Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

О ВЫЧИСЛЕНИИ НЕКОТОРЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С ЯДРОМ ТИПА КОШИ

Г. Н. Пыхтеев

(Москва)

При решении многих задач гидро-аэродинамики [1,2], теории упругости [3,4] и теории фильтрации [5,6] встречаются сингулярные интегралы с ядром типа Коши, взятые вдоль отрезка действительной оси, которые при помощи простых преобразований могут быть приведены к любому из двух интегралов следующего вида:

$$J(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\,dt \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1) \tag{0.1}$$

$$I(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}\,\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1) \tag{0.2}$$

Эти интегралы существуют в смысле главного значения по Коши, и для их существования в этом смысле достаточно потребовать, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла на отрезке $[-1,1]$ условию Гельдера [7,8].

При помощи замены переменных $x = \cos\theta$, $t = \cos\varphi$ интегралы $J(x)$, $I(x)$ можно записать в тригонометрической форме

$$J(\cos\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(\cos\varphi)}{\cos\varphi-\cos\theta}\sin\varphi\,d\varphi \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi) \tag{0.3}$$

$$I(\cos\theta) = \frac{\sin\theta}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{f(\cos\varphi)}{\cos\varphi-\cos\theta}\,d\varphi \qquad (0\leqslant\theta\leqslant\pi) \tag{0.4}$$

Интегралы $J(x)$, $I(x)$ в форме (0.3), (0.4) встречаются в теории крыла [2,9]. Существует много видов интегралов, которые путем простых преобразований могут быть сведены к одному из интегралов $J(x)$, $I(x)$, а следовательно, к любому из них. Например, известный сингулярный интеграл с ядром котангенса и интеграл с ядром логарифма, встречающийся в теории волн и струй, сводятся к интегралам $J(x)$ и $I(x)$ при помощи соотношений

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(\cos\varphi)\operatorname{ctg}\frac{\theta-\varphi}{2}\,d\varphi = J(\cos\theta) + I(\cos\theta) \tag{0.5}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{d}{d\varphi}f(\cos\varphi)\ln\left|\sin\frac{\varphi-\theta}{2}\csc\frac{\varphi+\theta}{2}\right|d\varphi = J(\cos\theta) \tag{0.6}$$

Известно, что при вычислении интегралов $J(x)$ и $I(x)$ в силу того, что они сингулярные, нельзя непосредственно воспользоваться многочисленными формулами механических квадратур [13] для обычного риманова интеграла. Однако, если учесть некоторые свойства подынтегральной функции, то при помощи различных преобразований и в случае сингулярных интегралов можно получить различные формулы механических квадратур. Такие формулы механических квадратур получили Мультопп [9] для интегралов (0.3), (0.4), А. И. Каландия [10] для интегралов (0.1), (0.2) и Л. А. Симонов [11] для интеграла (0.5).

Ниже выводятся формулы, которые позволяют получить приближенные выражения для интегралов $J(x)$ и $I(x)$ и оценить ошибку приближения. Полученные формулы содержат функции, определяемые известными элементарными функциями или быстро сходящимися рядами. Для некоторых из этих функций приводятся таблицы.

§ 1. Введем в рассмотрение полиномы Чебышева первого и второго рода

$$T_n(x) = \cos n \arccos x, \qquad U_n(x) = \sin n \arccos x$$

Нетрудно показать, что $T_n(x)$ и $U_n(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{U_n(t)}{t-x}dt = -T_n(x), \qquad \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = U_n(x) \quad (1.1)$$

Пусть функция $f(x)$, входящая в интегралы $J(x)$ и $I(x)$, удовлетворяет условию Гельдера на отрезке $[-1,1]$, тогда интегралы $J(x)$ и $I(x)$ можно представить в виде рядов

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} - b_n T_n(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \quad (1.2)$$

$$I(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n U_n(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \quad (1.3)$$

где

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\,T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(x)\,U_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad (1.4)$$

Действительно, в этом случае функцию $f(x)$, как это следует из теории рядов Фурье, можно представить на отрезке $[-1,1]$ в виде ряда по полиномам Чебышева первого рода

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \quad (1.5)$$

или в виде ряда по полиномам Чебышева второго рода

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n U_n(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \quad (1.6)$$

Подставим в интеграл $J(x)$ вместо $f(x)$ ряд (1.6), а в интеграл $I(x)$ вместо $f(x)$ ряд (1.5) и используем соотношения (1.1), тогда получим формулы (1.2), (1.3). Применение этих формул для вычисления интегралов $J(x)$ и $I(x)$ не представляется целесообразным, так как ряды (1.2), (1.3) часто сходятся медленно, а коэффициенты a_n и b_n при произвольной функции $f(x)$ приходится определять методом численного интегрирования. В том случае, когда ряды, стоящие в их правых частях, суммируются в конечном виде, формулы (1.2), (1.3) дают точное значение интегралов $J(x)$ и $I(x)$. Если интегралы $J(x)$ и $I(x)$ записать в тригонометрической форме (0.3), (0.4), то равенства (1.2), (1.3) примут вид:

$$J(\cos\theta) = -\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\theta \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \quad (1.7)$$

$$I(\cos\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\theta \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \quad (1.8)$$

Формулы (1.7), (1.8) дают возможность при изучении различных свойств интегралов $J(x)$ и $I(x)$ использовать результаты теории тригонометрических рядов.

§ 2. Рассмотрим функции, заданные на отрезке $[-1,1]$ равенствами

$$p_1^{(s)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} T_{2n-1}(x), \qquad p_2^{(s)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} T_{2n}(x) \tag{2.1}$$

$$(s = 1, 2, \ldots; \ -1 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$q_1^{(s)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^s} U_{2n-1}(x), \qquad q_2^{(s)}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} U_{2n}(x) \tag{2.2}$$

$$(s = 1, 2, \ldots; \ -1 \leqslant x \leqslant 1)$$

Укажем некоторые свойства этих функций. Функции $p_1^{(1)}(x)$ и $p_2^{(1)}(x)$ имеют в точках $x = 1$ и $x = -1$ особенности логарифмического типа

$$p_1^{(1)}(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - x, \qquad p_2^{(1)}(x) = -\frac{1}{4} \ln 4(1-x^2) - \frac{1}{2}(2x^2 - 1)$$

а функции $q_1^{(1)}(x)$ и $q_2^{(1)}(x)$ на открытом отрезке $(-1,1)$ представляются в виде

$$q_1^{(1)}(x) = \frac{1}{4}\pi - \sqrt{1-x^2}, \qquad q_2^{(1)}(x) = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2} \arccos x - x\sqrt{1-x^2}$$

Остальные функции непрерывны на всем отрезке $[-1,1]$. Отметим также, что функции $p_2^{(s)}(x)$ и $q_1^{(s)}(x)$ четные, а функции $p_1^{(s)}(x)$ и $q_2^{(s)}(x)$ нечетные, т. е.

$$\begin{aligned} p_1^{(s)}(-x) &= -p_1^{(s)}(x), \qquad & p_2^{(s)}(-x) &= p_2^{(s)}(x) \\ q_1^{(s)}(-x) &= q_1^{(s)}(x), \qquad & q_2^{(s)}(-x) &= -q_2^{(s)}(x) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Если воспользоваться равенствами (1.1), то легко показать, что введенные функции удовлетворяют следующим интегральным соотношениям:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{p_1^{(s)}(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = q_1^{(s)}(x), \qquad \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{p_2^{(s)}(t)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = q_2^{(s)}(x)$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(\operatorname{sign} t)\, q_1^{(s)}(t^*)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = p_1^{(s)}(x^*)$$

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{p_2^{(s)}(t^*)}{t-x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -(\operatorname{sign} x)\, q_2^{(s)}(x^*)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{q_1^{(s)}(t)}{t-x} dt = -p_1^{(s)}(x), \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{q_2^{(s)}(t)}{t-x} dt = -p_2^{(s)}(x) \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{p_1^{(s)}(t^*)}{t-x} dt = -(\operatorname{sign} x)\, q_1^{(s)}(x^*), \qquad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{(\operatorname{sign} t)\, q_2^{(s)}(t^*)}{t-x} dt = p_2^{(s)}(x^*) \tag{2.5}$$

где

$$x^* = \sqrt{1-x^2}, \qquad t^* = \sqrt{1-t^2} \tag{2.6}$$

Равенства (2.3) дают возможность при вычислении введенных функций и изучении их свойств ограничиться интервалом $[0,1]$. При помощи замены переменной $x = \cos\theta$ функции $p_1^{(s)}(x)$, $p_2^{(s)}(x)$, $q_1^{(s)}(x)$ и $q_2^{(s)}(x)$ можно записать в тригонометрической форме:

$$p_1^{(s)}(\cos\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\theta}{(2n-1)^s}, \qquad p_2^{(s)}(\cos\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos 2n\theta}{(2n)^s}$$
$$(s = 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \tag{2.7}$$

$$q_1^{(s)}(\cos\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\theta}{(2n-1)^s}, \qquad q_2^{(s)}(\cos\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin 2n\,\theta}{(2n)^s}$$
$$(s = 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi) \tag{2.8}$$

Такая форма записи удобна при вычислении этих функций, так как в этом случае приходится иметь дело не с полиномами Чебышева, а с тригонометрическими функциями. В табл. 1—3, прилагаемых к работе, приведены значения некоторых из рассматриваемых функций, вычисленные с точностью до четырех знаков. Табл. 1, 2 вычислялись при помощи формул (2.1), (2.2), табл. 3 — при помощи формул (2.7), (2.8).

Таблица 1

x	$p_1^{(1)}(x)$	$p_1^{(3)}(x)$	$p_2^{(1)}(x)$	$p_2^{(3)}(x)$	$q_1^{(2)}(x)$	$q_1^{(4)}(x)$	$q_2^{(2)}(x)$	$q_2^{(4)}(x)$
0.0	0.0000	0.0000	0.1534	0.0123	—0.0840	—0.0111	0.0000	0.0
0.1	—0.0498	—0.0083	0.1459	0.0115	—0.0815	—0.0106	—0.0151	—0.0012
0.2	—0.0986	—0.0162	0.1236	0.0093	—0.0740	—0.0095	—0.0289	—0.0023
0.3	—0.1452	—0.0233	0.0870	0.0058	—0.0614	—0.0073	—0.0399	—0.0031
0.4	—0.1882	—0.0289	0.0370	0.0010	—0.0435	—0.0045	—0.0466	—0.0034
0.5	—0.2253	—0.0325	—0.0246	—0.0043	—0.0202	—0.0011	—0.0473	—0.0032
0.6	—0.2534	—0.0333	—0.0950	—0.0096	0.0086	0.0029	—0.0401	—0.0024
0.7	—0.2663	—0.0299	—0.1682	—0.0139	0.0431	0.0071	—0.0227	—0.0008
0.8	—0.2507	—0.0203	—0.2312	—0.0151	0.0829	0.0110	0.0080	0.0014
0.9	—0.1639	—0.0001	—0.2414	—0.0091	0.1242	0.0133	0.0582	0.0039
1.0	∞	0.0518	∞	0.0253	∞	0.0000	0,0000	0.0000

Таблица 2

x	$p_1^{(1)}(x^*)$	$p_1^{(3)}(x^*)$	$p_2^{(1)}(x^*)$	$p_2^{(3)}(x^*)$	$q_1^{(2)}(x^*)$	$q_1^{(4)}(x^*)$	$q_2^{(2)}(x^*)$	$q_2^{(4)}(x^*)$
0.0	∞	0.0518	∞	0.0253	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1	0.5016	0.0455	0.3147	0.0200	0.0999	0.0050	0.0809	0.0023
0.2	0.1664	0.0335	—0.0018	0.0108	0.1317	0.0090	0.0945	0.0039
0.3	—0.0170	0.0194	—0.1546	0.0014	0.1386	0.0117	0.0856	0.0045
0.4	—0.1331	0.0049	—0.2284	—0.0067	0.1301	0.0130	0.0645	0.0042
0.5	—0.2075	0.0086	—0.2500	—0.0124	0.1106	0.0128	0.0372	0.0031
0.6	—0.2507	—0.0203	—0.2312	—0.0151	0.0829	0.0110	0.0080	0.0014
0.7	—0.2663	—0.0290	—0.1782	—0.0143	0.0484	0.0077	—0.0192	—0.0005
0.8	—0.2534	—0.0333	—0.0950	—0.0096	0.0086	0.0029	—0.0402	—0.0024
0.9	—0.2023	—0.0305	0.0161	—0.0008	—0.0358	—0.0034	—0.0476	—0.0034
1.0	0.0000	0.0000	0.1534	0.0123	—0.0840	—0.0111	0.0000	0.0000

Таблица 3

x	$p_1^{(1)}(x)$	$p_1^{(3)}(x)$	$p_2^{(1)}(x)$	$p_2^{(3)}(x)$	$q_1^{(2)}(x)$	$q_1^{(4)}(x)$	$q_2^{(2)}(x)$	$q_2^{(4)}(x)$
cos 0°	∞	0.0518	∞	0.0253	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
cos 5°	0.5695	0.0468	0.3811	0.0210	0.0931	0.0044	0.0764	0.0021
cos 10°	0.2333	0.0370	0.0589	0.0134	0.1264	0.0080	0.0938	0.0036
cos 15°	0.0479	0.0253	−0.1038	0.0052	0.1380	0.0108	0.0911	0.0044
cos 20°	−0.0720	0.0133	−0.1932	−0.0023	0.1366	0.0124	0.0777	0.0045
cos 25°	−0.1531	0.0018	−0.2337	−0.0082	0.1265	0.0131	0.0587	0.0040
cos 30°	−0.2075	−0.0086	−0.2500	−0.0124	0.1106	0.0128	0.0372	0.0031
cos 35°	−0.2420	−0.0174	−0.2397	−0.0147	0.0909	0.0116	0.0157	0.0019
cos 40°	−0.2607	−0.0244	−0.2124	−0.0152	0.0689	0.0098	−0.0041	0.0006
cos 45°	−0.2664	−0.0294	−0.1733	−0.0141	0.0458	0.0074	−0.0210	−0.0007
cos 50°	−0.2613	−0.0324	−0.1265	−0.0117	0.0227	0.0047	−0.0341	−0.0018
cos 55°	−0.2472	−0.0334	−0.0758	−0.0083	0.0004	0.0018	−0.0430	−0.0027
cos 60°	−0.2253	−0.0325	−0.0247	−0.0043	−0.0202	−0.0011	−0.0473	−0.0032
cos 65°	−0.1972	−0.0299	0.0240	−0.0001	−0.0387	−0.0038	−0.0473	−0.0034
cos 70°	−0.1638	−0.0259	0.0676	0.0039	−0.0545	−0.0062	−0.0433	−0.0033
cos 75°	−0.1264	−0.0186	0.1038	0.0073	−0.0672	−0.0083	−0.0358	−0.0028
cos 80°	−0.0859	−0.0142	0.1309	0.0100	−0.0765	−0.0098	−0.0255	−0.0020
cos 85°	−0.0435	−0.0205	0.1477	0.0117	−0.0821	−0.0107	−0.0132	−0.0011
cos 90°	0.0000	0.0000	0.1534	0.0123	−0.0840	−0.0111	0.0000	0.0000

§ 3. Определим функцию $f^{(s)}(x)$ равенством

$$f^{(s)}(x) = \left(\frac{d^s}{d\theta^s} f(\cos\theta)\right)_{\theta = \arccos x} \qquad (s = 0, 1, \ldots) \tag{3.1}$$

и назовем ее тригонометрической производной s-го порядка от функции $f(x)$. Обозначим через $W_\gamma^{(2k)}(M_{2k};\ -1{,}1)$ класс функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) любая функция $f(x)$, принадлежащая этому классу, имеет непрерывные тригонометрические производные $f^{(s)}(x)$, $(s = 0, 1, \ldots)$ до $(2k-1)$-го порядка включительно на отрезке $[-1{,}1]$, за исключением точки $x = 0$;

2) $2k$-я тригонометрическая производная этой функции удовлетворяет неравенству

$$|f^{(2k)}(x)| \leqslant M_{2k}; \tag{3.2}$$

3) в точке $x = 0$ функция $f(x)$ и ее тригонометрические производные $f^{(s)}(x)$ могут иметь разрывы первого рода:

$$2\gamma^{(s)} = f^{(s)}(+0) - f^{(s)}(-0) \qquad (s = 0, 1, \ldots, 2k) \tag{3.3}$$

Класс функций $W_\gamma^{(2k)}(M_{2k};\ -1{,}1)$ является некоторым обобщением класса $W^{(r)}(W;\ a, b)$, рассмотренного С. М. Никольским [12, 13].

Введем обозначения: (3.4)

$$2\gamma_1^{(s)} = f^{(s)}(1) + f^{(s)}(-1), \qquad 2\gamma_2^{(s)} = f^{(s)}(1) - f^{(s)}(-1) \qquad (s = 0, 1, \ldots, 2k)$$

$$a_1^* = a_1, \qquad a_2^* = a_2, \qquad b_1^* = b_1, \qquad b_2^* = b_2 \tag{3.5}$$

$$a_{2m}^* = a_{2m} + \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}\frac{(-1)^s}{(2m)^{2s}}\left((-1)^m\gamma^{(2s-1)} - \gamma_2^{(2s-1)}\right)$$

$$a_{2m-1}^* = a_{2m-1} - \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}\frac{(-1)^s}{(2m-1)^{2s}}\left((-1)^m(2m-1)\gamma^{(2s-1)} + \gamma_1^{(2s-1)}\right)$$

$$b_{2m}^* = b_{2m} - \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}\frac{(-1)^s}{(2m)^{2s-1}}\left((-1)^m\gamma^{2(s-1)} - \gamma_2^{2(s-1)}\right) \tag{3.6}$$

$$b_{2m-1}^* = b_{2m-1} - \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}\frac{(-1)^s}{(2m-1)^{2s}}\left((-1)^m\gamma^{(2s-1)} - (2m-1)\gamma_1^{2(s-1)}\right)$$

где a_n, b_n — коэффициенты Фурье, определяемые по формулам (1.4).

Введем число $N(n, k)$, определяемое равенством:

$$N(n, k) = 4(n+1)^{-2k}\left(1 + \ln\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2n} + \ln n\right) \tag{3.7}$$

Теорема 1. Пусть $f(x) \in W_\gamma^{(2k)}(M_{2k}; -1,1)$, тогда имеют место следующие два представления функции $f(x)$ на отрезке $[-1, 1]$:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}(-1)^s[\gamma_1^{(2s-1)}p_1^{(2s)}(x) - (\operatorname{sign} x)\gamma^{2(s-1)}q_1^{(2s-1)}(x^*) + \tag{3.8}$$

$$+ \gamma_2^{(2s-1)}p_2^{(2s)}(x) - \gamma^{(2s-1)}p_2^{(2s)}(x^*)] + \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{n}a_m^*T_m(x) + r_n^{(1)}(x)$$

$$f(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}(-1)^s[\gamma^{(2s-1)}p_1^{(2s)}(x^*) + \gamma_1^{2(s-1)}q_1^{(2s-1)}(x) + \gamma_2^{2(s-1)}q_2^{(2s-1)}(x) +$$

$$+ (\operatorname{sign} x)\gamma^{2(s-1)}q_2^{(2s-1)}(x^*)] + \sum_{m=1}^{n}b_m^*U_m(x) + r_n^{(2)}(x) \tag{3.9}$$

где $r_n^{(1)}(x)$ и $r_n^{(2)}(x)$ удовлетворяют неравенствам

$$|r_n^{(1)}(x)| < M_{2k}N(n,k), \qquad |r_n^{(2)}(x)| < M_{2k}N(n, k) \tag{3.10}$$

Доказательство. Применим к интегралам, стоящим в равенствах (1.4), $2k$ раз формулу интегрирования по частям; тогда получим соотношения (3.6), где

$$a_n^* = \frac{(-1)^k}{n^{2k}}a_n^{(2k)}, \qquad a_n^{(2k)} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}f^{(2k)}(x)T_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$b_n^* = \frac{(-1)^k}{n^{2k}}b_n^{(2k)}, \qquad b_n^{(2k)} = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1}f^{(2k)}(x)U_n(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.11}$$

Подставляя в ряды (1.5), (1.6) вместо a_n и b_n их выражения согласно (3.6), получим равенства (3.8), (3.9), где

$$r_n^{(1)}(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty}a_m^*T_m(x), \qquad r_n^{(2)}(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty}b_m^*U_m(x)$$

Формулы (3.11) могут быть использованы для определения a_n^* и b_n^*, если известна производная $f^{(2k)}(x)$.

Докажем, что $r_n^{(1)}(x)$ и $r_n^{(2)}(x)$ удовлетворяют неравенству (3.10). Если ввести в рассмотрение суммы

$$\sigma_m^{(1)}(x) = \sum_{\nu=1}^{m}a_\nu^{(2k)}T_\nu(x), \qquad \sigma_m^{(2)}(x) = \sum_{\nu=1}^{m}b_\nu^{(2k)}U_\nu(x),$$

то для любого $r_n^{(s)}(x)$, $s = 1,2$ будем иметь

$$|r_n^{(s)}(x)| = \left| \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{\sigma_m^{(s)}(x) - \sigma_{m-1}^{(s)}(x)}{m^{2k}} \right| = \qquad (s = 1,2)$$

$$= \left| -\frac{\sigma_n^{(s)}(x)}{(n+1)^{2k}} + \sum_{m=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{m^{2k}} - \frac{1}{(m+1)^{2k}} \right) \sigma_m^{(s)}(x) \right| \qquad (3.12)$$

Функция $f(x) \in W_\gamma^{2k}(M_{2k}; -1,1)$ и, следовательно, имеет место неравенство (3.2), поэтому легко показать, что

$$|\sigma_m^{(s)}(x)| < 2M_{2k}(1 + \ln\frac{\pi}{2} + \ln m) \qquad (s = 1,2) \qquad (3.13)$$

Оценим каждый член ряда (3.12) при помощи (3.13), а при дальнейшей оценке этого ряда воспользуемся неравенствами

$$\ln\frac{m+1}{m} < \frac{1}{m}, \qquad \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{(m+1)^{2k+1}} < \frac{1}{2k(n+1)^{2k}}$$

В результате получим

$$|r_n^{(s)}(x)| < M_{2k} \frac{2}{(n+1)^{2k}} \left(2 + 2\ln\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{k} \right) = M_{2k} N(n, k)$$
$$(s = 1,2)$$

что и требовалось доказать.

§ 4. Результаты предыдущего параграфа дают возможность получить приближенные формулы для вычисления интегралов $J(x)$ и $I(x)$.

Теорема 2. Пусть $f(x) \in W_\gamma^{(2k)}(M_{2k}; -1,1)$, тогда

$$J(x) \approx J_n^{(k)}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{k} (-1)^s [\gamma_1^{2(s-1)} p_1^{(2s-1)}(x) + (\operatorname{sign} x)\gamma^{(2s-1)} q_1^{(2s)}(x^*) +$$
$$+ \gamma_2^{2(s-1)} p_2^{(2s-1)}(x) - \gamma^{2(s-1)} p_2^{(2s-1)}(x^*)] - \sum_{m=1}^{n} b_m^* T_m(x) \qquad (4.1)$$

$$I(x) \approx I_n^{(k)}(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{k} (-1)^s [-\gamma^{2(s-1)} p_1^{(2s-1)}(x^*) + \gamma_1^{(2s-1)} q_1^{(2s)}(x) +$$
$$+ \gamma_2^{(2s-1)} q_2^{(2s)}(x) + (\operatorname{sign} x)\gamma^{(2s-1)} q_2^{(2s)}(x^*)] + \sum_{m=1}^{n} a_m^* U_m(x) \qquad (4.2)$$

при этом

$$|J(x) - J_n^{(k)}(x)| < M_{2k} N(n,k), \qquad |I(x) - I_n^{(k)}(x)| < M_{2k} N(n, k) \qquad (4.3)$$

Доказательство. Подставим выражения (3.8), (3.9) для функции $f(x)$ соответственно в интегралы $J(x)$ и $I(x)$; пользуясь равенствами (1.1) и (2.4), (2.5), получим

$$J(x) = J_n^{(k)}(x) + r_n^{(3)}(x), \qquad I(x) = I_n^{(k)}(x) + r^{(4)}(x)$$

где

$$r_n^{(3)}(x) = -\sum_{m=n+1}^{\infty} b_m^* T_m(x), \qquad r_n^{(4)}(x) = \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m U_m(x)$$

Совершенно аналогично, как это было сделано в предыдущем параграфе при оценке $r_n^{(1)}(x)$ и $r_n^{(2)}(x)$, нетрудно показать, что

$$|r_n^{(3)}(x)| < M_{2k} N(n, k), \qquad |r_n^{(4)}(x)| < M_{2k} N(n, k)$$

Сопоставляя эти неравенства с полученными выше выражениями для $J(x)$ и $I(x)$, убеждаемся в справедливости формул (4.1), (4.2) и (4.3).

Отметим три частных случая, когда формулы (4.1), (4.2) упрощаются.

1. Функция $f(x)$ и ее производные непрерывны в точке $x=0$:

$$J(x) \approx J_n^{(k)}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}(-1)^s[\gamma_1^{2(s-1)}p_1^{(2s-1)}(x) + \gamma_2^{2(s-1)}p_2^{(2s-1)}(x)] - \sum_{m=1}^{n} b_m{}^* T_m(x), \qquad |J(x) - J_n^{(k)}(x)| < M_{2k}N(n,k) \tag{4.4}$$

$$I(x) \approx I_n^{(k)}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}(-1)^s[\gamma_1^{(2s-1)}q_1^{(2s)}(x) + \gamma_2^{(2s-1)}q_2^{(2s)}(x)] + \sum_{m=1}^{n} a_m{}^* U_m(x), \qquad |I(x) - I_n^{(k)}(x)| < M_{2k}N(n,k) \tag{4.5}$$

2. Функция $f(x)$ четная, т. е. $f(-x) = f(x)$:

$$J(x) \approx J_n^{(k)}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}(-1)^s[\gamma_1^{2(s-1)}p_1^{(2s-1)}(x) + (\operatorname{sign} x)\gamma^{(2s-1)}q_1^{(2s)}(x^*)] - \sum_{m=1}^{n} b_{2m-1}^* T_{2m-1}(x), \qquad |J(x) - J_n^{(k)}(x)| < M_{2k}N(2n-1,k) \tag{4.6}$$

$$I(x) \approx I_n^{(k)}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}(-1)^s[\gamma_2^{(2s-1)}q_2^{(2s)}(x) + (\operatorname{sign} x)\gamma^{(2s-1)}q_2^{(2s)}(x^*)] + \sum_{m=1}^{n} a_{2m}{}^* U_{2m}(x), \qquad |I(x) - I_n^{(k)}(x)| < M_{2k}N(2n,k) \tag{4.7}$$

3 Функция $f(x)$ нечетная, т. е. $f(-x) = -f(x)$:

$$J(x) \approx J_n^{(k)}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}(-1)^s[\gamma_2^{2(s-1)}p_2^{(2s-1)}(x) - \gamma^{2(s-1)}p_2^{(2s-1)}(x^*)] - \sum_{m=1}^{n} b_{2m}{}^* T_{2m}(x), \qquad |J(x) - J_n^{(k)}(x)| < M_{2k}N(2n,k) \tag{4.8}$$

$$I(x) \approx I_n^{(k)}(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{k}(-1)^s[-\gamma^{2(s-1)}p_1^{(2s-1)}(x^*) + \gamma_1^{(2s-1)}q_1^{(2s)}(x)] + \sum_{m=1}^{n} a_{2m-1}{}^* U_{2m-1}(x), \qquad |I(x) - I_n^{(k)}(x)| < M_{2k}N(2n-1,k) \tag{4.9}$$

Если функция $f(x)$ четная, то

$$J(-x) = -J(x), \qquad I(-x) = -I(x) \tag{4.10}$$

если функция $f(x)$ нечетная, то

$$J(-x) = J(x), \qquad I(-x) = I(x) \tag{4.11}$$

В качестве примера для иллюстрации изложенного метода рассмотрим интеграл:

$$I(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{{}^1\!/_4\pi\,|t|}{t-x}\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \tag{4.12}$$

Здесь функция $f(x) = {}^1\!/_4\pi\,|x|$ четная; следовательно, для вычисления этого интеграла нужно воспользоваться частным случаем (4.7) формулы (4.2). Используя формулы (3.1) — (3.6), находим:

$$f^{(2s-1)}(x) = (-1)^s\frac{\pi}{4}(\operatorname{sign} x)\sqrt{1-x^2}, \qquad f^{(2s)}(x) = (-1)^s\frac{\pi}{4}|x|$$

$$\gamma_2^{(2s-1)} = 0, \qquad \gamma^{(2s-1)} = (-1)^s\frac{\pi}{4}, \qquad M_{2k} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^{m-1}}{4m^2-1} \quad (m = 1,2,\ldots); \qquad a_2{}^* = \frac{1}{3}, \quad a_{2m}{}^* = \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)^{2k}(4m^2-1)} \quad (m=2,3,\ldots)$$

Подставив найденные величины в формулу (4.7), получим

$$I(x) \approx I_n^{(k)}(x) = (\operatorname{sign} x) \sum_{s=1}^{k} q_2^{(2s)}(x^*) + \frac{1}{3} U_2(x) + \sum_{m=2}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m)^{2k}(4m^2-1)} U_{2m}(x) \qquad (4.13)$$

$$|I(x) - I_n^{(k)}(x)| < \frac{\pi}{4} N(2n, k) \qquad (4.14)$$

Формула (4.13) дает возможность, используя оценку (4.14), вычислить интеграл (4.12) с любой заданной степенью точности. С другой стороны, при помощи формулы (1.3) или непосредственным интегрированием можно найти точное значение интеграла (4.12) в элементарных функциях

$$I(x) = x \operatorname{Arth} \sqrt{1-x^2} = x \operatorname{Arch} \frac{1}{x}$$

Так как рассматриваемый интеграл является нечетной функцией, то при его вычислении можно ограничиться интервалом [0,1]. Вычислим в различных точках интервала [0,1] приближенное значение рассматриваемого интеграла и сравним его с точным значением, в результате чего получим:

$x=0.0$	0.1	cos 80°	0.2	0.3	cos 70°	0.4	0.5	0.6
$I(x)=0.0000$	0.1497	0.2115	0.2292	0.2811	0.2968	0.3134	0.3292	0.3296
$I_2^2(x)=0.0000$	0.1497	0.2116	0.2292	0.2811	0.2967	0.3134	0.3292	0.3295
$x=$cos 50°	0.7	cos 40°	0.8	cos 30°	0.9	cos 20°	cos 10°	1.0
$I(x)=0.3248$	0.3135	0.2922	0.2773	0.2379	0.2102	0.1674	0.0864	0.0000
$I_2^2(x)=0.3248$	0.3135	0.2922	0.2774	0.2380	0.2103	0.1673	0.0863	0.0000

Отсюда видно, что приближенные значения интеграла (4.12), вычисленные по формуле (4.13) при $n=2$, $k=2$, отличаются от точных только на единицу четвертого знака после запятой. Оценка (4.14) в этом случае дает

$$|I(x) - I_2^{(2)}(x)| < 0.0162$$

т. е. формула (4.13) является практически более точной, чем это следует из оценки (4.14).

В заключение автор считает своим долгом выразить признательность А. В. Бицадзе и С. М. Никольскому за ценные советы при обсуждении настоящей работы, а также поблагодарить В. М. Егорову и А. Р. Шкирич, оказавших помощь при составлении таблиц.

Поступила 1 IX 1959

Институт механики АН СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Гостехиздат, М.— Л., 1950.
2. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. Гостехиздат, М.— Л., 1949.
3. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
4. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, М., 1953.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, М., 1952.
6. Аравин В. И. и Нумеров С. Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. Гостехиздат, М., 1953.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. Гостехиздат, М.— Л., 1946.
8. Гахов Ф. Д. Краевая задача. Физматгиз. М., 1958.
9. Multhopp H. Die Berechnung der Auftriebverteilung von Tragflügeln. Luftfahrtforschung, XV, № 4, 1938.
10. Каландия А. И. Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении к теории упругости. Матем. сб., т. 42 (84), № 6, 1957.
11. Симонов Л. А. Расчет обтекания крыловых профилей и построение профиля по распределению скоростей на его поверхности. ПММ, т. XI, вып. 1, 1947.
12. Никольский С. М. К вопросу об оценках приближений квадратурными формулами. Успехи матем. наук, т. V, вып. 2 (36), 1950.
13. Никольский С. М. Квадратурные формулы. Гостехиздат, М., 1958.