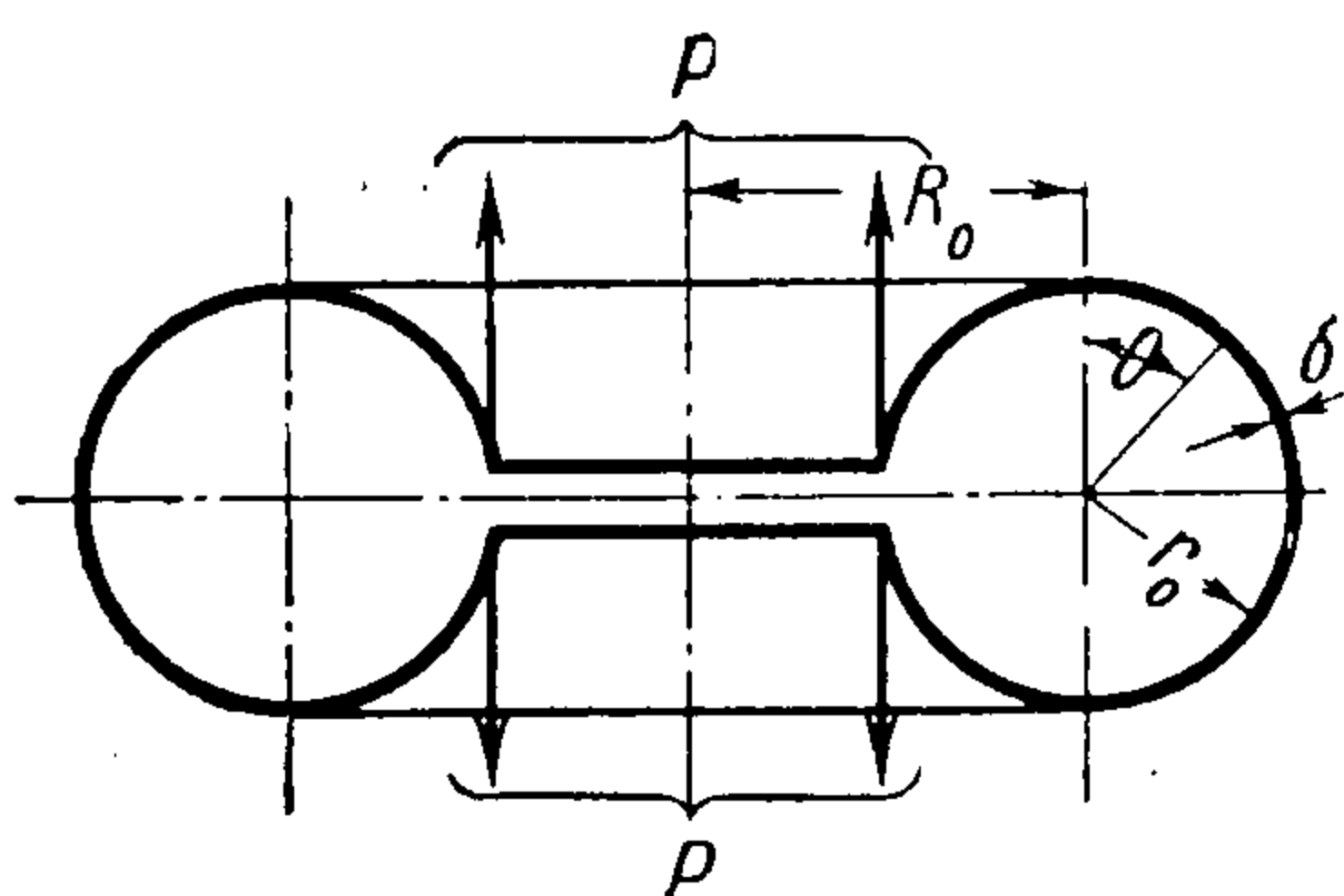
$$\begin{aligned} H &= \rho e_0(\rho u) [g(0) - \varphi_0''(0)\varepsilon + \varphi_1''(0)\varepsilon^2 - \dots] + \\ &+ [\varphi_0(u) - \varphi_1(u)\varepsilon + \varphi_2(u)\varepsilon^2 - \dots] \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь

$$\varphi_0(u) = \frac{g(u) - g(0)}{u}, \quad \varphi_{n+1}(u) = \frac{\varphi_n''(u) - \varphi_n''(0)}{u} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5.5)$$

(5.3) и (5.4) — ряды по степеням параметра ε . В иной форме (без параметра, по степеням u) ряд (5.3) был дан в работе Миллера и Заки [17], где ряд рассматривался как решение уравнения $y'' - xy = \sum a_v x^v$ вне связи с асимптотическим решением уравнения (1.1). Правая часть g дифференциального уравнения входит в ряд (5.4) в виде более сложных выражений, чем в ряд (2.5), но в отличие от (2.5) ряд (5.4) содержит только $e_0(t)$.

§ 6. В качестве примера рассмотрим приложение к расчету торообразных оболочек.



Фиг. 2

Решение асимптотического характера для полных торообразных оболочек было впервые дано Кларком и Рейсснером [9, 10]. Сочетание в одном решении тригонометрических рядов и функций Ганкеля [22, 23] нецелесообразно, так как при малых значениях параметра ρ снижается точность решения, основанного на функциях Ганкеля, а при боль-

ших параметрах, для тонких оболочек, расчет тригонометрическими рядами слишком трудоемок. На это указывалось в работе автора [24], как и на то, что функции Ганкеля должны служить для асимптотического решения.

Рассмотрим торообразную оболочку (фиг. 2), разрезанную по параллели $\theta = -\frac{1}{2}\pi$ и находящуюся под действием растягивающей осевой силы P и равномерного нормального внутреннего давления p_n [24]. Уравнение оболочки [23] можно записать в виде

$$\varepsilon \frac{d}{d\theta} \left(P \frac{dV}{d\theta} \right) + qV = f \quad (6.1)$$

где V — комплексная искомая функция,

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{1 + \alpha \sin \theta}, & q &= \frac{\sin \theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^2}, & \alpha &= \frac{r_0}{R_0} \\ \varepsilon &= \frac{1}{\rho^3} = -\frac{i}{l^3}, & \rho &= -il, & l^3 &= \sqrt{12(1 - \mu^2)} \frac{r_0^2}{R_0 \delta} \\ f &= \left[il^3 \left(\frac{P}{2\pi r_0} + \frac{2 - \alpha}{2} R_0 p_n \right) - \frac{1}{2} \alpha r_0 p_n \right] \frac{\cos \theta}{(1 + \alpha \sin \theta)^2} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Здесь μ — коэффициент Пуассона, δ — толщина оболочки, так что ρ^3 — большой параметр.

При $\theta = 0$ и $\theta = \pm\pi$ функция q имеет простой нуль и к уравнению (6.1) можно применить разработанные выше асимптотические решения.

Параметр $\rho = -il$ — чисто мнимый. Поэтому в расчете используются графики или таблицы функций $e_n(t)$ при чисто мнимых t .

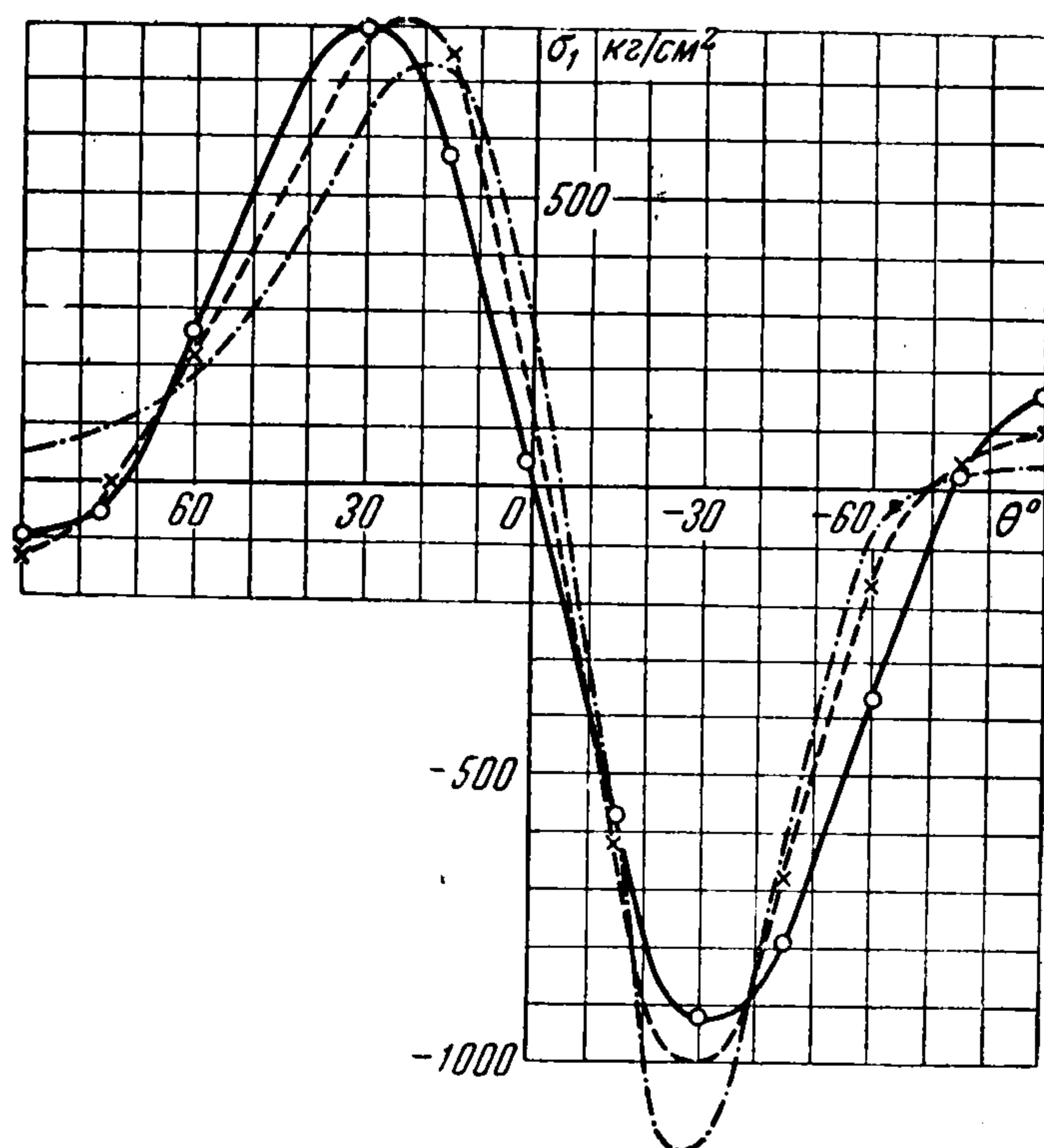
На графике (фиг. 3) показаны результаты асимптотического расчета оболочки из стали при $R_0 = 16$ см, $r_0 = 5$ см, $\delta = 3$ мм, $P = 1000$ кг, $p_n = 0$ и дано сравнение с другими решениями; решения, для которых сохранялись один и два члена ряда (2.5), показаны соответственно штрихами и сплошной линией, решение по способу Кларка — Рейсснера [9] показано штрихами с точками; кружками на сплошной линии показано ранее полученное [24] решение при помощи тригонометрических рядов.

Асимптотическое решение (5.4) при сохранении нулевой и первой степени ρ совпадает с решением тригонометрическими рядами, показанным кружками.

Результаты расчета показывают:

1) асимптотический расчет при помощи одного-двух членов ряда (2.5) или ряда (5.4) дает весьма хорошие результаты даже при умеренных значениях параметра ρ^3 ;

2) значительно менее точные результаты получены по способу Кларка и Рейсснера (в котором относительная ошибка, как показано в § 2, есть величина порядка $1/\rho$).



Фиг. 3

Чтобы проиллюстрировать способность асимптотического метода давать простые расчетные формулы, выведем формулу прогиба торообразной оболочки.

Для оболочки (фиг. 2), разрезанной по параллели $\theta = -\frac{1}{2}\pi$, расхождение разрезанных краев под действием осевой силы P и внутреннего давления p_n равно

$$\Delta = -\frac{2R_0}{E\delta} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos \theta}{1 + \alpha \sin \theta} \operatorname{Re} V d\theta$$

Ограничиваясь первым членом ряда (2.5) и учитывая, что $e_0(t)$ при больших значениях параметра ρ быстро уменьшается по обе стороны от $\theta = 0$, получаем асимптотическое выражение прогиба

$$\Delta \sim \frac{1}{E} \sqrt{12(1-\mu^2)} \frac{r_0}{\delta^2} [P + (2-\alpha)\pi r_0 R_0 p_n] \quad (6.3)$$

При данных размерах R_0 и r_0 и достаточно малой толщине оболочки δ по этой формуле прогиб обратно пропорционален квадрату толщины оболочки.

Если давление $p_n = 0$, то прогиб пропорционален радиусу r_0 и не зависит от R_0 . Такие выводы существенны при проектировании конструкций.

Асимптотические решения (2.5) или (5.4) можно было бы применить точно так же к расчету труб с криволинейной осью.

Заметим, что при выводе формулы (6.3) приходится вычислять (с учетом (3.6))

$$\int_0^{\infty} \operatorname{Re} e_0(iy) dy = \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{3}x^3} \cos xy dx \right) dy$$

По свойству косинус-преобразований Фурье искомый интеграл равен $\frac{1}{2}\pi$.

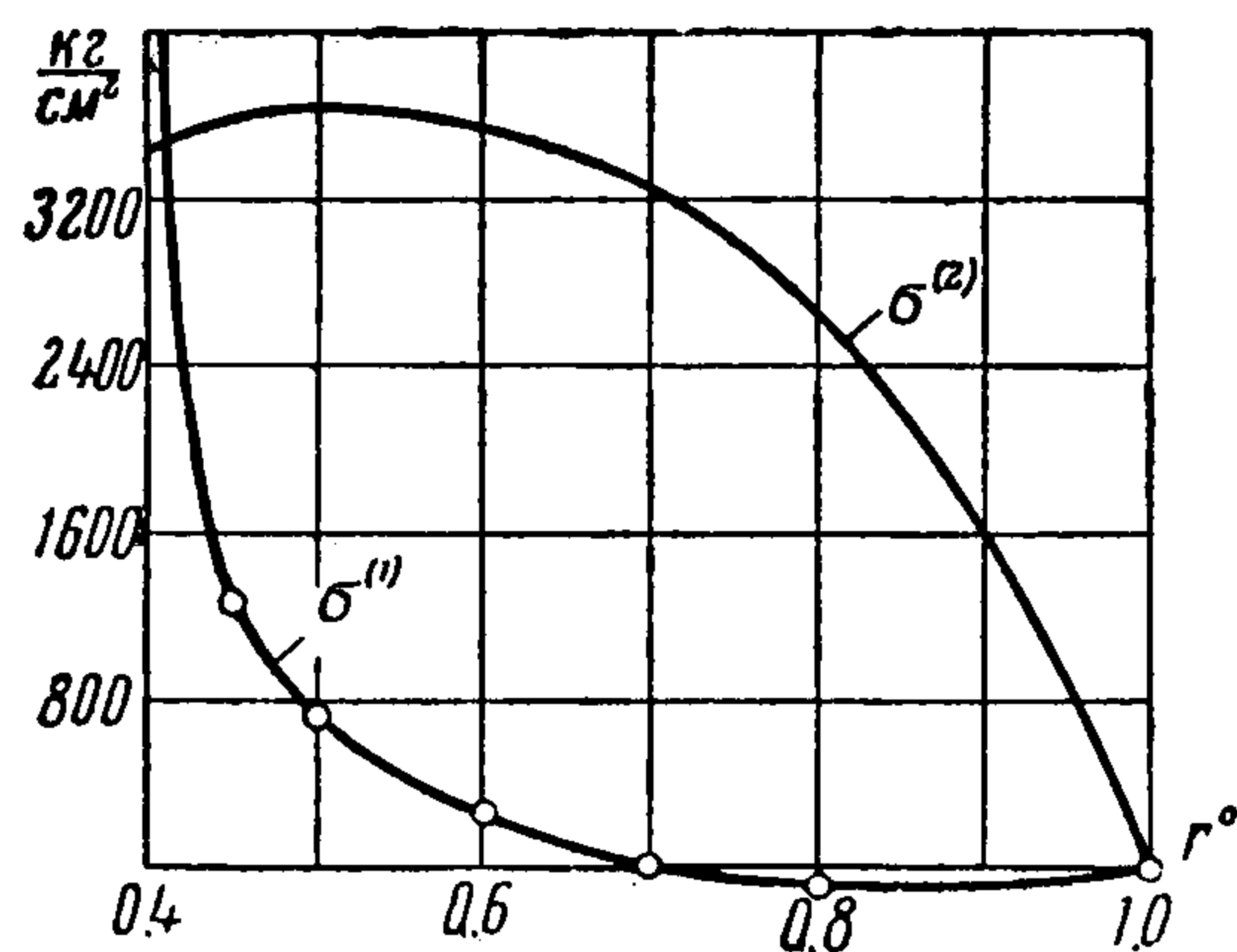
§ 7. В качестве второго примера приведем результаты расчета весьма тонкой высокооборотной стальной лопасти.

Дифференциальное уравнение лопасти относится к типу (1.1), причем для какой-либо заданной лопасти роль большого параметра играет квадрат угловой скорости вращения [11,25].

Для высокооборотных лопастей достаточна точность первого члена ряда и решение выражается простыми формулами.

Кривые на фиг. 4 показывают, что при высоких скоростях вращения возникает резко выраженный краевой эффект. Вблизи заземленного конца лопасти происходит концентрация напряжений изгиба $\sigma^{(1)}$; ($\sigma^{(2)}$ — напряжения растяжения).

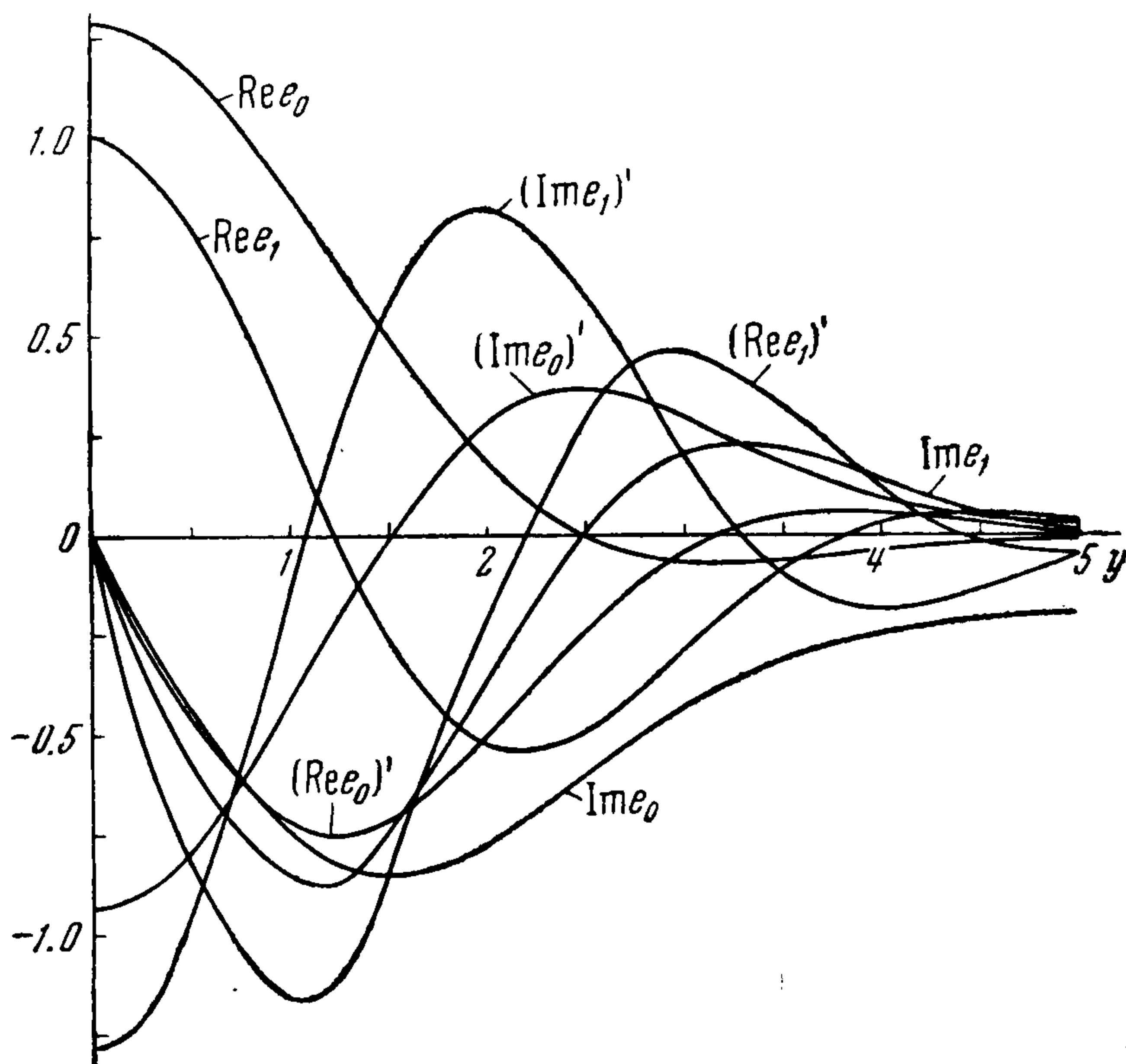
Это означает также, что подле заземленного конца велика кривизна упругой линии. В остальной части лопасти упругая линия близка к особому типу веревочной или шарнирной кривой, именно к форме упругой линии лопасти, не сопротивляющейся изгибу относительно оси меньшей жесткости сечения.



Фиг. 4

В работе [26] отмечено, что обычно асимптотические расчеты лопастей можно выполнять при помощи функций $e^{\pm x}$, минуя функции Эйри; в работе [27] такое асимптотическое решение построено для лопастей переменного шага.

§ 8. 1°. На фиг. 5 даны графики $e_n(t)$ и $e_n'(t)$ для чисто мнимых значений $t = iy$; штрихи у обозначений на кривых означают производные по y . Графики служат для асимптотического решения уравнения (1.1) при чисто мнимых значениях параметра ε (например, для расчета оболочек, см. § 6). $\text{Re } e_n$ и $\text{Im } e_n$ обозначают действительную и мнимую части: $e_n = \text{Re } e_n + i \text{Im } e_n$. При этом $de_n/dt = -ide_n/dy$.

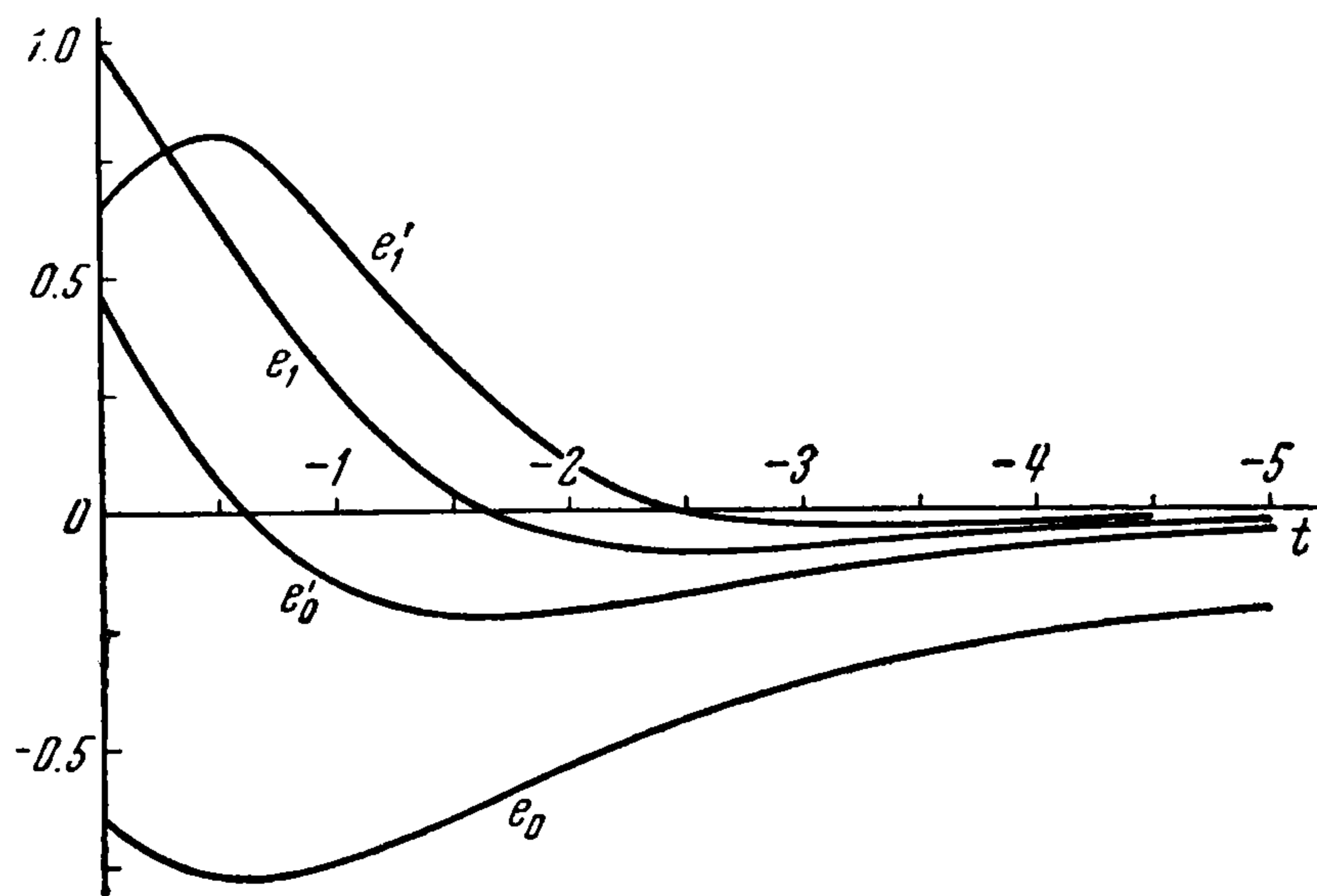


Фиг. 5

Графики даны для положительных y . Для отрицательных y используется четность $\text{Re } e_n$ и $d \text{Im } e_n/dy$ и нечетность $\text{Im } e_n$ и $d \text{Re } e_n/dy$.

В статье [10] дана таблица значений, равносильная таблице $e_0(t)$ на мнимой оси t .

2°. Приведенные на фиг. 6 графики $e_n(t)$ и $e_n'(t)$ для действительных отрицательных t служат, в частности, для расчета лопастей (см. § 7).



Фиг. 6

Таблицы, равносильные таблице $e_0(t)$ на действительной оси, имеются в работах [6-21], где обозначения таковы, что

$$e_0(t) = -\pi \text{Gi}(-t)$$

$$E_0(t) = \pi \text{Hi}(-t)$$

3°. Для асимптотического решения уравнения (1.1), кроме функций $e_n(t)$ по (2.9), нужны функции Эйри $h_1(t)$ и $h_2(t)$.

Их значения для комплексных значений t даны

в таблицах [14]. Для действительных t можно пользоваться таблицами [2, 3, 12, 13].

ЛИТЕРАТУРА

1. L a n g e r R. E. On the asymptotic solutions of ordinary differential equations with an application to the Bessel functions of large order. Trans. Amer. Math. Soc., v. 33, No 1, 1931.
2. Ф о к В. А. Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. Изд. АН СССР М.—Л., 1946.
3. Ф о к В. А. Таблицы функций Эйри, Информ. отд. НИИ-108, М., 1946.
4. L a n g e r R. E. The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point. Trans. Amer. Math. Soc., v. 67, No 2, 1949.
5. C h e r r y T. M. Uniform asymptotic formulae for functions with transition points. Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 68, No 2, 1950.
6. Д о р о д н и ц ы н А. А. Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка. Успехи математических наук, т. VII, вып. 6, 1952.
7. O l v e r F. W. J. The asymptotic solution of linear differential equations of the second order in domain containing one transition point. Phyl. Trans. Roy. Soc., Ser. A, v. 249, No 959, 1956.
8. Т у м а р к и н С. А. Асимптотическое решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений и его приложения к расчету оболочек и лопастей. Труды Третьего Всесоюзного математ. съезда, М., июнь-июль, 1956, IV, АН СССР, М., 1959.
9. C l a r k R. A. and R e i s s n e r E. Bending of curved tubes. Advances in Applied Mechanics, Vol. 2, 1951. Имеется перевод: «Проблемы Механики». Сб. ст. ИЛ, 1955.
10. C l a r k R. A. On the theory of thin elastic toroidal shells. Journ. Mathem. and Physics, v. 29, No 3, 1950.
11. Т у м а р к и н С. А. Расчет лопастей винтов на изгиб при весьма больших скоростях вращения (асимптотический метод). МАП СССР, Тр. № 667, 1948.
12. С м и р н о в А. Д. Таблицы функций Эйри и специальных вырожденных гипергеометрических функций для асимптотических решений дифференциальных уравнений второго порядка, АН СССР, М. 1955.
13. M i l l e r J. C. P. The Airy Integral. Mathematical Tables, Part-vol. B., Brit. Assoc., Cambridge, 1946.
14. Tables of the modified Hankel functions of order one-third and their derivatives. The Annals of the Computation Laboratory of Harvard University, Vol. 2, 1945.
15. В а т с о н Г. Н. Теория бесселевых функций, ч. 1, ИИЛ, М. 1949.
16. S c o r e r R. S. Numerical evaluation of integrals of the form... Quart. J. Mech. a. Appl. Math., v. 3, Pt. 1, 1950.
17. M i l l e r J. C. P. and Z a k i M u r s i. Notes on the solution of the equation $y'' - xy = f(x)$. Quart. J. Mech. a. Appl. Math., v. 3, Pt. 1, 1950.
18. R o t h m a n M. The problem of an infinite plate under an inclined loading, with tables of the integrals of $Ai(\pm x)$ and $Bi(\pm x)$. Quart J. Mech., a. Appl. Math., Vol. 7, Pt. 1, 1954.
19. R o t h m a n M. Tables of the integrals and differential coefficients of $Gi(+x)$ and $Hi(-x)$. Quart. J. Mech. a. Appl. Math., v. 7, Pt. 3, 1954.
20. T y l e r C. M. and C h r i s t i a n o J. G. An Airy Integral Analysis of Beam Columns with distributed axial loading having fixed line of action. J. Appl. Mech., v. 19, № 3, 1952.
21. T y l e r C. M. and R o u l e a u W. T. An Airy Integral analysis of beam-columns with distributed axial loading that deflects with the column. Proceed. of the second U. S. Nation. Congress of Appl. Mech., N. Y., 1955.
22. З е н о в а Е. Ф. и Н о в о ж и л о в В. В. Симметричная деформация торообразных оболочек, ПММ, т. XV, вып. 5, 1951.
23. Н о в о ж и л о в В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, 1951.
24. Т у м а р к и н С. А. Расчет симметрично-нагруженных торообразных оболочек при помощи тригонометрических рядов ПММ, т. XVI, вып. 5, 1952.
25. Б и р г е р И. А. Некоторые математические методы решения инженерных задач. Оборонгиз, М., 1956.
26. Т у м а р к и н С. А. Принципы построения асимптотического метода расчета лопастей на изгиб. Научн. тр. Моск. горного ин-та. Сб. № 23, М., 1958.
27. Т о р ч и н с к а я Э. Л. Расчет на изгиб в поле центробежных сил высокооборотных лопастей переменного винтового шага (асимптотический метод). Науч. тр. Моск. горного ин-та. Сб. № 29, 1959.