Прикладная математика и механика. Том XXIII, 1959
Отделение технических наук Академии наук Союза ССР

# О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЯХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л. М. Мархашов

(Москва)

1°. Пусть коэффициенты $q_1(t)$ и $q_2(t)$ уравнения

$$x^{\cdot\cdot}+q_1(t)x^{\cdot}+q_2(t)x=0 \tag{1.1}$$

непрерывны и обладают одинаковым вещественным периодом $\omega$. Известно, что

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega q_1(t)\,dt=-(\lambda_1+\lambda_2) \tag{1.2}$$

где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — характеристические показатели решений уравнения (1.1) — конечные вещественные числа.

Равенство (1.2) дает пример функции $F$ от коэффициентов уравнения (1.1), именно $F\equiv q_1$, обладающей следующим свойством: ее среднее по периоду значение есть такая функция характеристических показателей $\lambda_1$ и $\lambda_2$, структура которой не зависит от вида $q_1$ как функции времени $t$.

Наличие еще одной подобной функции со средним значением, отличным от $\lambda_1+\lambda_2$, позволило бы вычислять $\lambda_1$ и $\lambda_2$ путем конечного числа стандартных операций над коэффициентами уравнения независимо от частного вида последних.

Можно показать, однако, что такой функции не существует.

2°. Уточним постановку задачи. Пусть коэффициенты $q_1(t)$ и $q_2(t)$ непрерывно дифференцируемы $n$ раз и таковы, что $\lambda_1\neq\lambda_2$. Тогда независимые решения уравнения (1.1) могут быть представлены в виде [2]

$$x_i=\varphi_i(t)\,e^{\lambda_i t} \tag{2.1}$$

Здесь и в дальнейшем $i=1,2$; $\varphi_i(t)$ — функции, периодические с периодом $\omega$.

Из теоремы существования и единственности решений уравнения (1.1) и уравнений, получающихся из него $n$-кратным дифференцированием, следует, что функции $\varphi_i(t)$ непрерывны вместе со своими производными до порядка $n+2$ включительно.

Обозначим

$$\varphi_i^{(\varkappa)}=\frac{d^{(\varkappa)}\varphi_i}{dt^\varkappa},\qquad \varphi_i^{(0)}=\varphi_i\qquad (\varkappa=0,1,\ldots,n)$$

Из уравнений, получающихся после подстановки каждого из решений (2.1) в уравнение (1.1), получим

$$q_i = a_{i1}\varphi_1{}^{(2)} + a_{i2}\varphi_2{}^{(2)} + b_{i0}$$

$$a_{11} = -\frac{\varphi_2}{\Delta}, \qquad a_{12} = \frac{\varphi_1}{\Delta}, \qquad a_{21} = \frac{\varphi_2{}^{(1)} + \lambda_2\varphi_2}{\Delta}, \qquad a_{22} = -\frac{\varphi_1{}^{(1)} + \lambda_1\varphi_1}{\Delta}$$

$$\Delta = \varphi_1{}^{(1)}\varphi_2 - \varphi_1\varphi_2{}^{(1)} + (\lambda_1 - \lambda_2)\varphi_1\varphi_2, \qquad \frac{\partial b_{i0}}{\partial \varphi_1{}^{(2)}} = \frac{\partial b_{i0}}{\partial \varphi_2{}^{(2)}} = 0 \tag{2.2}$$

Из этих соотношений следует

$$q_i{}^{(\varkappa)} = a_{i1}\varphi_1{}^{(\varkappa+2)} + a_{i2}\varphi_2{}^{(\varkappa+2)} + b_{i\varkappa}^{*} \tag{2.3}$$

где $b_{i\varkappa}^{*}$ непрерывны и не зависят от $\varphi_1{}^{(\varkappa+2)}$, $\varphi_2{}^{(\varkappa+2)}$.

Рассмотрим всевозможные дифференцируемые функции $F_\nu$ с независимыми[1] аргументами $t, \varphi_1, \ldots, \varphi_2{}^{(n+2)}$, периодические относительно аргумента $t$, входящего явно:

$$F_\nu(t+\omega, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2{}^{n+2}) = F_\nu(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2{}^{(n+2)})$$

Подчиним их следующим условиям. 1. Среднее по периоду значение $F_\nu$ есть функция $c_\nu(\lambda_1, \lambda_2)$ характеристических показателей, вид которой не зависит от вида $\varphi_i(t)$ как функции $t$:

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega F_\nu[t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1(t), \ldots, \quad \varphi_2{}^{(n+2)}(t)]\,dt = c_\nu(\lambda_1, \lambda_2) \tag{2.4}$$

2. Аргументы функций $F_\nu$ группируются таким образом, что в силу (2.3) при любых $\varphi_i{}^{(\varkappa)}$ имеет место тождество

$$F_\nu(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2{}^{(n+2)}) \equiv F_\nu'(t, q_1, \ldots, q_2{}^{(n)}) \tag{2.5}$$

$F_\nu'$ не зависят явно от $\lambda_i$ и $\varphi_1{}^{(\varkappa)}$.

Функции, удовлетворяющие условиям (2.4) и (2.5), отнесем к множеству $\{F\}$. Они периодичны относительно $t$ и таковы, что интеграл

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega F[t, q_1(t), \ldots, q_2{}^{(n)}(t)]\,dt$$

является функцией характеристических показателей, структура которой зависит только от выбора $F$. Аргументы $F$, — $t$, $q_i{}^{(\varkappa)}$— независимы. Справедлива следующая теорема.

*Теорема.* Если $n$ раз непрерывно дифференцируемые периодические функции $q_i(t)$ не являются одновременно тождественными константами и таковы, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то, какова бы ни была функция $F$ из множества $\{F\}$, всегда имеет место тождество

$$\frac{1}{\omega}\int_0^\omega F[t, q_1(t), \ldots, q_2{}^{(n)}(t)]\,dt = \mu_1(\lambda_1 + \lambda_2) + \mu$$

где $\mu_1$ и $\mu$ — постоянные, не зависящие от $\lambda_i$.

---

[1] Предполагается, что аргумент $t$, входящий в $F_\nu$ явным образом, не может быть выражен при помощи интегралов вида

$$\int_0^t G\,[\varphi_i^{\varkappa}(t)]\,dt$$

где $G$ — любая интегрируемая функция переменных $\varphi_i^{(\varkappa)}$, отличная от константы.

Из теоремы следует, что характеристические показатели решений уравнения (1.1) не могут быть выражены ни через какие конечные соотношения между средними значениями функций из множества $\{F\}$.

Ниже приводятся две леммы, при помощи которых условия (2.4) и (2.5), ограничивающие класс функций $F_\nu$, формулируются в виде, удобном для доказательства теоремы.

*Лемма 1.* Для того чтобы функция $F_\nu$ удовлетворяла условию (2.4), необходимо и достаточно, чтобы равенства

$$\Psi_{n+2}^{(i)}(F_\nu) \equiv \frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_i^{(1)}}\right) + \ldots + (-1)^{n+2}\frac{d^{(n+2)}}{dt^{n+2}}\left(\frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_i^{(n+2)}}\right) = 0 \qquad (2.6)$$

удовлетворялись тождественно по $\varphi_i^{(\varkappa)}$.

*Доказательство.* Без нарушения общности положим $\omega = 2\pi$. Функции $\varphi_i^{(\varkappa)}$ допускают разложения в сходящиеся ряды Фурье:

$$\varphi_i = a_0^{(i)} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{(i)} \cos kt + b_k^{(i)} \sin kt)$$

$$\varphi_i^{(1)} = \sum_{k=1}^{\infty} k\,(-a_k^{(i)} \sin kt + b_k^{(i)} \cos kt)$$

$$\varphi_i^{(2)} = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^{(i)} \cos kt + b_k^{(i)} \sin kt) \qquad \text{и т. д.}$$

Функционал

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_\nu(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(n+2)})\, dt$$

не зависит от вида функции $\varphi_i^{(\varkappa)}$ тогда и только тогда, если

$$\frac{\partial J}{\partial a_k^{(i)}} = \frac{\partial J}{\partial b_k^{(i)}} = \frac{\partial J}{\partial a_0^{(i)}} = 0$$

Имеем

$$\frac{\partial J}{\partial a_k^{(i)}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_i}\cos kt + \frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_i^{(1)}}(-k \sin kt) + \frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_i^{(2)}}(-k^2 \cos kt) + \ldots\right] dt$$

$$\frac{\partial J}{\partial b_i^{(i)}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_i}\sin kt + \frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_i^{(1)}} k \cos kt + \frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_i^{(2)}}(-k^2 \sin kt) + \ldots\right] dt$$

Интегрируя слагаемые подынтегральных функций соответствующее число раз по частям и учитывая периодичность функций $F_\nu$, получим

$$\frac{\partial J}{\partial a_k^{(i)}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_{n+2}^{(i)}(F_\nu)\cos kt\, dt = 0, \qquad \frac{\partial J}{\partial b_k^{(i)}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_{n+2}^{(i)}(F_\nu)\sin kt\, dt = 0$$

Кроме того,

$$\frac{\partial J}{\partial a_0^{(i)}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi_{n+2}^{(i)}(F_\nu)\, dt = 0$$

Отсюда и следует справедливость леммы.

Отметим, что содержание доказанной леммы не совпадает с содержанием похожей вариационной задачи. Поэтому справедливость ее не вытекает из каких-либо фактов вариационного исчисления.

*Следствие.* Нетрудно установить, что равенствам (2.6) удовлетворяет любая функция $F_\nu$, представимая в виде

$$F_\nu(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(n+2)}) = \frac{d}{dt} f(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(n+1)})$$

где $f$ — произвольная дифференцируемая функция, периодическая относительно аргумента $t$.

*Лемма 2.* Пусть $r_м$ — ранг функциональной матрицы

$$M = \left\| \begin{matrix} \dfrac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_2} & \ldots & \dfrac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_2^{(n+2)}} \\ \dfrac{\partial q_1}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial q_1}{\partial \varphi_2} & \ldots & \dfrac{\partial q_1}{\partial \varphi_2^{(n+2)}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial q_2^{(n)}}{\partial \varphi_1} & \dfrac{\partial q_2^{(n)}}{\partial \varphi_2} & \ldots & \dfrac{\partial q_2^{(n)}}{\partial \varphi_2^{(n+2)}} \end{matrix} \right\|$$

$F_\nu$ удовлетворяет условию (2.5) тогда и только тогда, если $r_м \leqslant 2(n+1)$, каковы бы ни были $\varphi_i^{(\varkappa)}$.

Справедливость леммы вытекает из известной теоремы анализа [3].

Заметим, что лемма не носит локального характера по самому смыслу условия (2.5), которое должно выполняться всюду.

3°. Перейдем к доказательству теоремы.

Покажем прежде всего, что функция $F_\nu$, подчиненная условию (2.4), необходимо представима в виде

$$F_\nu = u_n \varphi_1^{(n+2)} + v_n \varphi_2^{(n+2)} + A_n \tag{3.1}$$

при этом

$$\frac{\partial u_n}{\partial \varphi_2^{(n+1)}} = \frac{\partial v_n}{\partial \varphi_1^{(n+1)}}, \qquad \frac{\partial u_n}{\partial \varphi_i^{(n+2)}} = \frac{\partial v_n}{\partial \varphi_i^{(n+2)}} = \frac{\partial A_n}{\partial \varphi_i^{(n+2)}} = 0 \tag{3.2}$$

В самом деле, так как $F_\nu$ содержит по предположению лишь производные не выше порядка $n+2$, то коэффициенты при старших производных в операторе (2.6) должны обращаться в нуль.

Коэффициенты при $\varphi_i^{2\,(n+2)}$

$$\partial^2 F / \partial\varphi_i^{(n+2)} \partial\varphi_j^{(n+2)} = 0 \qquad (i = 1, 2) \tag{3.3}$$

Отсюда

$$F_\nu = u_n \varphi_1^{(n+2)} + v_n \varphi_2^{(n+2)} + A_n$$

причем удовлетворяется второе условие (3.2).

Члены, содержащие производные порядка $2(n+2) - 1$, порождаются последними двумя слагаемыми оператора (2.4):

$$(-1)^{n+1} \frac{d^{(n+1)}}{dt^{n+1}} \left(\frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_i^{(n+1)}}\right) \equiv$$

$$\equiv (-1)^{n+1} \frac{d^{(n+1)}}{dt^{n+1}} \left(\frac{\partial u_n}{\partial \varphi_i^{(n+1)}} \varphi_1^{(n+2)} + \frac{\partial v_n}{\partial \varphi_i^{(n+1)}} \varphi_2^{(n+2)} + \frac{\partial A_n}{\partial \varphi_i^{(n+1)}}\right)$$

$$(-1)^{n+2} \frac{d^{(n+1)}}{dt^{n+1}} \left(\frac{\partial z_i}{\partial \varphi_1^{(n+1)}} \varphi_1^{(n+2)} + \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_2^{(n+1)}} \varphi_2^{(n+1)} + \ldots\right)$$

Здесь

$$z_i = \begin{cases} u_n & (i=1) \\ v_n & (i=2) \end{cases}$$

Коэффициент при первой степени функции $\varphi_1^{(2n+3)}$

$$\frac{\partial u_n}{\partial \varphi_i^{(n+1)}} - \frac{\partial z_i}{\partial \varphi_1^{(n+1)}} = 0$$

Отсюда при $i=2$ получаем первое равенство (3.2).

Ограничимся ради наглядности случаем $n=1$; являясь простейшим, он содержит все характерные особенности общего случая.

Заметим сперва, что определитель

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta^{-1} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} \begin{vmatrix} x_1^{\cdot} & x_1 \\ x_2^{\cdot} & x_2 \end{vmatrix}^{-1}$$

в силу линейной независимости и непрерывности решений уравнения (1.1) ограничен и не обращается в нуль.

Потребуем для функции $F_\nu$ также выполнения условия (2.5). Согласно лемме 2, при $n=1$ должно быть $r_м \leqslant 4$. Тогда найдется по крайней мере одна совокупность величин $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_4$, среди которых не все нули, такая, что

$$\mu_0 \frac{\partial F_\nu}{\partial \varphi_i^{(j)}} + \mu_1 \frac{\partial q_1}{\partial \varphi_i^{(j)}} + \mu_2 \frac{\partial q_2}{\partial \varphi_i^{(j)}} + \mu_3 \frac{\partial q_1^{(1)}}{\partial \varphi_i^{(j)}} + \mu_4 \frac{\partial q_2^{(1)}}{\partial \varphi_i^{(j)}} = 0 \quad (j=0,1,2,3) \qquad (3.4)$$

Эти уравнения должны выполняться тождественно относительно $\varphi_i^{(j)}$. Отметим, что $\mu_0 \neq 0$, так как в противном случае между строками матрицы $M$, кроме первой, существовала бы линейная зависимость. Но это невозможно: определитель четвертого порядка матрицы $M$, стоящий в правом нижнем углу, отличен от нуля:

$$\frac{\partial (q_1, q_2, q_1^{(1)}, q_2^{(1)})}{\partial (\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \varphi_1^{(3)}, \varphi_2^{(3)})} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & a_{11} & a_{12} \\ \cdot & \cdot & a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = D^2 \neq 0$$

Поэтому без нарушения общности $\mu_0 = 1$.

Учитывая линейность функций $F_\nu, q_1, \ldots, q_2^{(1)}$ относительно $\varphi_i^{(3)}$ и пользуясь условием $D \neq 0$, нетрудно убедиться путем дифференцирования уравнений (3.4) по $\varphi_i^{(3)}$, что

$$\frac{\partial \mu_3}{\partial \varphi_i^{(3)}} = \frac{\partial \mu_4}{\partial \varphi_i^{(3)}} = 0.$$

$$\mu_1 = \mu_{11}\varphi_1^{(3)} + \mu_{12}\varphi_2^{(3)} + \mu_1', \qquad \mu_2 = \mu_{21}\varphi_1^{(3)} + \mu_{22}\varphi_2^{(3)} + \mu_2'$$

где $\mu_{i\rho}, \mu_i'$ — величины, не зависящие от $\varphi_i^{(3)}$. Подставляя значения $\mu_1$, $\mu_2$ в (3.4), приравнивая нулю коэффициенты при $\varphi_i^{(3)}$ и учитывая (2.3), (3.1), найдем

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_1}{\partial \varphi_1} + \mu_3 \frac{\partial a_{11}}{\partial \varphi_1} + \mu_4 \frac{\partial a_{21}}{\partial \varphi_1} + \mu_{11} \frac{\partial q_1}{\partial \varphi_1} + \mu_{21} \frac{\partial q_2}{\partial \varphi_1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3.5) \\ \frac{\partial u_1}{\partial \varphi_2^{(2)}} + \mu_3 \frac{\partial a_{11}}{\partial \varphi_2^{(2)}} + \mu_4 \frac{\partial a_{21}}{\partial \varphi_2^{(2)}} + \mu_{11} \frac{\partial q_1}{\partial \varphi_2^{(2)}} + \mu_{21} \frac{\partial q_2}{\partial \varphi_2^{(2)}} = 0 \end{gathered}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varphi_1}+\mu_3\frac{\partial a_{12}}{\partial \varphi_1}+\mu_4\frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi_1}+\mu_{12}\frac{\partial q_1}{\partial \varphi_1}+\mu_{22}\frac{\partial q_2}{\partial \varphi_1}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3.6)$$
$$\frac{\partial v_1}{\partial \varphi_2^{(2)}}+\mu_3\frac{\partial a_{12}}{\partial \varphi_2^{(2)}}+\mu_4\frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi_2^{(2)}}+\mu_{12}\frac{\partial q_1}{\partial \varphi_2^{(2)}}+\mu_{22}\frac{\partial q_2}{\partial \varphi_2^{(2)}}=0$$
$$u_1+\mu_3a_{11}+\mu_4a_{21}=0,\qquad v_1+\mu_3a_{12}+\mu_4a_{22}=0 \qquad (3.7)$$

Система уравнений (3.7) получается непосредственно как запись факта линейной зависимости элементов двух последних столбцов матрицы $M$.

Группа уравнений, получающаяся из (3.4) приравниванием нулю совокупности членов, не зависящих от $\varphi_i^{(3)}$, не выписана. Исключая $u_1$ из системы (3.5) и $v_1$ из системы (3.6) при помощи (3.7), получим

$$-a_{11}\frac{\partial \mu_3}{\partial \varphi_1}-a_{21}\frac{\partial \mu_4}{\partial \varphi_1}+\mu_{11}\frac{\partial q_1}{\partial \varphi_1}+\mu_{21}\frac{\partial q_2}{\partial \varphi_1}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-a_{11}\frac{\partial \mu_3}{\partial \varphi_2^{(2)}}-a_{21}\frac{\partial \mu_4}{\partial \varphi_2^{(2)}}+\mu_{11}\frac{\partial q_1}{\partial \varphi_2^{(2)}}+\mu_{21}\frac{\partial q_2}{\partial \varphi_2^{(2)}}=0$$
$$-a_{12}\frac{\partial \mu_3}{\partial \varphi_1}-a_{22}\frac{\partial \mu_4}{\partial \varphi_1}+\mu_{12}\frac{\partial q_1}{\partial \varphi_1}+\mu_{22}\frac{\partial q_2}{\partial \varphi_1}=0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-a_{12}\frac{\partial \mu_3}{\partial \varphi_2^{(2)}}-a_{22}\frac{\partial \mu_4}{\partial \varphi_2^{(2)}}+\mu_{12}\frac{\partial q_1}{\partial \varphi_2^{(2)}}+\mu_{22}\frac{\partial q_2}{\partial \varphi_2^{(2)}}=0$$

Отсюда следует существование двух тождественных по $\varphi_1,\ldots,\varphi_2^{(2)}$ зависимостей $X_1(\mu_3,\mu_4,q_1,q_2,t)=0$, $X_2(\mu_3,\mu_4,q_1,q_2,t)=0$.

При этом для любых конечных $q_i$ и $t$

$$\frac{\partial(X_1,X_2)}{\partial(\mu_3,\mu_4)}\sim D\neq 0$$

поэтому уравнения $X_i=0$ разрешимы относительно $\mu_3$ и $\mu_4$:

$$\mu_3=\mu_3(q_1,q_2,t),\qquad \mu_4=\mu_4(q_1,q_2,t)$$

Подстановка в равенства (3.2) значений $u_1$ и $v_1$ из уравнений (3.7) после простых преобразований с учетом (2.2) дает

$$D\left(\frac{\partial \mu_3}{\partial q_2}-\frac{\partial \mu_4}{\partial q_1}\right)=0,\quad \text{или}\quad \frac{\partial \mu_3}{\partial q_2}=\frac{\partial \mu_4}{\partial q_1}$$

Следовательно, существует такая дифференцируемая функция $\Phi_1(q_1,q_2,t)$, что $\mu_3=\partial\Phi_1/\partial q_1$, $\mu_4=\partial\Phi_1/\partial q_2$. В силу (3.2) имеем

$$u_1=\partial f_1/\partial\varphi_1^{(2)},\qquad v_1=\partial f_1/\partial\varphi_2^{(2)}$$

поэтому из уравнений (3.7) найдем

$$\frac{\partial}{\partial\varphi_i^{(2)}}[f_1-\Phi_1(q_1,q_2,t)]=0$$

где $f_1$ — дифференцируемая функция переменных $t,\varphi_1,\ldots,\varphi_2^{(2)},\lambda_1,\lambda_2$.

Используя последние соотношения, функцию $F_\nu=u_1\varphi_1^{(3)}+v_1\varphi_2^{(3)}+A_1$ можно привести к виду

$$F_\nu=\frac{d}{dt}\Phi_1(q_1,q_2,t)+B_1(t,\lambda_1,\lambda_2,\varphi_1,\ldots,\varphi_2^{(2)})$$

где $B_1$ — некоторая дифференцируемая функция, не содержащая $\varphi_i^{(3)}$.

В общем случае $(n>1)$ функция $F_\nu$, подчиненная условиям (2.4) и (2.5), необходимо представима в виде

$$F_\nu(t,\lambda_1,\lambda_2,\varphi_1,\ldots,\varphi_2^{(n+2)})=\frac{d}{dt}\Phi_n(t,q_1,\ldots,q_2^{(n-1)})+$$
$$+B_n(t,\lambda_1,\lambda_2,\varphi_1,\ldots,\varphi_2^{(n+1)})$$

Согласно лемме 1, $\Psi_{n+2}^{(i)}(F_\nu) = 0$. Ввиду линейности оператора $\Psi_{n+2}$ (опущен значок $i$)

$$\Psi_{n+2}(F_\nu) = \Psi_{n+2}(d\Phi_n / dt) + \Psi_{n+2}(B_n)$$

В силу следствия из леммы 1

$$\Psi_{n+2}(d\Phi_n / dt) = 0$$

Поэтому $\Psi_{n+2}(B_n) = 0$. Но $\partial B_n / \partial\varphi^{(n+2)} = 0$, и порядок оператора понижается на единицу: $\Psi_{n+1}(B_n) = 0$. Совершенно аналогично получается

$$B_n(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(n+1)}) = \frac{d}{dt}\Phi_{n-1}(t, q_1, \ldots, q_2^{(n-2)}) +$$
$$+ B_{n-1}(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(n)}), \quad \Psi_n(B_{n-1}) = 0$$

Таким образом,

$$F_\nu(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(n+2)}) = \frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\Phi_k + B_1(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(2)}) =$$
$$= \frac{d}{dt}\Phi(t, q_1, \ldots, q_2^{(n-1)}) + B_1(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(2)}) \qquad \Psi_2(B_1) = 0$$

Здесь $\Phi = \Phi_1 + \ldots + \Phi_n$.

Функция $B_1$ должна также удовлетворять условию (2.5). Согласно лемме 2 соответствующие уравнения ($n = 0$), в которых положено

$$B_1 = u_0(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(1)})\varphi_1^{(2)} + v_0(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(1)})\varphi_2^{(2)} +$$
$$+ A_0(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(1)})$$

получают вид:

$$\frac{\partial u_0}{\partial\varphi_1} + \mu_1\frac{\partial a_{11}}{\partial\varphi_1} + \mu_2\frac{\partial a_{21}}{\partial\varphi_1} = 0, \ldots, \qquad \frac{\partial u_0}{\partial\varphi_2^{(1)}} + \mu_1\frac{\partial a_{11}}{\partial\varphi_2^{(1)}} + \mu_2\frac{\partial a_{21}}{\partial\varphi_2^{(1)}} = 0 \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial v_0}{\partial\varphi_1} + \mu_1\frac{\partial a_{12}}{\partial\varphi_1} + \mu_2\frac{\partial a_{22}}{\partial\varphi_1} = 0, \ldots, \qquad \frac{\partial v_0}{\partial\varphi_2^{(1)}} + \mu_1\frac{\partial a_{12}}{\partial\varphi_2^{(1)}} + \mu_2\frac{\partial a_{22}}{\partial\varphi_2^{(1)}} = 0 \quad (3.9)$$

$$u_0 + \mu_1 a_{11} + \mu_2 a_{21} = 0, \qquad v_0 + \mu_1 a_{12} + \mu_2 a_{22} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial\varphi_1} + \mu_1\frac{\partial b_{10}}{\partial\varphi_1} + \mu_2\frac{\partial b_{20}}{\partial\varphi_1} = 0, \ldots, \qquad \frac{\partial A_0}{\partial\varphi_2^{(1)}} + \mu_1\frac{\partial b_{10}}{\partial\varphi_2^{(1)}} + \mu_2\frac{\partial b_{20}}{\partial\varphi_2^{(1)}} = 0 \quad (3.11)$$

Последняя группа уравнений получена приравниванием нулю совокупности членов, не содержащих $\varphi_i^{(2)}$ в уравнениях (3.4), записанных для случая $n = 0$. Исключая $u_0$ из (3.8) и $v_0$ из (3.9) при помощи уравнений (3.1), получим

$$a_{11}\frac{\partial\mu_1}{\partial\varphi_1} + a_{21}\frac{\partial\mu_2}{\partial\varphi_1} = 0, \ldots, \qquad a_{11}\frac{\partial\mu_1}{\partial\varphi_2^{(1)}} + a_{21}\frac{\partial\mu_2}{\partial\varphi_2^{(1)}} = 0$$

$$a_{12}\frac{\partial\mu_1}{\partial\varphi_1} + a_{22}\frac{\partial\mu_2}{\partial\varphi_1} = 0, \ldots, \qquad a_{12}\frac{\partial\mu_1}{\partial\varphi_2^{(1)}} + a_{22}\frac{\partial\mu_2}{\partial\varphi_2^{(1)}} = 0$$

Сопоставляя уравнения последних систем попарно и учитывая, что $D \neq 0$, получим

$$\frac{\partial\mu_1}{\partial\varphi_i^{(j)}} = \frac{\partial\mu_2}{\partial\varphi_i^{(j)}} = 0 \qquad (j = 1, 2)$$

и, следовательно, $\mu_1 = \mu_1(t)$, $\mu_2 = \mu_2(t)$.

Система (3.11) сводится к единственному уравнению

$$A_0 + \mu_1 b_{10} + \mu_2 b_{20} = \psi(t)$$

Из условия $\partial u_0 / \partial \varphi_2^{(1)} = \partial v_0 / \partial \varphi_1^{(1)}$ с учетом соотношений (3.10), (2.2) и так как $D \neq 0$, получим $\mu_2 = 0$. Окончательно системы (3.8), (3.9) и (3.11) сводятся к трем уравнениям:

$$A_0 + \mu_1 b_{10} = \psi(t), \qquad u_0 + \mu_1 a_{11} = 0, \qquad v_0 + \mu_1 a_{12} = 0$$

Таким образом,

$$B_1 = u_0 \varphi_1^{(2)} + u_0 \varphi_2^{(2)} + A_0 = \psi(t) - \mu_1 (a_{11}\varphi_1^{(2)} + a_{12}\varphi_2^{(2)} + b_{10}) = \psi(t) - \mu_1 q_1$$

Покажем, что $\mu_1 = \text{const}$. Из уравнения $\Psi_2(B_1) = 0$ следует

$$B_1 = \frac{d}{dt} \zeta(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(1)}) + \zeta_1(t)$$

где $\zeta$ и $\zeta_1$ — некоторые дифференцируемые функциии; аргументы $\zeta$ независимы. Но

$$\mu_1 q_1 = \mu_1 \frac{d}{dt} [(\lambda_1 + \lambda_2) t + \ln \Delta]$$

С другой стороны,

$$\mu_1 q_1 = -\frac{d}{dt} \left(\zeta + \int \zeta_1 dt - \int \psi dt \right)$$

поэтому величина

$$\mu_1 \frac{d}{dt} [(\lambda_1 + \lambda_2) t + \ln \Delta]$$

должна быть полной производной по $t$, а это возможно лишь при $\mu_1 = \text{const}$. Таким образом,

$$F_\nu(t, \lambda_1, \lambda_2, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(n+2)}) =$$
$$= \frac{d}{dt} \Phi(t, q_1, \ldots, q_2^{(n-1)}) - \mu_1 q_1 + \psi(t) \qquad (\mu_1 = \text{const})$$

является функцией множества $\{F\}$ самого общего вида.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F dt = \frac{1}{2\pi} \Phi \Big|_0^{2\pi} - \frac{\mu_1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q_1 dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(t)\, dt = \mu_1 (\lambda_1 + \lambda_2) + \mu$$

Теорема доказана.

4°. Отбрасывая в выражении для функции $F$ несущественное слагаемое $\psi(t)$, на основании доказанного можно написать

$$\frac{d}{dt} f(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(n+2)}) = \frac{d}{dt} \Phi(t, q_1, \ldots, q_2^{(n-1)}) - \mu_1 q_1$$

Интегрируя это выражение, обозначая $f = \ln f'$, $\Phi = \ln \Phi'$ и потенцируя, получим

$$f'(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_2^{(n+2)}) = \Phi'(t, q_1, \ldots, q_2^{(n-1)}) \exp\left(-\mu_1 \int q_1 dt\right)$$

Такое представление функций от фундаментальных решений уравнения (1.1) находится в связи с одной теоремой П. Аппеля [1].

Выражаю глубокую благодарность Н. Г. Четаеву, а также участникам руководимого им семинара в МГУ за помощь, советы и критику.

Поступила 7 VIII 1959

## ЛИТЕРАТУРА

1. Appel P. Memoire sur les equations differentieles, lineaires. Annales de l'Ecole Normale, ser. II, 10, 400, 1881.
2. Гурса Э. Курс математического анализа, том. 2. Гостехтеоретиздат, М., 1933.
3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I., Гостехиздат, 1948.